

Signale und Systeme 2

Beispielsammlung

© G. Doblinger, C. Novak, J. Gonter, G. Hannak, N. Goertz

Jänner 2016

ghannak@nt.tuwien.ac.at
norbert.goertz@nt.tuwien.ac.at

Vorwort

In dieser Beispielsammlung zur VU “Signale und Systeme 2” (SuS2) werden zeitdiskrete Signale und Systeme sowie grundlegende Algorithmen der digitalen Signalverarbeitung behandelt. Die vorliegende Beispielsammlung enthält repräsentative Aufgaben, die das eingehende Verständnis der Methoden erleichtern sollen. Die meisten Aufgaben sind so gestaltet, dass langwierige Integralberechnungen oder algebraische Umformungen nur dann auftreten, wenn ein ungeschickter Lösungsweg gewählt wird. **Beachten Sie daher die folgenden Ratschläge, bevor Sie mit der Bearbeitung der Beispiele beginnen.** Vor dem eigentlichen Rechenvorgang sollten Sie das Problem eingehend analysieren und den Lösungsweg nach folgenden Gesichtspunkten auswählen:

- Lösung im Zeitbereich oder im Frequenzbereich?
- Signale in einfache Teilsignale zerlegen,
- elementare Eigenschaften ausnützen (z.B. Reellwertigkeit, gerade Funktion, Symmetrie, Linearität, Zeitinvarianz etc.),
- bei Anwendung der Fouriertransformation oder \mathcal{Z} -Transformation die Tabellen der Formelsammlung verwenden,
- elementare Eigenschaften der Transformationen anwenden,
- Erfüllung grundlegender Eigenschaften kontrollieren (z.B. Betragsverlauf positiv?, Lösung reell oder komplex?, Symmetrie richtig?, Zeit- und Frequenzbereich vermischt?),
- Falls nicht ohnehin verlangt, Lösung graphisch veranschaulichen (dabei immer die Achsen mit markanten Punkten beschriften).
- Bei der Lösung von rekursiven Differenzgleichungen die ersten paar Abtastwerte durch schrittweises Auflösen der Gleichungen kontrollieren.

Ergänzend zu den Rechenbeispielen können viele Beispiele auch durch Simulation mit MATLAB gelöst werden. Damit kann man sehr rasch Lösungen kontrollieren und graphisch veranschaulichen. Zusätzliche MATLAB-Beispiele sollen den Stoffumfang der vorliegenden Beispielsammlung ergänzen. Die Ausarbeitung dieser Beispiele erfolgt auf freiwilliger Basis und ist als Vorbereitung für die Verwendung von MATLAB in Vertiefungsfächern der nachfolgenden Studienabschnitte gedacht.

Verwendete Notation

Die in SuS2 verwendete Notation ist in Tabelle 1 anhand wichtiger Beispiele angegeben. Außerdem werden diese Symbole – sofern möglich – jenen für zeitkontinuierliche Signale und Systeme der Vorlesung SuS1 gegenübergestellt. Die in SuS2 verwendete Notation ist die in der Fachliteratur auf dem Gebiet der digitalen Signalverarbeitung übliche Bezeichnungsweise. Dabei werden zur Unterscheidung zwischen zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen Signalen bei zeitdiskreten Signalen eckige Klammern verwendet, also z.B. $x[n]$. So soll hervorgehoben werden, dass das Funktionsargument nur diskrete Werte annimmt, d.h. $n \in \mathbb{Z}$. Bei zeitkontinuierlichen Signalen werden hingegen runde Klammern verwendet. Falls nicht anders angegeben, werden für Zeitsignale Kleinbuchstaben und für deren

Tabelle 1: Notation und Bedeutung wichtiger Symbole

Bezeichnung	SuS2 (zeitdiskret)	SuS1 (zeitkontinuierlich)
Eingangssignal	$x[n], f[n]$	$u(\tau)$
Ausgangssignal	$y[n], g[n]$	$y(\tau)$
Impulsantwort (LTI-System)	$h[n]$	$g(\tau)$
Sprungantwort (LTI-System)	$a[n]$	$h(\tau)$
Sprungfunktion (zeitdiskret)	$\sigma[n]$	
Sprungfunktion (zeitkont.)		$\varepsilon(\tau)$
Einsimpuls	$\delta[n]$	
Dirac-Stoß (Delta-Funktion)		$\delta(\tau)$
Faltungsoperation	$(x * h)[n]$	$x(\tau) * h(\tau)$

Fourier- oder \mathcal{Z} -Transformationen Großbuchstaben verwendet. Bei der Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale wird das Funktionsargument in der Form $e^{j\theta}$ geschrieben, also z.B. $X(e^{j\theta})$, um die 2π -Periodizität der Spektren zeitdiskreter Signale hervorzuheben. Sind in den Beispielen Spektren angegeben, dann beschränkt sich der Verlauf im Normalfall auf das Frequenzgrundintervall $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (Bereich minus halbe Abtastrate bis plus halbe Abtastrate). Ausnahmen treten bei Modulation und Abtastratenumsetzung auf.

Weiterführende Literatur

- S. J. Orfanidis, *Introduction to Signal Processing*, verfügbar als PDF auf <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/>, © 2010 by S. J. Orfanidis.
- A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, J. R. Buck. *Zeitdiskrete Signalverarbeitung, zweite Auflage*. Pearson Studium, 2004.
- A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, S. H. Nawab. *Signals & Systems Second Edition*. Prentice-Hall International, 1997.
- J.R. Buck, M.M. Daniel, A.C. Singer. *Computer Explorations in Signals and Systems Using MATLAB Second Edition*. Prentice-Hall, New Jersey, 2002.
- S. K. Mitra. *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*. McGraw-Hill, New York NY, 1998.

S. K. Mitra. *Digital Signal Processing Laboratory Using MATLAB*. WCB/McGraw-Hill, New York NY, 1999.

G. Doblinger. *MATLAB-Programmierung in der digitalen Signalverarbeitung*. J. Schlembach Fachverlag, 2001.

Inhaltsverzeichnis

1	Zeitdiskrete Signale	1
2	Zeitdiskrete Systeme	5
3	Fouriertransformation	9
4	\mathcal{Z}-Transformation	16
5	Digitale Filter	20
6	Diskrete Fouriertransformation	28
7	Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung	31
8	MATLAB-Beispiele	36
8.1	Signalabtastung, Rekonstruktion und Quantisierung	37
8.2	Signalerzeugung	39
8.3	Signaloperationen	41
8.4	Zeitdiskrete Systeme im Zeitbereich	41
8.5	Zeitdiskrete Systeme im Frequenzbereich und \mathcal{Z} -Bereich	44
8.6	Diskrete Fouriertransformation (DFT)	48
8.7	Digitale Filter	53
8.8	Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung	58
A	Lösungen	62
A.1	Zeitdiskrete Signale	62
A.2	Zeitdiskrete Systeme	67
A.3	Fouriertransformation	71
A.4	\mathcal{Z} -Transformation	75
A.5	Digitale Filter	83
A.6	Diskrete Fouriertransformation (DFT) und FFT	90
A.7	Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung	93
B	Formeln für Fourier- und \mathcal{Z}-Transformation	98
B.1	Fourierreihen zeitdiskreter periodischer Signale	98
B.2	Fouriertransformation zeitdiskreter Signale	99
B.3	Diskrete Fouriertransformation (DFT)	100
B.4	\mathcal{Z} -Transformation	102
B.5	Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung	105

1 Zeitdiskrete Signale

Aufgabe 1.1:

Für das zeitbegrenzte Signal

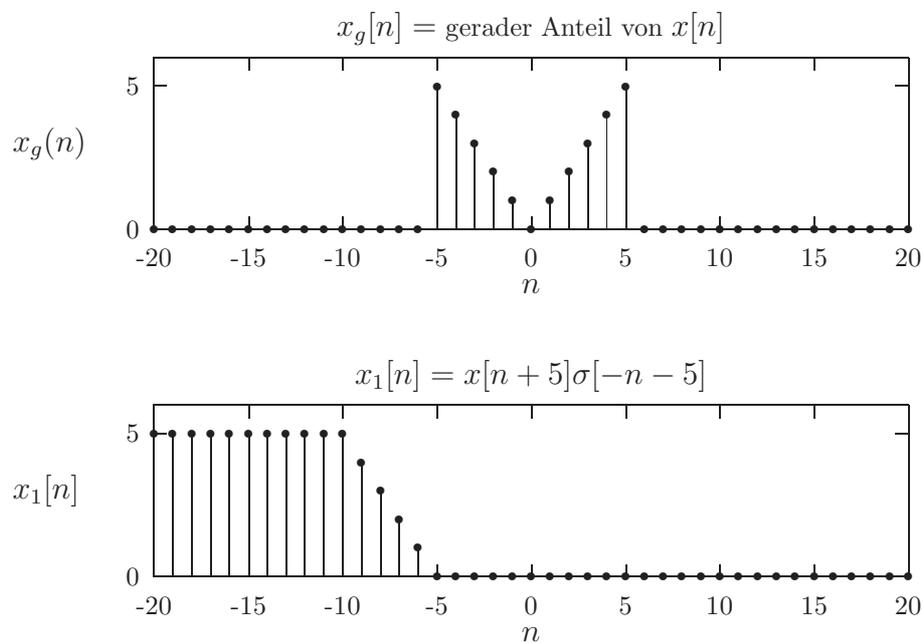
$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & 0 \leq n \leq 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$

zeichnen Sie folgende Signale:

- $y[n] = x[n + 5]$
- $y[n] = x[-n + 5]$
- $y[n] = x[2n]$
- gerades und ungerades Teilsignal von $x[n]$
- $y[n] = x[n + 10] + x[-n + 10] - 10\delta[n]$

Aufgabe 1.2:

Von einem Signal $x[n]$ sei der gerade Anteil $x_g[n]$ und das Signal $x_1[n]$ gegeben. Bestimmen Sie den ungeraden Anteil des Signals $x[n]$.



Aufgabe 1.3:

Jedes Signal $x[n]$ kann in ein gerades Signal $x_g[n]$ und in ein ungerades Signal $x_u[n]$ zerlegt werden. Zeigen Sie allgemein, dass

- a) das Produkt $x_g[n]x_u[n]$ ein ungerades Signal ist,
 b) für das ungerade Signal gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = 0,$$

- c) die Signalenergie gegeben ist durch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_g^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n].$$

Aufgabe 1.4:

Welche Grundperiode hat das zeitdiskrete Signal

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

in Abhängigkeit von den ganzzahligen Größen k und N ?

Aufgabe 1.5:

Das Signal $x[n]$ sei periodisch mit der Periode N . Prüfen Sie, ob das Signal $y[n] = x[Mn]$ (M ganzzahlig) ebenfalls periodisch ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Periode von $y[n]$.

Aufgabe 1.6:

Die Fourierreihendarstellungen der periodischen Signale $x[n]$ und $y[n]$ sind gegeben durch

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \Leftrightarrow c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

und

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \Leftrightarrow d_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}.$$

Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen den Fourierreihenoeffizienten d_k und c_k für die folgenden Signalbeziehungen:

- a) $y[n] = x[n - \frac{N}{2}]$, N gerade
 b) $y[n] = x[N - n]$
 c) $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[N - n])$
 d) $y[n] = x[2n]$
 e) $y[n] = x[n] \cos \frac{2\pi L}{M}n$, L und M ganzzahlig
 f) $y[n] = x^2[n]$

Aufgabe 1.7:

Für die gegebenen periodischen Signale bestimme man die Fourierreihenkoeffizienten c_k :

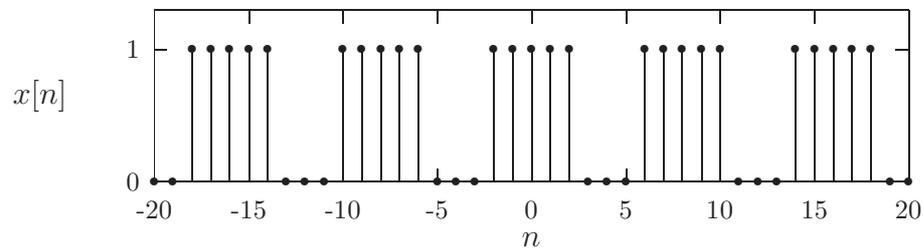
a) $x[n] = 1 - \cos \frac{\pi}{4}n$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $-2 \leq n \leq 3$, und $x[n+6] = x[n]$

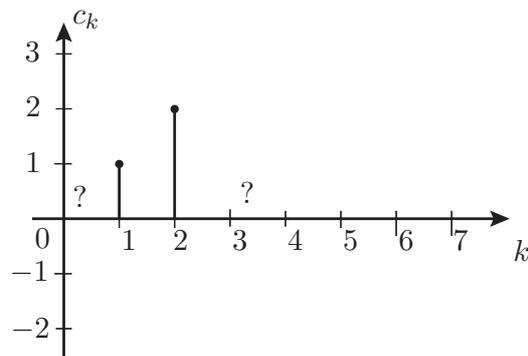
c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3k]$

d) $x[n] = e^{j\frac{2\pi L}{M}n}$, L und M ganzzahlig

e)

**Aufgabe 1.8:**

Gegeben ist ein unvollständiges Spektrum eines *reellen, periodischen, mittelwertfreien (ohne Gleichanteil) Signals* mit Periode $N = 4$:



Bestimmen Sie aus diesen Angaben das Zeitsignal $x[n]$, sowie die fehlenden Fourierreihenkoeffizienten c_0 und c_3 .

Aufgabe 1.9:

Das nicht exakt bandbegrenzte analoge Signal

$$x_a(t) = \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \sigma(t)$$

soll abgetastet (Abtastfrequenz $f_s = \frac{1}{T}$) und nach dem Abtasttheorem wieder rekonstruiert werden.

- a) Berechnen Sie das Spektrum $X_a(j\omega)$.
- b) Skizzieren Sie Betrags- und Phasenverlauf von $X_a(j\omega)$.
- c) Berechnen Sie das Spektrum $X(e^{j\theta})$ des zeitdiskreten Signals $x[n]$, das durch den Abtastvorgang entsteht.
- d) Skizzieren Sie Betrags- und Phasenverlauf von $X(e^{j\theta})$.
- e) Wie hoch muß die Abtastfrequenz f_s gewählt werden, damit der Amplitudenfehler, der durch den Abtastvorgang und durch die Rekonstruktion mit einem idealen Tiefpassfilter entsteht, nicht größer als eine gegebene Schranke ϵ wird? Das bedeutet $|x_a(t) - x_r(t)| \leq \epsilon, \forall t \geq 0$. Dabei ist $x_r(t)$ das aus den Abtastwerten $x[n]$ rekonstruierte bandbegrenzte Analogsignal.
Bei der Berechnung des Amplitudenfehlers können Sie voraussetzen, daß sich im Spektrum $X(e^{j\theta})$ nur benachbarte Bänder überlappen, bzw. $f_s\tau \gg 1$ ist.
- f) Welche Abtastfrequenz f_s ergibt sich für $\tau = 10\text{ms}$ und $\epsilon = 10^{-3}$?

2 Zeitdiskrete Systeme

Aufgabe 2.1:

Beweisen Sie für jedes der durch Eingangs/Ausgangsbeziehungen gegebenen Systeme die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Systemeigenschaften *Linearität*, *Zeitinvarianz*, *Kausalität*, *Stabilität*. Wo es möglich ist, geben Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems an.

a) $y[n] = x[n] - x[n - 1]$

b) $y[n] = x[n]x[n - 1]$

c) $y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+4} x[k]$

d) $y[n] = x[n] + x[-n]$

e) $y[n] = x[2n]$

f) $y[n] = \frac{1}{n + 0.5}x[n]$

g) $y[n] = x[n - 1] + x[n] - x[n + 1]$

Aufgabe 2.2:

Ein lineares, zeitinvariantes System (LTI-System) habe eine Impulsantwort $h[n] = \alpha^n \sigma[n]$. Berechnen Sie die Systemantworten $y[n]$ auf folgende Eingangssignale:

a) $x[n] = \sigma[n]$

b) $x[n] = \sigma[-n]$, $|\alpha| < 1$

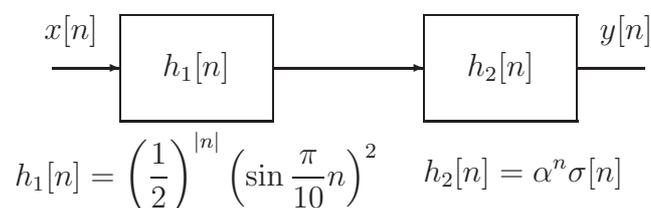
c) $x[n] = \sigma[n] + \sigma[-n + N] - 1$

d) $x[n] = \sigma[n + N]\sigma[-n + N]$

e) $x[n] = \beta^n \sigma[n]$, auch für $\beta = \alpha$, $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$.

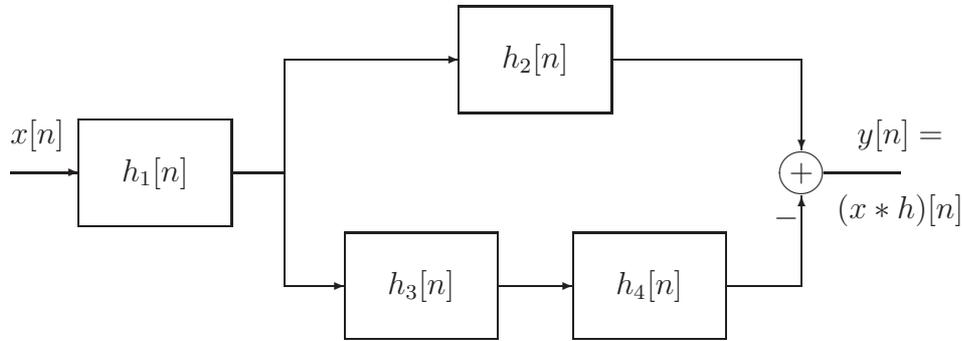
Aufgabe 2.3:

Das abgebildete System besteht aus zwei LTI-Systemen mit den Impulsantworten $h_1[n]$ und $h_2[n]$. Berechnen Sie die Antwort $y[n]$ des Gesamtsystems auf das Eingangssignal $x[n] = \delta[n] - \alpha \delta[n - 1]$, $|\alpha| < 1$.



Aufgabe 2.4:

Berechnen Sie die Gesamtimpulsantwort $h[n]$ des abgebildeten Systems, das aus einzelnen LTI-Systemen zusammengesetzt ist.



Dabei sei

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] \\ h_2[n] &= (n+1)\sigma[n] \\ h_3[n] &= h_2[n] \\ h_4[n] &= \delta[n-1]. \end{aligned}$$

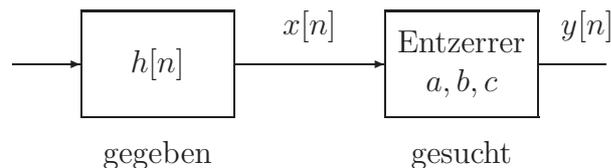
Aufgabe 2.5:

Gegeben ist ein LTI-System mit der Impulsantwort

$$h[n] = 12 \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right) \sigma[n].$$

- Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort $a[n]$ des Systems.
- Zur Vermeidung von Überschwingen der Sprungantwort $a[n]$ wird nun zum gegebenen System ein System in Kette geschaltet. Dieses Entzerrersystem wird durch die folgende Eingangs/Ausgangsbeziehung beschrieben:

$$y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cx[n-2].$$



Wie sind die Koeffizienten a, b, c zu wählen, so dass das Gesamtsystem kein Überschwingen zeigt, d.h. die Sprungantwort des entzerrten Gesamtsystems ist $\tilde{a}[n] = \sigma[n - n_0]$?

- c) Wie groß sollte zweckmäßigerweise die Zeitverzögerung n_0 gewählt werden?

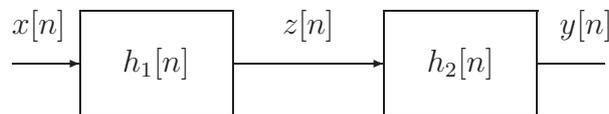
Aufgabe 2.6:

Ein System sei als Kettenschaltung zweier Teilsysteme realisiert. Das erste Teilsystem ist durch die Eingangs/Ausgangsbeziehung

$$z[n] = \sum_{k=n-N+1}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[n-k]x[k]$$

charakterisiert. Vom zweiten System ist die Impulsantwort bekannt:

$$h_2[n] = 2 \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{2\pi n}{N} \sigma[n].$$



- a) Berechnen und skizzieren Sie
- a₁) die Impulsantwort $h_1[n]$ des ersten Teilsystems,
 - a₂) die Impulsantwort $h[n]$ des Gesamtsystems.
- b) Berechnen Sie die Antwort $y[n]$ des Gesamtsystems auf das Eingangssignal $x[n] = \sin \frac{2\pi n}{N}$, $-\infty < n < \infty$.
- c) Vertauschen Sie jetzt die Reihenfolge der beiden Teilsysteme und wiederholen Sie Punkt b). Warum erhält man dabei ein anderes Ergebnis, obwohl doch beide Teilsysteme LTI-Systeme sind und die Faltungsoperation normalerweise assoziativ ist?

Aufgabe 2.7:

Es soll das Eingangs/Ausgangsverhalten eines zeitdiskreten Systems untersucht werden, wobei das betrachtete System durch die folgende Differenzgleichung charakterisiert sei:

$$y[n] = y[n-1] + \frac{1}{N} (x[n] - x[n-N])$$

und $x[n] = y[n] = 0$ für $n < 0$. Dabei repräsentiert $x[n]$ das Eingangssignal und $y[n]$ das Ausgangssignal des Systems.

- a) Zeichnen Sie ein Schaltbild des Systems bestehend aus Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen.
- b) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[n]$ und die Sprungantwort $a[n]$ des Systems.
- c) Versuchen Sie eine alternative Systemrealisierung zu finden, die die gleiche Impulsantwort $h[n]$ aufweist, jedoch keine Rückkopplung (Rekursion) verwendet.

Aufgabe 2.8:

Ein zeitdiskretes System sei durch den folgenden Zusammenhang zwischen den Fouriertransformationen des Eingangssignals und des Ausgangssignals charakterisiert:

$$Y(e^{j\theta}) = j \frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta},$$

mit $X(e^{j\theta}) \Leftrightarrow x[n]$ und $Y(e^{j\theta}) \Leftrightarrow y[n]$.

- a) Berechnen Sie allgemein den Zusammenhang zwischen Eingangssignal $x[n]$ und Ausgangssignal $y[n]$ des gegebenen Systems.
- b) Berechnen Sie die Antworten des Systems auf folgende Signale:
 - b₁) $x[n] = \delta[n - N_0]$, $N_0 \in \mathbb{N}$
 - b₂) $x[n] = \sigma[n]$
 - b₃) $x[n] = \frac{\sin \theta_0 n}{\pi n}$
- c) Prüfen Sie,
 - c₁) ob das System reell- oder komplexwertig ist,
 - c₂) ob das System linear ist,
 - c₃) ob das System zeitinvariant ist,
 - c₄) unter welcher Bedingung das System stabil ist.

Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 2.9:

Sie sollen ein zeitdiskretes System untersuchen, von dem die Beziehung zwischen Eingangssignal $x[n]$ und Ausgangssignal $y[n]$ gegeben ist:

$$y[n] = \sum_{k=n-1}^{n+1} (x[k+1] - x[k] + x[k-1]).$$

- a) Prüfen Sie (mit Beweis), ob das System die folgenden Eigenschaften besitzt:
 - a₁) Linearität,
 - a₂) Kausalität,
 - a₃) Stabilität,
 - a₄) Zeitinvarianz.
- b) Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort und die Übertragungsfunktion des Systems.

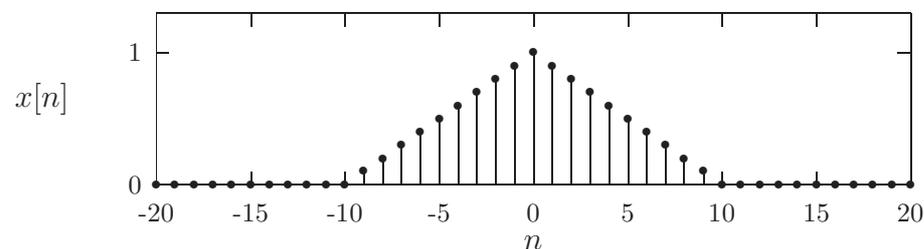
- c) Welches Ausgangssignal liefert das System für $x[n] = (-1)^n \quad \forall n$?
- d) Nun wird das System mit dem Signal $x[n] = \lambda^n$ angeregt. Wie ist λ zu wählen, damit $y[n] \equiv 0$ ist?
- e) Geben Sie eine Realisierung des Systems an.

3 Fouriertransformation zeitdiskreter Signale und Systeme

Aufgabe 3.1:

Berechnen Sie die Fouriertransformation $X(e^{j\theta})$ der folgenden Signale:

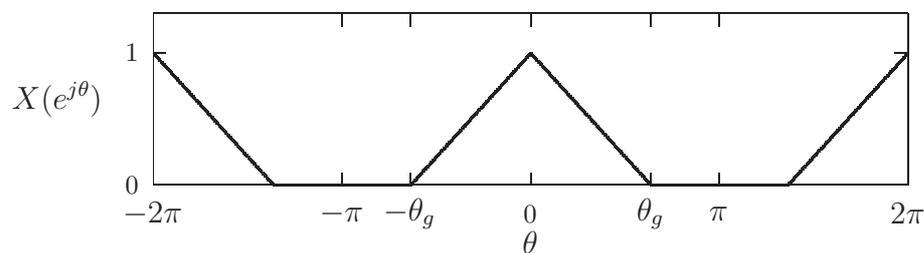
- a) $x[n] = \alpha^n \sin \theta_0 n \sigma[n]$ für $|\alpha| < 1$
- b) $x[n] = 2^n \sigma[-n]$
- c) $x[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\pi n} \frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{\pi n}$
- d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$
- e) $x[n] = n \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$
- f) $x[n] = (-1)^n$
- g)



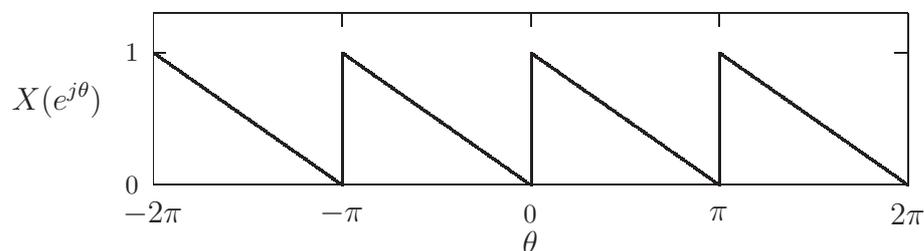
Aufgabe 3.2:

Berechnen Sie das Zeitsignal $x[n]$ für folgende Spektren:

- a) $X(e^{j\theta}) = \cos^2 \theta$
- b)



c)



$$d) X(e^{j\theta}) = \frac{e^{-j\theta}}{1 + \frac{1}{6}e^{-j\theta} - \frac{1}{6}e^{-j2\theta}}$$

Aufgabe 3.3:

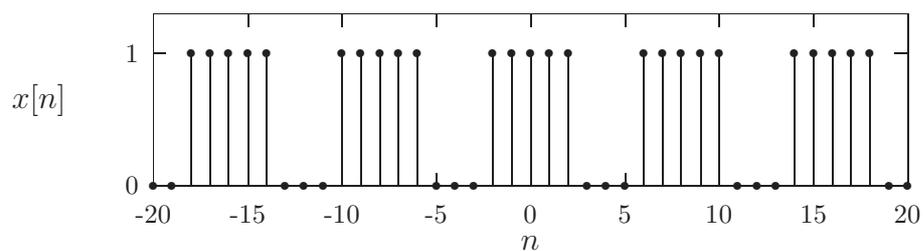
Gegeben sei ein LTI-System mit der Impulsantwort

$$h[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{3}n}{\pi n}.$$

Berechnen Sie das Ausgangssignal dieses Systems für folgende Eingangssignale:

$$a) x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 8k]$$

b)



c) $x[n] = \delta[n + 1] + \delta[n - 1]$

d) $x[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{4}n}{\pi n}$

e) $x[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{4}n}{\pi n} \cos \frac{3\pi}{4}n$

Aufgabe 3.4:

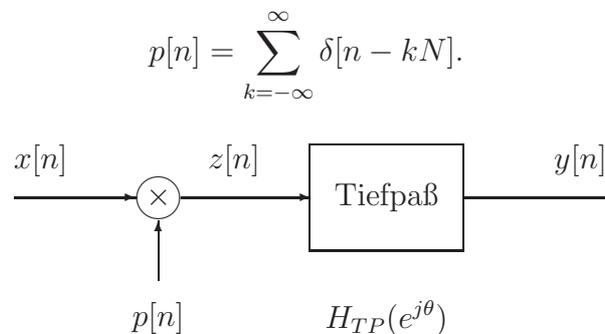
Von einem zeitdiskreten System sei die Beziehung zwischen dem Spektrum $X(e^{j\theta})$ des Eingangssignals $x[n]$ und dem Spektrum $Y(e^{j\theta})$ des Ausgangssignals $y[n]$ bekannt:

$$Y(e^{j\theta}) = \int_{\theta - \frac{\pi}{4}}^{\theta + \frac{\pi}{4}} X(e^{j\Omega}) d\Omega.$$

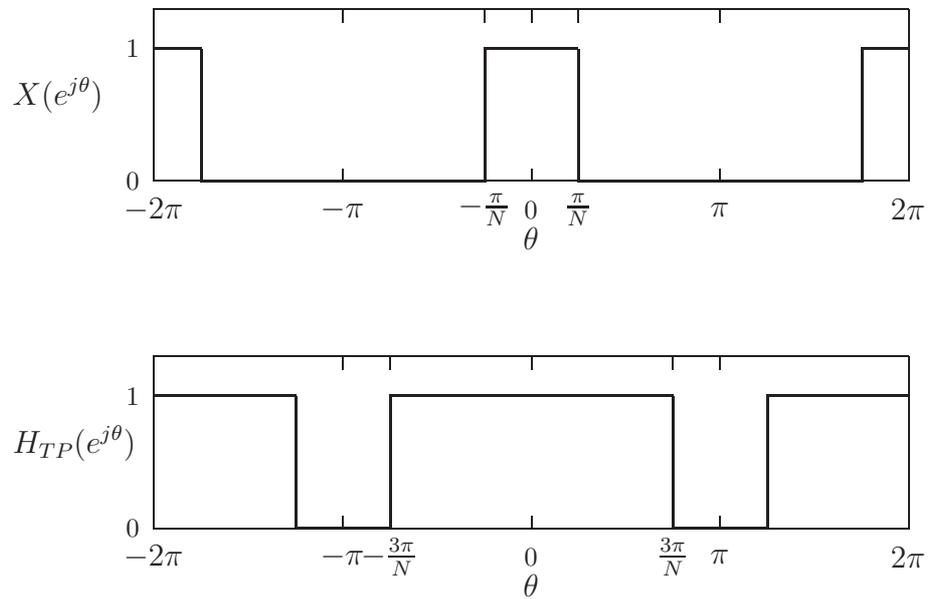
- a) Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen $x[n]$ und $y[n]$.
- b) Prüfen Sie, ob das System
- b₁) linear,
 - b₂) zeitinvariant,
 - b₃) kausal,
 - b₄) stabil,
 - b₅) reell- oder komplexwertig ist.
- c) Falls das gegebene System durch eine Impulsantwort $h[n]$ beschrieben werden kann, so geben Sie $h[n]$ an.

Aufgabe 3.5:

Das Tiefpasssignal $x[n]$ wird mit dem abgebildeten zeitdiskreten System verarbeitet, wobei das Modulationssignal ein Einspuls mit der Periode N ist:



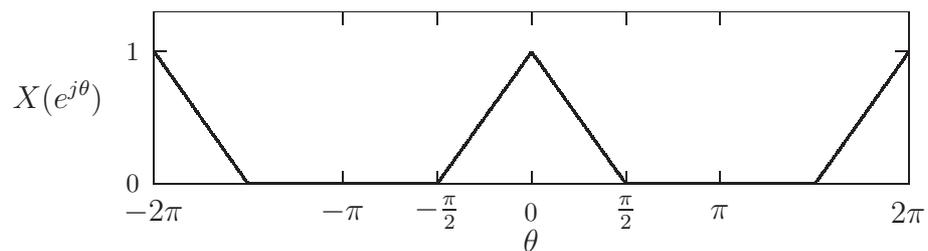
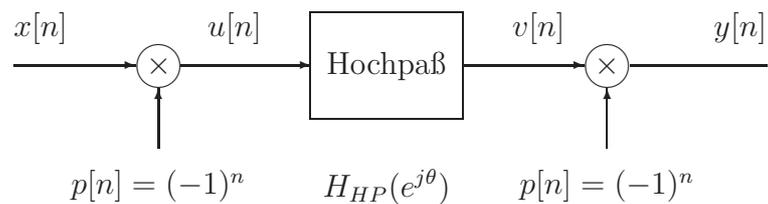
Das Spektrum des Eingangssignals und die Übertragungsfunktion des Tiefpassfilters sind in den folgenden Abbildungen dargestellt:

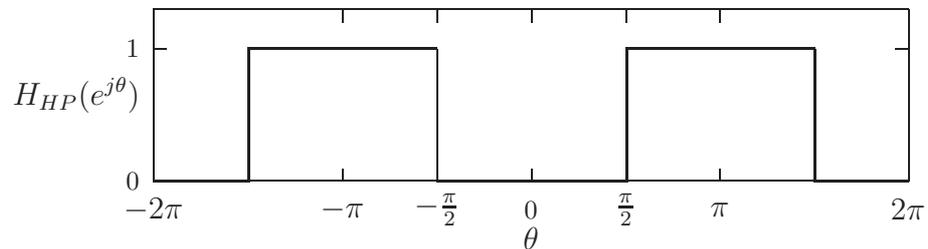


- a) Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformationen $P(e^{j\theta})$, $Z(e^{j\theta})$, $Y(e^{j\theta})$ der Signale $p[n]$, $z[n]$ und $y[n]$.
- b) Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y[n]$ des Gesamtsystems.

Aufgabe 3.6:

Ein zeitdiskretes System, bestehend aus zwei Modulatoren und einem idealisierten Hochpassfilter, wird mit einem Tiefpasssignal $x[n]$, dessen Spektrum gegeben ist, angeregt.





- a) Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformationen $P(e^{j\theta})$, $U(e^{j\theta})$, $V(e^{j\theta})$, $Y(e^{j\theta})$ der Signale $p[n]$, $u[n]$, $v[n]$ und $y[n]$.
- b) Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y[n]$.

Aufgabe 3.7:

Es soll ein LTI-System entworfen werden, das auf das Eingangssignal

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma[n-1]$$

mit dem Ausgangssignal

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sigma[n]$$

antwortet.

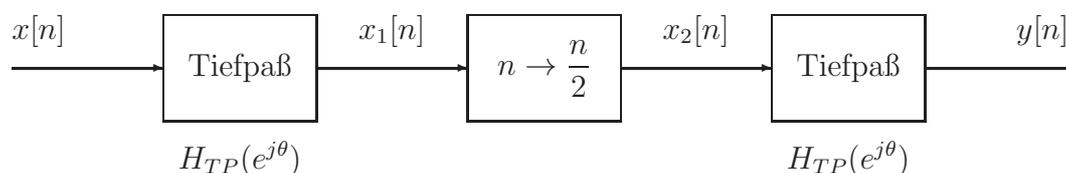
- a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ des Systems.
- b) Berechnen Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems.
- c) Geben Sie eine mögliche Realisierung des Systems mit Addierern, Konstantenmultiplizierern und Verzögerungselementen an.

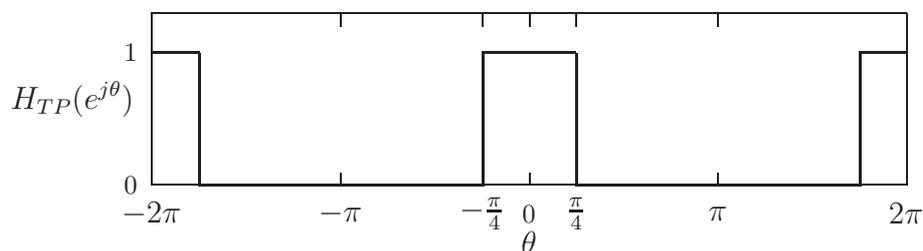
Aufgabe 3.8:

Das abgebildete System soll im Zeit- und im Frequenzbereich untersucht werden, wobei das mittlere Teilsystem eine Eingangs/Ausgangsbeziehung gemäß

$$x_2[n] = \begin{cases} x_1 \left[\frac{n}{2} \right] & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

aufweist.





- a) Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort $h_{TP}[n]$ des Tiefpassfilters.
- b) Berechnen Sie die Antwort $y[n] = h[n, k]$ des Gesamtsystems auf den zeitverscho-
benen Einsimpuls $x[n] = \delta[n - k]$.
- c) Berechnen Sie allgemein den Zusammenhang zwischen den Spektren $X(e^{j\theta})$ und $Y(e^{j\theta})$. Verwenden Sie diese Beziehung zur Kontrolle Ihres Ergebnisses aus Punkt b).
- d) Ist das Gesamtsystem
- d₁) linear?
 - d₂) zeitinvariant?
 - d₃) kausal?
 - d₄) stabil?
 - d₅) reell- oder komplexwertig?
- (Begründen Sie Ihre Antworten!)

Aufgabe 3.9:

Von einem LTI-System ist die Übertragungsfunktion gegeben:

$$H(e^{j\theta}) = 1 + \alpha e^{-j\theta} + \beta e^{-j2\theta}.$$

- a) Berechnen Sie jene Werte der Koeffizienten α und β , für die die Antwort des Systems null ist ($y[n] = 0, \forall n$), und zwar für das Eingangssignal $x[n] = \cos \theta_0 n$.
- b) Skizzieren Sie für diese speziellen Werte von α, β den Betrags- und Phasenverlauf der Übertragungsfunktion.

Aufgabe 3.10:

In vielen Bereichen der Signalanalyse ist häufig die Ermittlung der Signalenergie notwendig. Theoretisch ist die Signalenergie — sofern sie existiert — eine Konstante, da sich die Berechnung über ein unendlich langes Zeitintervall erstreckt. In der Praxis können

jedoch nur Zeitintervalle endlicher Dauer für die Berechnung herangezogen werden, so dass stets nur eine zeitabhängige Kurzzeitenergie des Signals gemessen werden kann. Eine mögliche Form der Kurzzeitenergie eines Signals $x[n]$ ist

$$e_x[n] = \sum_{k=n-N+1}^n x^2[k],$$

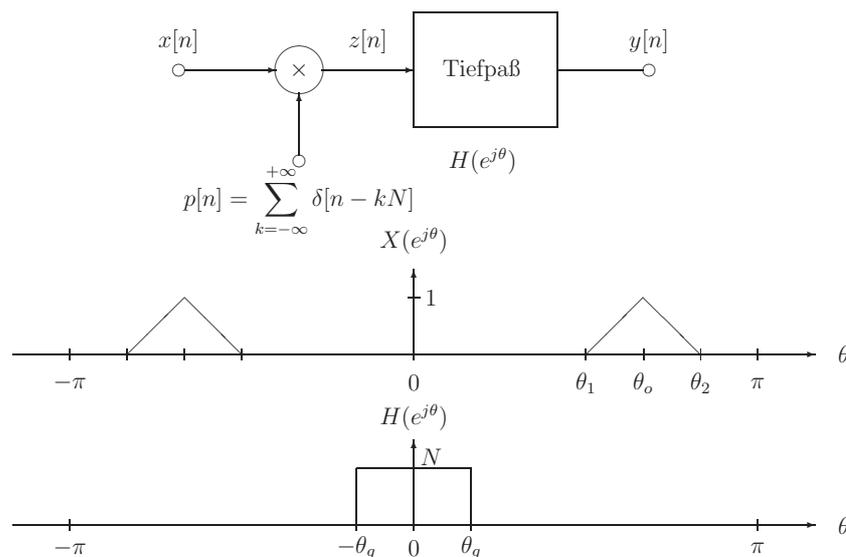
wobei N die Dauer des Messintervalls ist.

- Entwerfen Sie ein System bestehend aus einem Quadrierer und einem linearen Filter, so dass das Ausgangssignal dieses Systems die Kurzzeitenergie $e_x[n]$ des Eingangssignals $x[n]$ ist.
- Berechnen Sie allgemein die Fouriertransformation $E_x(e^{j\theta})$ der Kurzzeitenergie in Abhängigkeit vom Eingangssignalspektrum $X(e^{j\theta})$ und von der Messdauer N .
- Wie ist die Messdauer N für ein Signal der Form $x[n] = A \cos \theta_0 n$ zu wählen, damit $e_x[n]$ in diesem speziellen Fall konstant, d.h. zeitunabhängig ist?

Aufgabe 3.11:

Gegeben sei ein zeitdiskretes Bandpasssignal $x[n]$ mit dem abgebildeten Spektrum $X(e^{j\theta})$. Dieses Signal wird mit einem Puls $p[n]$ bestehend aus äquidistanten Einsimpulsen multipliziert. Danach erfolgt eine ideale Tiefpassfilterung.

- Berechnen und skizzieren Sie die Spektren $Z(e^{j\theta})$ und $Y(e^{j\theta})$ der Signale $z[n]$ und $y[n]$.
- Berechnen Sie das Ausgangssignal $y[n]$ des Systems.



Mit $\theta_1 = (M - 1)\pi/N$, $\theta_o = M\pi/N$, $\theta_2 = (M + 1)\pi/N$, $\theta_g = \pi/N$ und $M < N - 1$, M gerade.

4 \mathcal{Z} -Transformation

Aufgabe 4.1:

Bestimmen Sie die \mathcal{Z} -Transformation (inklusive Konvergenzbereich) für die angegebenen Signale und skizzieren Sie das zugehörige Pol/Nullstellendiagramm.

a) $x[n] = \delta[n - 1]$

b) $x[n] = \delta[n + 1]$

c) $x[n] = \delta[n - 1] + \delta[n + 1]$

d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n]$

e) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[-n]$

f) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

g) $x[n] = ne^{-\alpha n} \sigma[n] \quad |\alpha| < 1$

h) $x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & n > 9 \end{cases}$

Aufgabe 4.2:

Berechnen Sie für jede gegebene \mathcal{Z} -Transformation $X(z)$ die rechtsseitigen und die linksseitigen Zeitsignale $x[n]$.

a) $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$

b) $X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$

c) $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$

Aufgabe 4.3:

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch und bestimmen Sie Pole und Nullstellen. Wählen Sie den Konvergenzbereich derart, dass Sie ein rechtsseitiges Signal erhalten und berechnen Sie dieses!

a) $H(z) = \frac{z}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$

b) $H(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{3})(z + \frac{1}{4})}$

c) $H(z) = \frac{1}{(3z-1)(6z-1)(2z-1)}$

d) nur Partialbruchzerlegung $H(z) = \frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2}$

Aufgabe 4.4:

Ein kausales LTI-System sei durch die folgende Differenzgleichung charakterisiert:

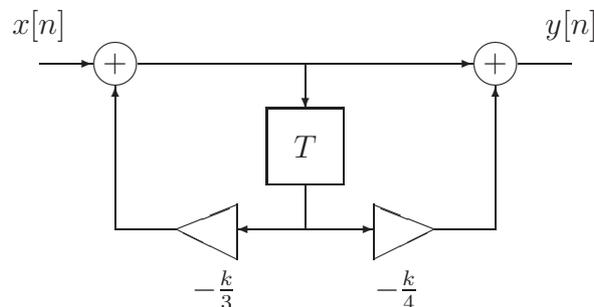
$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n].$$

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ dieses Systems.
- Skizzieren Sie das Pol/Nullstellendiagramm von $H(z)$.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der \mathcal{Z} -Transformation die Systemantwort $y[n]$ für das Eingangssignal

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n].$$

Aufgabe 4.5:

Von einem digitalen Filter ist das Schaltbild gegeben:



- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ dieses Filters.
- Wählen Sie den Parameter k so, dass das Filter stabil ist. Skizzieren Sie das Pol/Nullstellendiagramm für dieses stabile Filter.
- Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort $h[n]$ und die Sprungantwort $a[n]$ des stabilen Filters.

Aufgabe 4.6:

Für jede der angegebenen Differenzgleichungen mit zugehöriger Anfangsbedingung für $y[-1]$ und dem Anregungssignal $x[n]$ berechne man mit Hilfe der \mathcal{Z} -Transformation das Signal $y[n]$.

a) $y[n] + 3y[n-1] = x[n], \quad y[-1] = 1, \quad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n]$

- b) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$, $y[-1] = 0$, $x[n] = \sigma[n]$
 c) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$, $y[-1] = 1$, $x[n] = \sigma[n]$

Aufgabe 4.7:

Verwenden Sie die \mathcal{Z} -Transformation zur Berechnung von Impuls- und Sprungantwort des folgenden kausalen Systems:

$$y[n] - 2\rho \cos \varphi y[n-1] + \rho^2 y[n-2] = x[n].$$

Aufgabe 4.8:

Ein zeitdiskretes System sei durch die folgende Differenzgleichung charakterisiert:

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = \frac{5}{2}x[n].$$

- a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems.
 b) Zeichnen Sie das Pol/Nullstellendiagramm der Übertragungsfunktion des Systems.
 c) Berechnen Sie die Sprungantwort $a[n]$ des Systems, wobei die Anfangsbedingungen für die gegebene Differenzgleichung Null sind, d.h. $y[-1] = 0$ und $y[-2] = 0$.
 d) Wie sind die Anfangsbedingungen $y[-1]$ und $y[-2]$ zu wählen, damit für $x[n] = \sigma[n]$ auch das Ausgangssignal $y[n]$ gleich der Sprungfunktion $\sigma[n]$ ist?

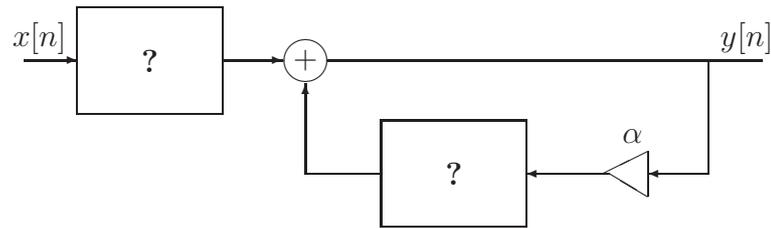
Aufgabe 4.9:

Ein FIR-Filter habe die Impulsantwort

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

mit reellwertigem α . Filter mit einer Impulsantwort endlicher Dauer werden üblicherweise mit nichtrekursiven Strukturen (z.B. Transversalfilter) implementiert.

- a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ und das Pol/Nullstellendiagramm für das gegebene Filter. Für welche Werte α ist das Filter stabil?
 b) Skizzieren Sie eine nichtrekursive Filterstruktur (Transversalfilter) mit der die gegebene Impulsantwort realisiert werden kann.
 c) Wieviele Additionen, Multiplikationen und Speicherelemente benötigt diese Struktur in Abhängigkeit von N ?
 d) Zeigen Sie, daß die gegebene Impulsantwort *endlicher* Dauer auch mit folgendem *rekursiven* System erzeugt werden kann. Bestimmen Sie die dazu die beiden mit “?” gekennzeichneten (linearen und zeitinvarianten) Teilfilter.



- e) Für welche Werte von α ist das rekursive Filter stabil?
- f) Vergleichen Sie die Komplexität (Anzahl Additionen, Multiplikationen und Speicherelemente) mit jener des Transversalfilters.

Aufgabe 4.10:

Von einem digitalen Filter sind die Pole $z_{\infty i}$ und Nullstellen z_{0i} der Übertragungsfunktion $H(z)$ gegeben:

$$z_{\infty 1} = 0, z_{\infty 2} = a \quad z_{01} = b, z_{02} = \frac{1}{b}$$

mit $0 < a < 1$ bzw. $0 < b < 1$ und $a \neq b$.

- a) Skizzieren Sie das Pol/Nullstellendiagramm.
- b) Berechnen Sie allgemein die Übertragungsfunktion $H(z)$ dieses Filters. Wie ist der Verstärkungsfaktor in Abhängigkeit von a, b zu wählen, damit $H(z)|_{z=1} = 1$ ist?
- c) Bestimmen Sie die minimalphasige Teilübertragungsfunktion $H_m(z)$ des Filters und skizzieren Sie deren Pol/Nullstellendiagramm.
- d) Bestimmen Sie die Allpassteilübertragungsfunktion $H_a(z)$ des Filters und das zugehörige Pol/Nullstellendiagramm.
- e) Sind das minimalphasige Teilfilter und der Allpass stabil und kausal?
- f) Geben Sie (sofern das überhaupt möglich ist) für beide Teilübertragungsfunktionen $H_m(z)$ und $H_a(z)$ Realisierungen mit Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen an.

Aufgabe 4.11:

Es sei ein zeitdiskretes kausales LTI-System mit dem Eingangssignal $x[n]$ und dem Ausgangssignal $y[n]$ gegeben. Dieses System wird durch ein Paar von Differenzgleichungen spezifiziert, die jeweils ein Zwischensignal $w[n]$ enthalten:

$$\begin{aligned} y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + w[n] + w[n-1] &= \frac{1}{2}x[n] \\ y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + 2w[n] - w[n-1] &= -\frac{1}{2}x[n] \end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie den Frequenzgang $H(e^{j\theta})$ und die Impulsantwort $h[n]$ dieses Systems. Ist das System stabil?
- b) Bestimmen Sie eine einzelne Differenzgleichung, durch die $x[n]$ und $y[n]$ verknüpft sind.
- c) Skizzieren Sie eine Realisierung des Systems mit Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen.

Aufgabe 4.12:

Ein einfacher digitaler Klangregler lässt sich mit einem Filter mit folgender Übertragungsfunktion realisieren:

$$H(z) = b_1 + b_2 z^{-2}.$$

- a) Bestimmen Sie die Koeffizienten b_1 und b_2 , so daß $|H(e^{j0})| = H_0$ und $H(e^{j\pi/2}) = 1$ ist. Skizzieren Sie einen typischen (nichttrivialen) Amplitudenfrequenzgang des Filters.
- b) Überprüfen Sie (mit Begründungen) folgende Aussagen:
 - b₁) Das Filter ist rekursiv.
 - b₂) Das Filter besitzt einen linearen Phasengang. Wenn ja, für welche Werte der Koeffizienten?
 - b₃) Das Filter ist immer stabil.
- c) Zeichnen Sie ein typisches (nichttriviales) Pol/Nullstellendiagramm für dieses Filter.

5 Digitale Filter

Aufgabe 5.1:

In dieser Aufgabe sollen Sie ausgehend von einem analogen Referenzfilter mit der Übertragungsfunktion

$$H_a(s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$$

zwei digitale Filter entwerfen, deren Übertragungsfunktionen $H(z)$ zu bestimmen sind.

- a) Im ersten Fall ist $H(z)$ so zu berechnen, dass die Impulsantwort invariant ist, d.h.

$$h[n] = h_a(nT)$$

(mit dem Abtastintervall T).

b) Im zweiten Fall soll die Sprungantwort erhalten bleiben,

$$a[n] = a_a(nT).$$

c) Geben Sie in beiden Fällen ein Schaltbild des Filters mit den betreffenden Filterkoeffizienten an.

Aufgabe 5.2:

Ein einfaches Verfahren für den Entwurf von FIR-Filtern ist die Fenstermethode, bei der ein idealisiertes Filter mit der unendlich langen Impulsantwort $h_d[n]$ durch ein Filter mit endlich langer Impulsantwort

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n] & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

approximiert wird. Dabei weicht die Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ des realisierten Filters von der Übertragungsfunktion $H_d(e^{j\theta})$ des idealisierten Filters ab. Diese Abweichung sei durch das Fehlermaß

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta}) - H_d(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

erfasst.

a) Der spektrale Fehler $E(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) - H_d(e^{j\theta})$ kann als Fouriertransformation eines zeitlichen Fehlers $e[n]$ dargestellt werden:

$$E(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]e^{-j\theta n}.$$

Ermitteln Sie $e[n]$ dieser Fourierdarstellung in Abhängigkeit von $h[n]$ und $h_d[n]$.

b) Drücken Sie das Fehlermaß ϵ^2 als Funktion von $e[n]$ aus.

c) Zeigen Sie, dass das Fehlermaß ϵ^2 dann minimal ist, wenn $h[n]$ entsprechend der oben angegebenen Beziehung die zeitbegrenzte Impulsantwort des idealisierten Filters ist.

Aufgabe 5.3:

Eine wichtige Entwurfsmethode für digitale IIR-Filter ist die Anwendung der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation. Damit kann aus einem stabilen analogen Referenzfilter ein stabiles digitales Filter gewonnen werden, wobei sich Sperrdämpfungen und Durchlasswelligkeiten nicht verändern. Da durch die Transformation jedoch die Frequenzachse verzerrt wird, muss dies bei der Festlegung der Grenzfrequenzen berücksichtigt werden.

- a) Zeigen Sie, dass die normierte Form der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation

$$s = \frac{1}{v} \frac{z-1}{z+1}, \quad v = \tan \pi \frac{f_g}{f_s}$$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1}{v} \frac{z-1}{z+1}}$$

(f_g ist die Grenzfrequenz des digitalen Filters, f_s ist die Abtastfrequenz) ein analoges Tiefpassfilter mit der normierten Grenzfrequenz $f_{a_g} = 1$ und der normierten Übertragungsfunktion $H_a(s)$ in das entsprechende digitale Tiefpassfilter mit der gewünschten Grenzfrequenz f_g und Übertragungsfunktion $H(z)$ überführt.

- b) Verwenden Sie die normierte Form der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation, um die Zusammenhänge zwischen den Polen bzw. Nullstellen des analogen Referenz Tiefpassfilters und jenen des digitalen Tiefpassfilters herzuleiten. Für welche sinnvolle Wahl der Grenzfrequenz f_g (bezogen auf die Abtastfrequenz f_s) ergeben sich besonders einfache Beziehungen?

Aufgabe 5.4:

Sie sollen mit der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation ein digitales Tiefpassfilter erster Ordnung mit der 3 dB Grenzfrequenz $f_g = \frac{f_s}{10}$ (Abtastfrequenz f_s) entwerfen. Dazu gehen Sie von einem normierten analogen Referenz Tiefpass mit der Übertragungsfunktion

$$H_a(s) = \frac{1}{1+s}$$

aus.

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des digitalen Filters. Skizzieren Sie Betrags- und Phasenverlauf von $H(z)$.
- Berechnen Sie Impuls- und Sprungantwort des digitalen Filters.
- Vergleichen Sie diese Impulsantwort mit der Impulsantwort, die man bei Anwendung der Impulsinvarianzmethode anstelle der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation erhält.
- Wiederholen Sie den Vergleich von Punkt c) sinngemäß für die Sprungantwort des digitalen Filters.

Aufgabe 5.5:

In entsprechender Weise wie bei Analogfiltern, können auch bei digitalen Filtern Frequenztransformationen angewendet werden, um aus einem Tiefpassfilter andere frequenzselektive Filter zu erzeugen. Die einfachste dieser digitalen Frequenztransformationen ist eine Tiefpass/Hochpasstransformation, bei der z in der Übertragungsfunktion des Tiefpassfilters durch $-z$ ersetzt wird, d.h.

$$H_{HP}(z) = H_{TP}(z) \Big|_{z \rightarrow -z}$$

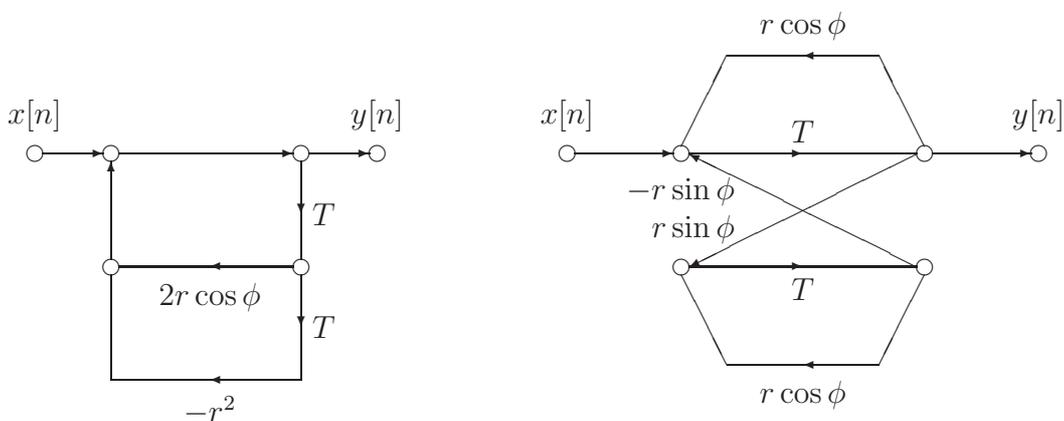
- Zeigen Sie an Hand der Pol/Nullstellenform von $H_{TP}(z)$, dass diese Frequenztransformation tatsächlich ein Hochpassfilter liefert. Skizzieren Sie im Pol/Nullstellendiagramm die Transformation eines konjugiert komplexen Tiefpasspaares.
- Wie hängen die Tiefpassgrenzfrequenz und die Hochpassgrenzfrequenz zusammen?
- Ändert sich die Sperrdämpfung und Durchlasswelligkeit durch diese Transformation?
- Verifizieren Sie die Wirkungsweise dieser Transformation auch am konkreten Fall eines Tiefpassfilters erster Ordnung, das mit Hilfe der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation aus einem normierten analogen Referenz Tiefpass gewonnen wird.
- Wiederholen Sie die vorhergehenden Punkte für die weiteren zwei elementaren Transformationen

$$H_{BP}(z) = H_{TP}(z) \Big|_{z \rightarrow -z^2}$$

$$H_{BS}(z) = H_{TP}(z) \Big|_{z \rightarrow z^2}.$$

Aufgabe 5.6:

Die Strukturen zweier digitaler Filter seien als Signalflussgraphen gegeben:



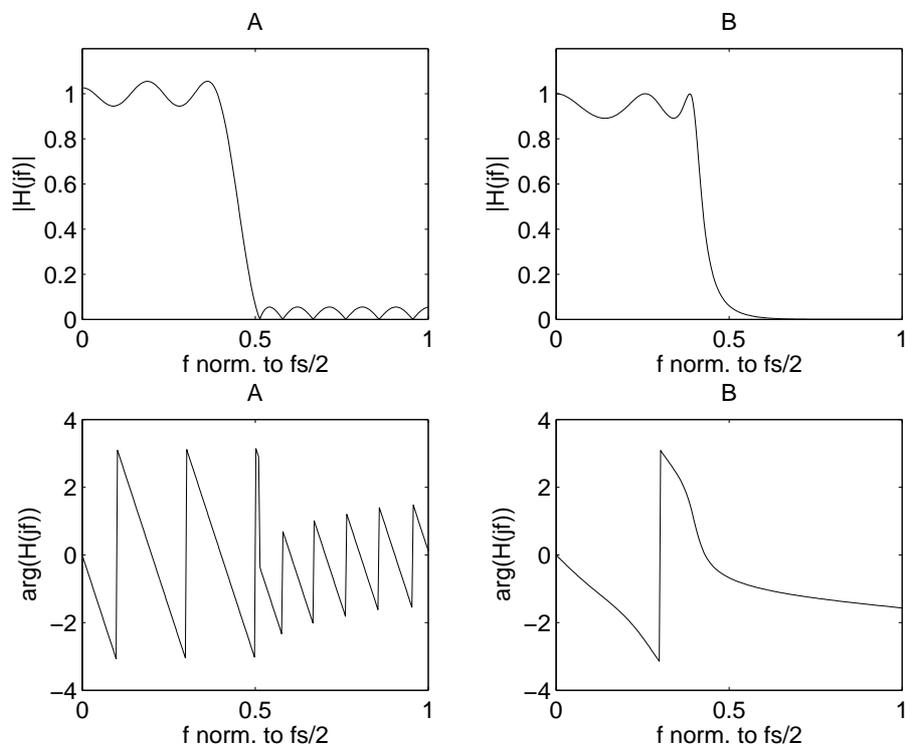
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen $H(z)$ für beide Filter.
- Skizzieren Sie die Pol/Nullstellendiagramme der Filter.
- Welche Filterstruktur würden Sie im aperiodischen Grenzfall (2-facher reeller Pol) bevorzugen?
- Zeichnen Sie die transponierten Filterstrukturen.

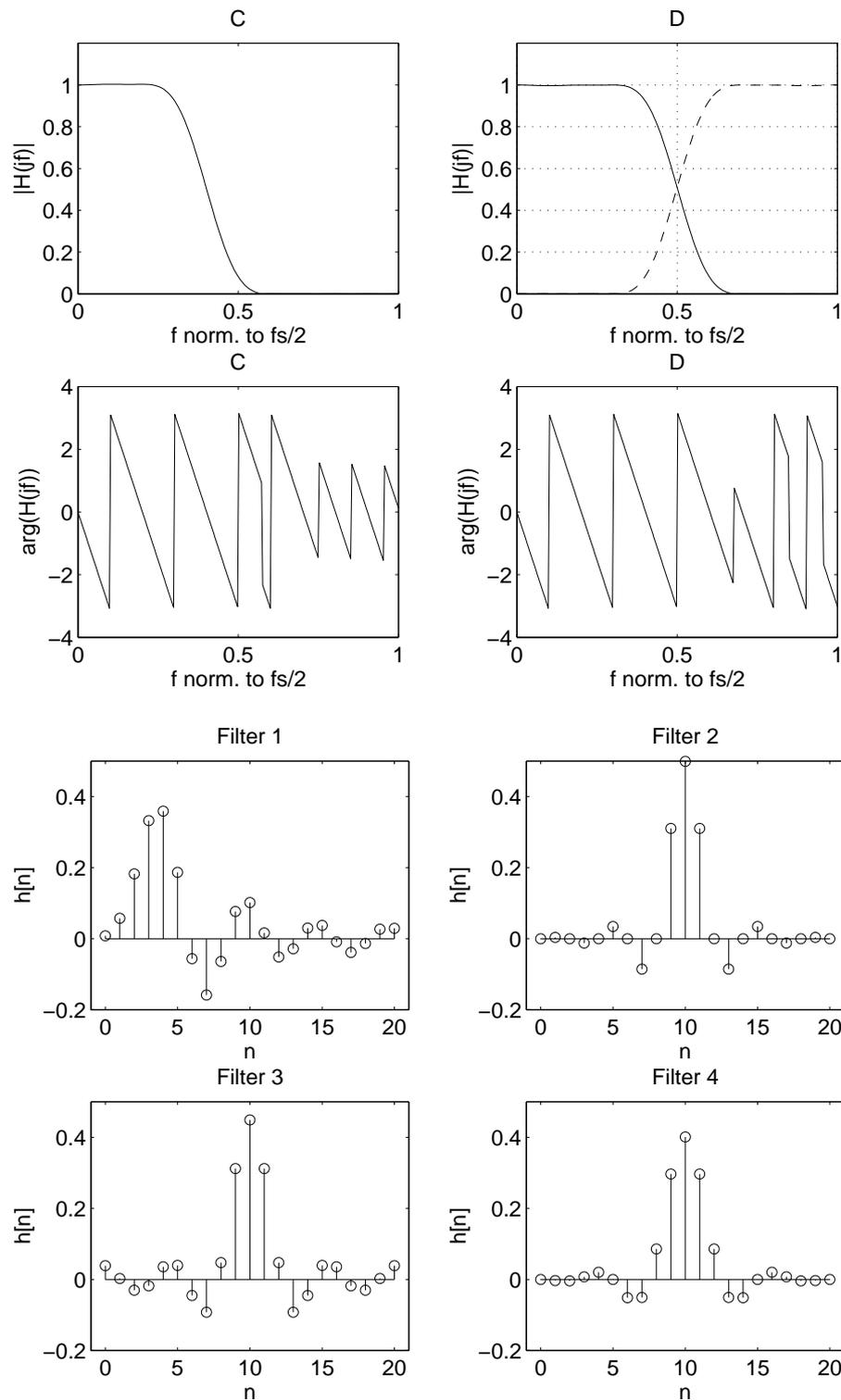
Aufgabe 5.7:

Ein Entwicklungsingenieur hat vor einiger Zeit vier verschiedene digitale Filter entworfen, deren Übertragungsfunktionen in den Abbildungen A - D nach Betrag und Phase vorliegen. (Die Frequenzwerte in den Diagrammen sind normiert auf die halbe Abtastfrequenz. Die gestrichelte Kurve in Abbildung D soll die Symmetrie des Betragsverlaufs andeuten.)

Die entsprechenden Impulsantworten (Abbildungen Filter 1 - 4) sind ebenfalls bekannt, jedoch sind die exakten Zuordnungen zu den vier Übertragungsfunktionen durch Unachtsamkeit leider verloren gegangen. Da der besagte Entwickler bereits das Weite gesucht hat, hinterlässt er Ihnen (als seinem Nachfolger) nun die delikate Aufgabe der richtigen Zuordnung.

Stellen Sie die richtige Zuordnung zwischen den vier Übertragungsfunktionen und Impulsantworten her, indem Sie einfache Überlegungen betreffend die Eigenschaften der gegebenen Übertragungsfunktionen und Impulsantworten anstellen. **Begründen Sie unbedingt Ihre Antworten.**





Aufgabe 5.8:

Von einem digitalen Filter mit reellwertigen Koeffizienten sei die Impulsantwort gegeben:

$$h_1[n] = a^n \sigma[n] - \frac{1}{2} \delta[n].$$

Mit diesem Filter wird nun ein neues Filter mit der Impulsantwort $h[n] = h_1[n] + h_1[-n]$ gebildet.

- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des neuen Filters.
- Bestimmen Sie den Konvergenzbereich und skizzieren Sie das Pol/Nullstellendiagramm von $H(z)$.
- Berechnen und skizzieren Sie Betrags- und Phasenverlauf des Frequenzgangs $H(e^{j\theta})$.
- Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort $a[n]$ des neuen digitalen Filters.

Aufgabe 5.9:

Angenommen Sie wollen ein digitales Bandpassfilter entwerfen und haben nur ein Entwurfsprogramm für digitale Tiefpassfilter zur Verfügung. Für diesen Fall bietet sich folgende Methode an, deren Gültigkeit Sie in diesem Beispiel zeigen sollen. Dabei sei vorausgesetzt, daß das gewünschte Bandpasssystem komplexwertig, der vorhandene Tiefpass jedoch reellwertig ist.

- Zeigen Sie, daß mit $h_{BP}[n] = e^{j\theta_M n} h_{TP}[n]$ aus einem reellen Tiefpass mit der Impulsantwort $h_{TP}[n]$ ein komplexer Bandpass mit der Impulsantwort $h_{BP}[n]$ entsteht. Wie hängt die Bandbreite dieses Bandpassfilters mit der Grenzfrequenz des Tiefpassfilters zusammen?

Skizzieren Sie die Verhältnisse im Frequenzbereich an Hand eines idealisierten Tiefpassfilters.

- Prüfen Sie, ob sich die Sperrdämpfungen und das Verhalten im Durchlassbereich von Tiefpass- und Bandpassfilter unterscheiden.
- Nun sollen Sie den Zusammenhang zwischen den Filterkoeffizienten des Tiefpass- und Bandpassfilters beweisen. Dazu genügt es zu wissen, daß das Tiefpassfilter durch die folgende Differenzgleichung beschrieben werden kann:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

mit $a_0 = 1$. Zeigen Sie, daß auch für das zugehörige Bandpassfilter diese Differenzgleichung gültig ist, wobei lediglich die Filterkoeffizienten a_k , b_k durch

$$\tilde{a}_k = a_k e^{j\theta_M k} \quad \tilde{b}_k = b_k e^{j\theta_M k}$$

zu ersetzen sind.

- Aus dem komplexen Bandpass mit der Impulsantwort $h_{BP}[n]$ aus Punkt a) soll jetzt durch Realteilbildung ein reeller Bandpass mit der Impulsantwort $h_{BP,r}[n]$ gewonnen werden. Was ändert sich an den Aussagen zu den Punkten b) und c)?

Aufgabe 5.10:

Gegeben ist folgendes Analogsignal:

$$x_A(t) = a_0 + a_1 \cos 2\pi f_0 t + a_2 \cos 4\pi f_0 t.$$

- a) Bestimmen Sie die Fourierreihendarstellung für das gegebene Signal.
- b) Nun wird das Analogsignal abgetastet mit der Abtastfrequenz

$$f_s = 2f_0.$$

- b₁) Ist das so erzeugte zeitdiskrete Signal $x[n]$ periodisch?
- b₂) Wenn ja, dann geben Sie die Periode und die Fourierreihendarstellung von $x[n]$ an.
- b₃) Diskutieren Sie, ob Aliasing auftritt oder nicht.
- c) Wiederholen Sie jede einzelne Fragestellung von Punkt b) für die Abtastung von $x_A(t)$ mit der Abtastfrequenz

$$f_s = 6f_0.$$

- d) Entwerfen Sie ein kausales, reellwertiges FIR-Filter, das bei Anregung mit dem zeitdiskreten Signal aus Punkt c) nur die Komponente mit der Grundfrequenz durchlässt.
 - d₁) Wo liegen die Pole und Nullstellen des Filters?
 - d₂) Berechnen Sie die Filterkoeffizienten.
 - d₃) Skizzieren Sie die Impulsantwort des Filters.
 - d₄) Prüfen Sie, ob Ihr Filter einen linearen Phasengang aufweist.

Aufgabe 5.11:

In diesem Beispiel wird ein digitales Hann-Filter untersucht, das folgende Übertragungsfunktion aufweisen soll:

$$H(z) = K \frac{1 - z^{-6}}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})}.$$

- a) Zeichnen Sie das Pol/Nullstellendiagramm für $H(z)$ und beachten Sie dabei eine eventuelle Aufhebung von Pol- und Nullstellen.
- b) Welchen Filtergrad hat das gegebene Filter? Was für ein Filtertyp (Bandpass, Hilberttransformer etc.) liegt vor?
- c) Wie ist der Faktor K zu wählen, damit $H(e^{j0}) = 1$ ist?
- d) Erfinden Sie ein Schaltbild des digitalen Filters mit Addierern, Multiplizierern und Verzögerungselementen.
- e) Zeigen Sie, daß das Hann-Filter auch mit einem FIR-Filter realisiert werden kann und bestimmen Sie die Impulsantwort des Filters.

6 Diskrete Fouriertransformation (DFT) und FFT

Aufgabe 6.1:

Mit dem aperiodischen Signal $x[n]$, dessen Fouriertransformation $X(e^{j\theta})$ ist, wird gemäß

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n + mN]$$

das N -periodische Signal $y[n]$ gebildet. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten c_k der Fourierreihendarstellung von $y[n]$ gegeben sind durch

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right), \quad k = 0 \dots N - 1.$$

Wie hängen diese Koeffizienten c_k mit der N -Punkte DFT $Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ zusammen?

Aufgabe 6.2:

Berechnen Sie die N -Punkte DFT $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ für die folgenden N -Punkte Signale:¹

- a) $x[n] = \delta[n - 5], \quad n = 0 \dots 9 \quad (N = 10)$
- b) $x[n] = \delta[n + 5], \quad n = -9 \dots 0 \quad (N = 10)$
- c) $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{10}n}, \quad n = 0 \dots 19 \quad (N = 20)$
- d) $x[n] = \sigma[n] - \sigma[n - 5], \quad n = 0 \dots 9 \quad (N = 10)$
- e) $x[n] = \alpha^{|n|}, \quad n = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2} - 1 \quad (|\alpha| < 1 \text{ und } N \text{ gerade}).$

Aufgabe 6.3:

$X[k]$ sei die N -Punkte DFT des N -Punkte Signals $x[n]$. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

- a) Aus $x[n] = -x[N - 1 - n]$ folgt $X[0] = 0$.
- b) Ist N gerade und $x[n] = x[N - 1 - n]$, dann ist $X\left[\frac{N}{2}\right] = 0$.

c)
$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2.$$

¹Ein Signal, das nur für N Zeitwerte gegeben ist, wird als N -Punkte Signal bezeichnet, wobei das Zeitintervall, auf dem das Signal gegeben ist, sich üblicherweise von $n = 0$ bis $n = N - 1$ erstreckt.

Aufgabe 6.4:

Gegeben ist das Signal

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n], \quad n = -\infty \dots \infty.$$

Gesucht ist das Signal $y[n]$ der Länge $N = 10$, dessen 10-Punkte DFT gegeben ist durch

$$Y[k] = X(e^{j\frac{2\pi k}{10}}), \quad k = 0 \dots 9.$$

Dabei ist $X(e^{j\theta})$ die Fouriertransformation von $x[n]$.

Aufgabe 6.5:

Von einem kausalen und stabilen System sei die Differenzgleichung gegeben:

$$y[n] = \sum_{m=1}^p a_m y[n-m] + x[n].$$

Nun sollen Sie eine N -Punkte DFT verwenden, um die Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ dieses Systems an N äquidistanten Frequenzpunkten $\theta_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0 \dots N-1$, zu bestimmen. Eine Möglichkeit wäre die Berechnung der Übertragungsfunktion über die Impulsantwort des Systems. Es gibt jedoch eine viel effizientere Methode, die durch Anwenden einer DFT die Übertragungsfunktion direkt aus den Koeffizienten a_m der Differenzgleichung berechnet.

- Finden Sie diese effiziente Methode unter der Annahme $p < N$.
- Kann diese Methode auch für die allgemeine Differenzgleichung

$$y[n] = \sum_{m=1}^p a_m y[n-m] + \sum_{m=0}^q b_m x[n-m]$$

erweitert werden?

Aufgabe 6.6:

Angenommen Sie haben ein Computerprogramm für die Berechnung der DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0 \dots N-1$$

zur Verfügung. Geben Sie zwei Möglichkeiten an, wie Sie dieses Programm auch zur Berechnung der inversen DFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0 \dots N-1$$

verwenden können.

Aufgabe 6.7:

In dieser Aufgabe sollen Sie eine effiziente Methode zur Anwendung der DFT auf reellwertige Signale untersuchen. Standardprogramme zur Berechnung der DFT sind in der Regel so organisiert, dass ein komplexwertiges N -Punkte Signal in das zugehörige komplexwertige N -Punkte Spektrum transformiert wird. Durch die Ausrichtung auf komplexwertige Signale ist die Transformation reellwertiger Signale ineffizient. Wegen der Symmetrieeigenschaften der DFT für reellwertige Signale genügt die Berechnung von $\frac{N}{2}$ Frequenzpunkten (N wird dabei als geradzahlig vorausgesetzt). Daher ist auch nur eine $\frac{N}{2}$ -Punkte DFT notwendig, wobei jedoch das reellwertige N -Punkte Signal $x[n]$ in ein komplexwertiges $\frac{N}{2}$ -Punkte Signal $x_c[n]$ gepackt werden muss. Das kann beispielsweise durch die folgende Aufspaltung des gegebenen reellwertigen Signals $x[n]$ geschehen:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= x[2n] & n = 0 \dots \frac{N}{2} - 1 \\ x_2[n] &= x[2n + 1] & n = 0 \dots \frac{N}{2} - 1 \\ x_c[n] &= x_1[n] + jx_2[n] & n = 0 \dots \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

- Berechnen Sie die N -Punkte DFT $X[k]$ des reellwertigen Signals $x[n]$ aus der $\frac{N}{2}$ -Punkte DFT $X_c[k]$ des komplexwertigen Signals $x_c[n]$. Geben Sie die Symmetrieeigenschaften von $X[k]$ an. Wie kann der spezielle Wert $X[\frac{N}{2}]$ berechnet werden?
- Für die Berechnung einer (komplexwertigen) N -Punkte DFT seien näherungsweise $N \log_2 N$ Arithmetikoperationen notwendig. Wieviele Operationen benötigt dann die hier untersuchte Methode? Welcher Geschwindigkeitssteigerungsfaktor ergibt sich daraus für $N = 1024 = 2^{10}$?

Aufgabe 6.8:

Das Zeitsignal $x[n]$ sei ein N -Punkte Signal, d.h. $x[n]$ ist nur für $n \in [0, N-1]$ gegeben. Bei der Berechnung der diskreten Fouriertransformation (DFT) $X[k]$ werden normalerweise nur die N gegebenen Signalwerte verwendet, um daraus die DFT für Frequenzpunkte $k = 0, 1, \dots, N-1$ zu berechnen. Möchte man mehr Frequenzpunkte als Zeitpunkte haben, so kann man z.B. das Zeitsignal künstlich verlängern.

In diesem Beispiel sollen Sie untersuchen, wie sich diese Vorgehensweise auf die DFT auswirkt. Dazu werden zwei Fälle betrachtet:

Fall 1: An das gegebene Signal $x[n]$ werden N Nullen angefügt, so dass das Signal

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq 2N-1 \end{cases}$$

entsteht.

Fall 2: Das Signal wird einfach dupliziert:

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n] & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ x[n-N] & n = N, N+1, \dots, 2N-1 \end{cases} .$$

In beiden Fällen wird das ursprüngliche Signal auf die doppelte Länge erweitert.

- Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen der DFT $X[k]$ des ursprünglichen Signals $x[n]$ und der DFT $X_1[k]$ von $x_1[n]$ bzw. der DFT $X_2[k]$ von $x_2[n]$.
- An welchen Frequenzpunkten k stimmt die DFT des ursprünglichen Signals mit jener des jeweiligen erweiterten Signals überein?
- Welche Methode sollte man in der Anwendung vorziehen? (Begründung!)

Aufgabe 6.9:

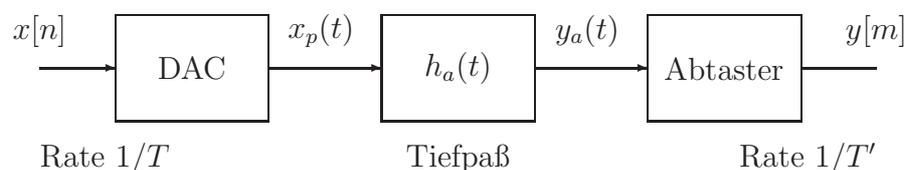
Gegeben ist ein (zeitdiskretes) Signal $x[n] = \delta[n] - \delta[n - 3]$.

- Berechnen Sie die Fouriertransformation $X(e^{j\theta})$ des zeitdiskreten Signales.
- Tasten Sie nun dieses (kontinuierliche) Spektrum ab $X[k] = X(e^{j\theta})|_{\theta=\frac{2\pi}{N}k}$ für $N = 4$.
- Setzen Sie $x[n]$ periodisch fort, sodass ein periodisches Signal mit Periode 4 entsteht (s. Glg. 7.6 im Skriptum). Berechnen Sie von diesem die Fourierkoeffizienten.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen $X[k]$ und den c_k ?
- Führen Sie nun die Abtastung von $X(e^{j\theta})$ mit einem anderen Wert für N durch und verwenden Sie den gleichen Wert von N für die periodische Fortsetzung von $x[n]$ und die Berechnung der Fourierreihenoeffizienten.

7 Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung

Aufgabe 7.1:

In der digitalen Audiotechnik werden Taktratenumsetzer zur Anpassung der unterschiedlichen Abtastraten benötigt. Bei älteren Taktratenumsetzern wird das digitalisierte Audiosignal zunächst in ein analoges Zwischensignal umgewandelt. Danach erfolgt durch Abtastung mit der gewünschten Ausgangstaktrate die Rückwandlung in ein zeitdiskretes Signal. Durch den analogen Umweg kommt es jedoch zu Qualitätseinbußen, so dass neuere Taktratenumsetzer vollkommen digital arbeiten. Trotzdem ist der hybride Taktratenumsetzer ein wichtiges System, da sich die grundlegenden Beziehungen für Mehrfachtaktsysteme einfach daraus ableiten lassen.



Mit dem idealisierten D/A-Wandler wird $x[n]$ in einen analogen δ -Puls

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT).$$

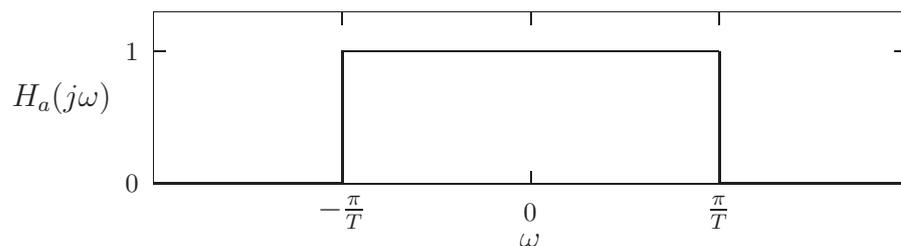
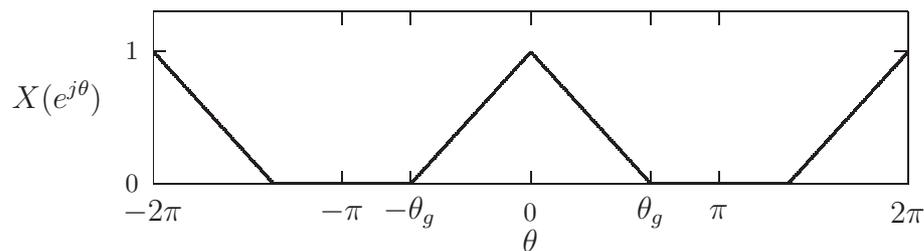
umgesetzt. Aus diesem δ -Puls wird mit dem nachgeschalteten analogen Interpolationsfilter ein glattes Analogsignal $y_a(t)$ erzeugt, das mit der Rate $\frac{1}{T'}$ abgetastet wird.

- a) Zeigen Sie, dass der gesamte abgebildete Taktratenumsetzer durch die folgende Eingangs/Ausgangsbeziehung beschrieben werden kann:

$$y[m] = y_a[mT'] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_a(mT' - nT)$$

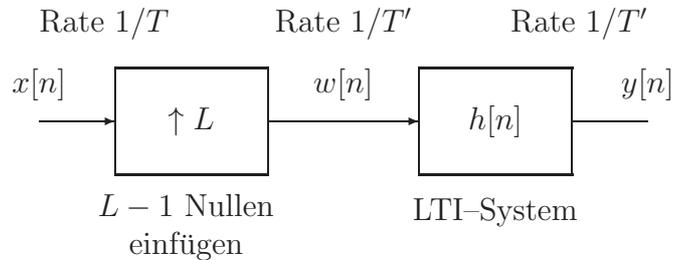
mit der Eingangstaktrate $\frac{1}{T}$ und der Ausgangstaktrate $\frac{1}{T'}$.

- b) Ist das Gesamtsystem zeitinvariant?
- c) Spezialisieren Sie die Eingangs/Ausgangsbeziehung für den Fall der Taktraten-
erhöhung um den ganzzahligen Faktor $L = \frac{T}{T'}$ und für die Taktratenreduktion um
den ganzzahligen Faktor $M = \frac{T'}{T}$.
- d) Skizzieren Sie die Spektren der Signale $x_p(t)$ und $y[m]$ für das abgebildete Eingangs-
signalspektrum $X(e^{j\theta})$ und die Übertragungsfunktion des analogen Interpolations-
filters $H_a(j\omega)$. Dabei wählen Sie eine Taktraten-erhöhung um den Faktor $L = 3$.



Aufgabe 7.2:

Die Taktratenerhöhung um den ganzzahligen Faktor L kann man durch Einfügen von $L - 1$ Nullen zwischen zwei Abtastwerten des Eingangssignals erzeugen. Durch Filterung mit einem LTI-System wird danach eine Interpolation durchgeführt:



- a) Zeigen Sie, dass das abgebildete System die folgende Eingangs/Ausgangsbeziehung aufweist:

$$y[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h[m - Ln].$$

- b) Berechnen Sie die Antworten des Gesamtsystems für

b₁) $x[n] = \delta[n - n_0]$

b₂) $x[n] = \cos \frac{2\pi}{N}n$.

Dabei verwenden Sie für $h[m]$ die Impulsantwort eines idealisierten Tiefpassfilters mit der Grenzfrequenz $\theta_g = \frac{\pi}{L}$.

- c) Das Einfügen von Nullen ist aus der Sicht der Implementierung ineffizient, da das Filter — besonders bei großen Werten von L — viele Nullen verarbeiten muss. Abhilfe schafft eine alternative Formulierung der Eingangs/Ausgangsbeziehung:

$$y[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x \left(\left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor - k \right) h[m \oplus L + kL]$$

(Dabei liefert $\lfloor q \rfloor$ die größte ganze Zahl die kleiner oder gleich q ist, \oplus repräsentiert die Modulooperation.)

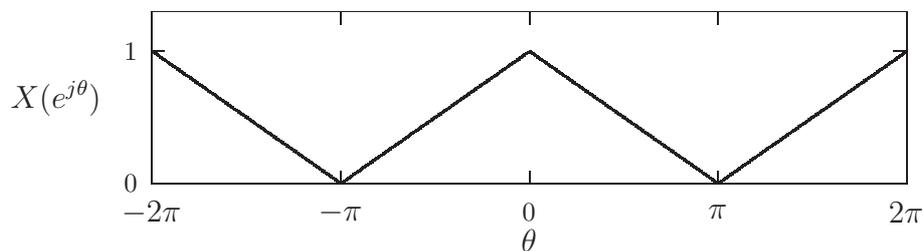
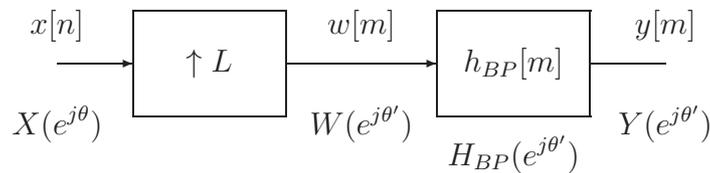
Zeigen Sie, dass man diese Beziehung mit Hilfe der Substitution $n = \lfloor \frac{m}{L} \rfloor - k$ aus der ursprünglichen Eingangs/Ausgangsbeziehung erhält.

Versuchen Sie, die Wirkungsweise der neuen Beziehung für den Fall, dass $h[m]$ nur in $[0, N - 1]$ von Null verschieden ist, als FIR-Filter mit zeitvarianten Koeffizienten zu interpretieren. Die Länge N von $h[m]$ ist dabei ein Vielfaches von L .

Aufgabe 7.3:

Das abgebildete takratenumsetzende System soll mit dem gegebenen Eingangssignalspektrum $X(e^{j\theta})$ im Frequenzbereich untersucht werden. Beim Bandpassfilter handelt

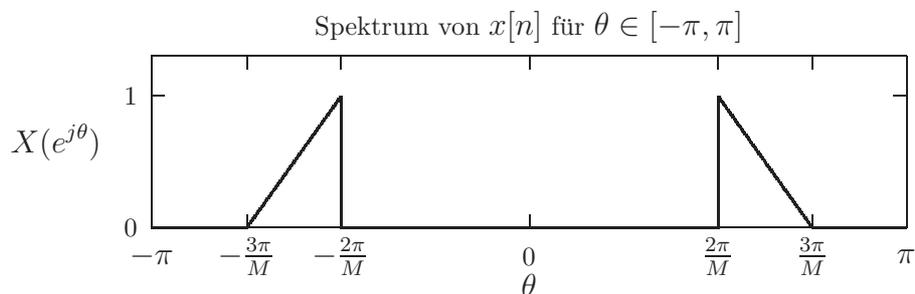
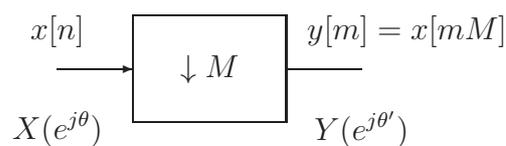
es sich um ein LTI-System, das im Frequenzbereich von $\theta' = 0$ bis $\theta' = \pi$ nur Signalkomponenten im Frequenzintervall $[\frac{3\pi}{L}, \frac{5\pi}{L}]$ unverändert hindurchlässt, alle anderen Komponenten jedoch unterdrückt.



- Skizzieren Sie die Spektren $W(e^{j\theta'})$ und $Y(e^{j\theta'})$ für $L = 6$.
- Berechnen Sie das Ausgangssignal $y[m]$ des Gesamtsystems.

Aufgabe 7.4:

Mit dem abgebildeten System wird ein Bandpasssignal unterabgetastet.



- Skizzieren Sie das Ausgangssignalspektrum $Y(e^{j\theta'})$ für $M = 4$.
- Berechnen Sie das Ausgangssignal $y[m]$.

Aufgabe 7.5:

In dieser Aufgabe wird das Prinzip der Polyphasenfilter untersucht. Diese Filterstrukturen ermöglichen die Realisierung sehr effizienter Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung.

- a) Zeigen Sie zunächst, dass jede Übertragungsfunktion

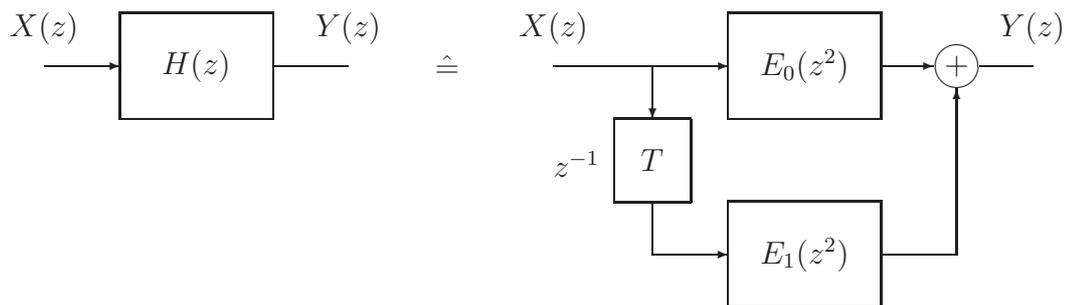
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

in zwei so genannte Polyphasenfilter mit den Übertragungsfunktionen $E_0(z^2)$ und $E_1(z^2)$ zerlegt werden kann, wobei

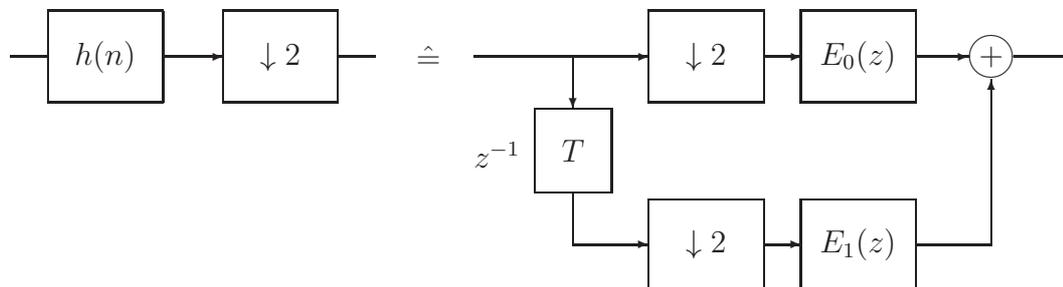
$$E_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[2n]z^{-n}$$

$$E_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[2n+1]z^{-n}$$

ist.



- b) Wenden Sie diese Zerlegung auf das Filter bei der Dezimation um den Faktor $M = 2$ an und beweisen Sie folgende Korrespondenz:



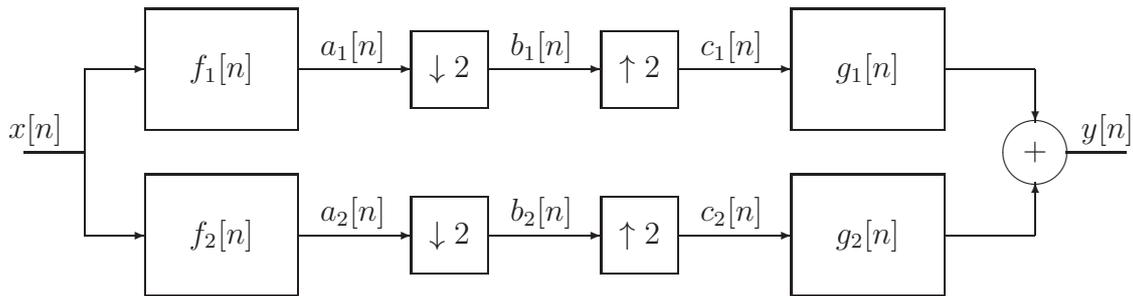
Welchen Vorteil besitzt die rechte Filterstruktur?

- c) Können Sie das Polyphasenprinzip auch auf die Interpolation um den Faktor $L = 2$ anwenden? (Hinweis: Versuchen Sie dazu, die alternative Zerlegung (Verzögerungselement am Ausgang) zu jener von Punkt a) zu finden.)

Aufgabe 7.6:

In diesem Beispiel können Sie die Grundlagen einer so genannten *Quadrature Mirror Filter Bank* (QMF-Bank) untersuchen. Diese Systeme werden zum Beispiel für die Audiodatenkompression bei der *Digital Compact Cassette* (DCC) und beim MPEG-Verfahren eingesetzt. Dabei handelt es sich um mehrfachtaktverarbeitende Systeme, die das Eingangssignal in mehrere Teilbandsignale aufspalten und daraus trotz Taktratenumsetzung das ursprüngliche Signal wiedergewinnen.

Die Struktur der einfachsten QMF-Bank zeigt die folgende Abbildung:



- a) Berechnen Sie allgemein den Zusammenhang zwischen dem Spektrum des Eingangssignals und jenem des Ausgangssignals.

Hinweis: Falls Sie die Zusammenhänge zwischen den Ein- und Ausgangsspektren der Taktratenumsetzer ($\downarrow 2$ gefolgt von $\uparrow 2$) nicht wissen, so können Sie viel Zeit sparen, wenn Sie sich zunächst die Funktion der Taktratenumsetzer im Zeitbereich überlegen und danach die Beziehung im Zeitbereich in den Frequenzbereich transformieren.

- b) Welche Bedingungen müssen die Filter $F_{1,2}(z) \xleftrightarrow{z^T} f_{1,2}[n]$ und $G_{1,2}(z) \xleftrightarrow{z^T} g_{1,2}[n]$ erfüllen, damit das Gesamtsystem wie ein LTI-System wirkt?

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des resultierenden LTI-Systems als Funktion von $F_{1,2}(z)$ und $G_{1,2}(z)$.

- c) Geben Sie Bedingungen für die Filter $F_{1,2}(z)$ und $G_{1,2}(z)$ an, für die das Gesamtsystem wie eine Durchverbindung wirkt, d.h. das Ausgangsspektrum ist gleich dem Eingangsspektrum (abgesehen von einer eventuellen linearen Phase).

8 MATLAB-Beispiele

Die folgenden Aufgaben sind in erster Linie mit MATLAB zu lösen. Natürlich sollten die Ergebnisse – sofern möglich – mit einer händischen Analyse kontrolliert werden, um Fehlinterpretationen durch numerische Effekte zu vermeiden. Diese Effekte äußern sich z.B. in der Verletzung von Symmetrien, winzigen Imaginärteilen oder Rundungsfehlern bei trigonometrischen Funktionen. Verwenden Sie z.B. für π in MATLAB immer pi und nicht eine Schmalpurversion wie 3.1416. Beachten Sie, daß Spektren nur an diskreten

Frequenzpunkten ausgewertet werden und dadurch, speziell bei Linienspektren, sowohl im Verhalten, als auch in der graphischen Darstellung Artefakte auftreten können. Beispielsweise können Maxima und Minima von Spektren mit scharfen Resonanzen oder Sperrstellen meistens nur ungenau graphisch dargestellt werden. Bedenken Sie auch, daß Ihr Bildschirm nur eine endliche Auflösung hat!

Das Auffinden der Nullstellen von Polynomen kann ebenfalls numerische Probleme bereiten, insbesondere dann, wenn mehrfache oder eng benachbarte Nullstellen vorliegen. Diese Effekte sind in erster Linie beim Filterentwurf und bei Pol/Nullstellendiagrammen zu berücksichtigen. Bei der numerischen Lösung von Differenzgleichungen kann sich in kritischen Fällen eine Fehlerfortpflanzung bemerkbar machen, so daß z.B. der eingeschwungene Zustand markant vom erwarteten Verlauf abweicht. Da man mit der \mathcal{Z} -Transformation Endzustände sehr leicht berechnen kann, sollte eine solche Kontrolle stets durchgeführt werden.

Abschließend sei erwähnt, daß natürlich auch "kleine" Programmierfehler zu erheblichen Abweichungen führen können. Dabei handelt es sich meistens um eine falsche Indexverwendung bei Vektoren. Ein typisches Beispiel: Vektorindizes beginnen in MATLAB stets bei 1, Signale z.B. bei 0 oder bei negativen Zeitindizes. Das muß bei der Programmierung von Faltungssummen oder bei der Zeitverschiebung von Signalen beachtet werden.

Die komplette MATLAB-Dokumentation finden Sie unter

<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/helpdesk.shtml>

Als Einführung für beginnende MATLAB-Spezialisten sind insbesondere

http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/learn_matlab/learn_matlab.shtml

und Programmiertipps in

<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/matlab.shtml>

zu empfehlen.

8.1 Signalabtastung, Rekonstruktion und Quantisierung

Aufgabe 8.1:

Schreiben Sie MATLAB-Funktionen, mit denen die Effekte bei der Abtastung und Rekonstruktion analoger Signale demonstriert werden können. Verifizieren Sie das Abtasttheorem für Tiefpass- und Bandpasssignale. Vergleichen Sie die Rekonstruktion von analogen Signalen aus den Abtastwerten für verschiedene Interpolationsfilter (Sample-Hold, lineare Interpolation, Lagrangesche Interpolation, Approximation eines idealisierten Tiefpass mit einem FIR-Filter). Veranschaulichen Sie die Effekte im Zeit- und Frequenzbereich. Messen Sie die Fehler (energiemäßig oder in Form eines Signal-Rausch-Verhältnisses) bei Abtastung und Rekonstruktion.

Aufgabe 8.2:

Heute werden fast ausschließlich nur mehr Digitalspeicheroszilloskope mit LCD/TFT-Bildschirmen zur Signaldarstellung verwendet. Im Gegensatz zu analogen Geräten mit Kathodenstrahlröhren ergeben sich dabei am Bildschirm im Allgemeinen keine schönen glatten Signale. Aus diesem Grund kann man für spezielle Signale eigene Interpolationsmethoden zur Signaldarstellung verwenden. Entwickeln Sie mit MATLAB Methoden, mit denen sinus- rechteck- und dreieckförmige Signale ohne sichtbare Rekonstruktionsfehler dargestellt werden können. Versuchen Sie die Signalform automatisch zu detektieren bzw. die Interpolationsart auszuwählen.

Aufgabe 8.3:

Es soll ein Amplitudenquantisierer mit MATLAB programmiert werden, der Gleitkommazahlen $x \in [-1, 1]$ in Zahlen mit einer vorgegebenen Wortlänge von N Bits quantisiert. Folgende Quantisiererennlinien sollen implementiert werden:

$$x_Q = Q(x) = \begin{cases} \Delta \lfloor \frac{x}{\Delta} + 0.5 \rfloor & \text{Zweierkomplementrunden} \\ \Delta \lfloor \frac{x}{\Delta} \rfloor & \text{Zweierkomplementschneiden} \\ \text{sign}(x) \Delta \lfloor \frac{|x|}{\Delta} \rfloor & \text{Betragschneiden} \end{cases}$$

In diesen Beziehungen ist $\lfloor \cdot \rfloor$ die Floor-Funktion (größte ganze Zahl kleiner-gleich dem Argumentwert) und $\Delta = 2^{-N+1}$ die Auflösung der Quantisierung mit N Bits. Untersuchen Sie den Quantisierungsfehler für verschiedene Signale $x[n]$ und Wortlängen von $N = 1$ bis $N = 24$. Messen Sie die Energie des Quantisierungsfehlers in Abhängigkeit von N . Zeichnen Sie mit der MATLAB-Funktion `hist()` das Histogramm des Quantisierungsfehlers in Abhängigkeit von N . Verwenden Sie dazu Zufallszahlen $x[n]$ (MATLAB-Funktionen `randn()`) zur Aussteuerung der Kennlinien.

Aufgabe 8.4:

In diesem Beispiel soll die Abtastung eines *zeitkontinuierlichen* Signales betrachtet werden, welches durch

$$x(t) = \sin(\omega_0 t)$$

gegeben ist.

- Zuerst wird das Signal $x(t)$ abgetastet, d.h. es wird das *zeitdiskrete* Signal $x[n] = x(nT_s) = \sin(\omega_0 nT_s)$ gebildet, wobei T_s die Abtastrate ist. Wählen Sie ω_0 und T_s so, dass kein Aliasing auftritt!
- Berechnen Sie von dem Signal nun die FFT und stellen Sie diese graphisch dar (Wählen Sie ω_0 und T_s so, dass $x[n]$ mehrere Perioden der Schwingung enthält).

Durch Ungenauigkeiten bei der Abtastung wird das Signal $x(t)$ nicht exakt zu den Zeitpunkten nT_s abgetastet, sondern zufällig etwas früher oder später. Wir modellieren diesen Abtastfehler, indem die Abtastung zum Zeitpunkt $nT_s + \Delta_n$ stattfindet. Dabei ist Δ_n eine Zufallszahl, die in einem Intervall $\mathcal{I} = [-\alpha/2; \alpha/2]$ gleichverteilt ist. Das (fehlerhaft) abgetastete Signal hat daher folgende Form $x_{se}[n] = x(nT_s + \Delta_n)$.

- Tasten Sie das Signal $x(t)$ mit Abtastfehler ab und stellen Sie $x(t)$ und $x_{se}[n]$ für unterschiedliche Werte von ω_0 und α dar. Berechnen Sie den Fehler $\sum (x_{se}[n] - x[n])^2$, der durch den Abtastfehler entsteht und stellen Sie dessen Abhängigkeit von ω_0 und α dar.
- Berechnen Sie die FFT von $x_{se}[n]$ und vergleichen Sie diese mit der FFT von $x[n]$.
- Erweiterung: Verwenden Sie das Signal $x(t) = \sin(\omega_0 t) + \sin(\omega_1 t)$. Untersuchen Sie speziell, bis zu welchem Samplingfehler α die beiden Schwingungen in der FFT unterschieden werden können.

Hinweise

- Eine gleichverteilte Zufallszahl im Intervall $\mathcal{I} = [-\alpha/2; \alpha/2]$ erhalten Sie in Matlab mit `deltan = -alpha/2+alpha*rand(1,1)`.
- Um aussagekräftige Resultate zu erhalten, sollten Sie mindestens 100–1000 Samples zu Verfügung haben - Wählen Sie daher die Signallängen entsprechend!

8.2 Signalerzeugung

Aufgabe 8.5:

Erzeugen Sie mit MATLAB verschiedene periodische Signale. Verwenden Sie dazu die Modulooperation, um periodische Fortsetzungen eines Signalsegments zu erzeugen. Schreiben Sie weiters ein Programm, das die Fourierkoeffizienten berechnet und stellen Sie diese graphisch dar.

Aufgabe 8.6:

Messen Sie Effektivwert, arithmetischer Mittelwert und Crest-Faktor (Verhältnis Spitzenwert zu Effektivwert) der in Aufgabe 8.5 erzeugten Signale. Kontrollieren Sie die Ergebnisse durch Berechnung dieser Signalkenngrößen.

Aufgabe 8.7:

Demonstrieren Sie mit MATLAB das Gibbsche Phänomen, indem Sie immer mehr Oberwellen einer periodischen Rechteckschwingung bei der Fourierreihendarstellung berücksichtigen.

Aufgabe 8.8:

Verifizieren Sie numerisch das Parsevalsche Theorem für verschiedene periodische Signale. Hinweis: Die Fourierkoeffizienten können Sie etwa durch direkte Programmierung der Formel oder (schneller) mit der MATLAB-Funktion `fft()` bestimmen.

Aufgabe 8.9:

Erzeugen Sie zwei periodische Signale und berechnen Sie mit MATLAB deren Fourierreihenoeffizienten. Nun bilden Sie das Produkt dieser Signale (welche Periode hat dieses?)

und bestimmen Sie wieder die Fourierreihenkoeffizienten. Kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie das Signalprodukt aus den Fourierreihenkoeffizienten synthetisieren. Hinweis: Überlegen Sie sich die Verwendung der MATLAB-Funktion `conv()`.

Aufgabe 8.10:

Erzeugen Sie ein verzerrtes Sinussignal mit einer Grundfrequenz von 400 Hz bei einer Abtastrate von 32000 Hz. Der Klirrfaktor soll einstellbar sein im Bereich von 0.1% bis 20%. Ab welchem Klirrfaktor hören Sie die harmonischen Verzerrungen?

Aufgabe 8.11:

Ein Chirp-Signal (oder Sweep) ist ein sinusförmiges Signal, dessen Momentanfrequenz linear in einem Zeitintervall verändert wird. Im zeitdiskreten Fall hat es z.B. die Form

$$x[n] = \sin \varphi[n] = \sin \alpha n^2, \quad 0 \leq n < N.$$

Bestimmen Sie die Momentanfrequenz für verschiedene Werte von α und stellen Sie diese graphisch dar! Wie ist der Parameter α zu wählen, damit sich die Momentanfrequenz $\theta[n]$ von $x[n]$ über den Frequenzbereich von 0 bis π (halbe Abtastfrequenz) erstreckt? Wie muß α bei einem komplexwertigen Chirp

$$x[n] = e^{j\alpha n^2}, \quad 0 \leq n < N$$

gewählt werden?

Hinweis: Die Momentanfrequenz sei definiert durch $\theta[n] = \varphi[n+1] - \varphi[n]$. Wird α richtig gewählt, dann tritt kein Aliasing auf! Diesen Sachverhalt können Sie sich auch mit der MATLAB-Funktion `specgram()` veranschaulichen.

Aufgabe 8.12:

In diesem Beispiel soll die Signalerzeugung mit Hilfe von Differenzgleichungen untersucht werden.

- a) Erzeugen Sie mit MATLAB ein Signal der Form $x[n] = A \sin(\theta_0 n + \varphi)$, $n \geq 0$ mit der Differenzgleichung

$$a_2 x[n-2] + a_1 x[n-1] + a_0 x[n] = 0.$$

Wie müssen die Koeffizienten der Differenzgleichung und die Anfangsbedingungen gewählt werden, um Sinussignale mit vorgegebenen Parametern a , θ_0 und φ zu erzielen?

- b) Verwenden Sie die (nichtlinearen) Differenzgleichungen

$$\begin{aligned} u[n+1] &= cu[n] \\ x[n+1] &= u[n+1]x[n], \end{aligned}$$

um das gaußförmige Signal $x[n] = e^{-\alpha n^2}$, $n \geq 0$ zu generieren. Erzeugen Sie mit diesen Differenzgleichungen auch ein komplexes Chirpsignal $x[n] = e^{j\alpha n^2}$, $n \geq 0$.

Wie genau sind die mit den Differenzgleichungen erhaltenen Lösungen?

8.3 Signaloperationen

Aufgabe 8.13:

Eine einfache Glättung von Signalen erfolgt beispielsweise durch den folgenden Mittelwertbildner:

$$y[n] = \frac{1}{3} (\alpha_1 x[n-1] + x[n] + \alpha_2 x[n+1]).$$

Implementieren Sie dieses einfache System für verschiedene Werte von $\alpha_{1,2}$ mit MATLAB und wenden Sie es auf einfache Signale an. Beachten Sie eventuelle Randeffekte am Beginn und Ende der Signale. Berechnen Sie weiters den Frequenzgang des Systems und berechnen Sie das Ausgangssignal im Frequenz- und im Zeitbereich.

Aufgabe 8.14:

Bestimmen Sie die Ausgangssignale folgender Systeme mit Zeitumkehr:

a) $y[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x^*[-n]).$

b) $y[n] = \sum_{k=n-10}^n x[k]x^*[-k]$

Verwenden Sie dazu auch einfache komplexwertige Signale!

Aufgabe 8.15:

Bestimmen Sie für $x[n] = \cos \theta_0 n \sigma[n]$ das Signal

$$y[n] = x^2[n] - x[n-1]x[n+1]$$

für verschiedene Werte der Frequenz θ_0 . Wie wirkt sich ein Gleichanteil k auf $y[n]$ aus, d.h. wenn $x[n] = \cos \theta_0 n + k$ ist?

Aufgabe 8.16:

Für $x[n] = \sin \frac{2\pi}{100} (n - n_0) \sigma[n - n_0]$ bestimmen Sie

$$y[n] = x[5n]$$

in Abhängigkeit von der Zeitverzögerung $0 \leq n_0 \leq 5$.

8.4 Zeitdiskrete Systeme im Zeitbereich

Aufgabe 8.17:

Die Impulsantwort eines LTI-Systems sei

$$h[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 0.25^n & 0 \leq n < 10 \\ 0 & n \geq 10 \end{cases}$$

Verwenden Sie die Faltungsbeziehung (MATLAB-Funktion `conv()`) zur Bestimmung der Systemantworten für folgende Eingangssignale:

- a) $x[n] = \sigma[n]$
 b) $x[n] = \sigma[-n]$
 c) $x[n] = \sigma[n] + \sigma[-n + 10] - 1$
 d) $x[n] = \sigma[n + 10]\sigma[-n + 10]$
 e) $x[n] = 0.25^n \sigma[n]$.

Aufgabe 8.18:

Ein System bestehe aus der Kettenschaltung zweier LTI-Systeme mit den Impulsantworten

$$h_1[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad h_2[n] = \sin \frac{2\pi}{20} n \sigma[n]$$

Bestimmen Sie mit MATLAB die Antwort $y[n]$ des Gesamtsystems auf das Eingangssignal $x[n] = \sin \frac{2\pi}{20} n$, $0 \leq n < 200$. Vertauschen Sie die Reihenfolge der Teilsysteme und bestimmen Sie erneut $y[n]$. Gibt es Unterschiede zwischen den beiden Antworten?

Aufgabe 8.19:

Ein System, das ein diskretes Echo erzeugt habe die Impulsantwort

$$h[n] = \delta[n] + \alpha \delta[n - N].$$

Die Echoverzögerungszeit N soll mit der Autokorrelationsfunktion $R_{yy}[n] = y[n] * y[-n]$ des Systemausgangssignals $y[n]$ gemessen werden. Experimentieren Sie mit verschiedenen Systemeingangssignalen $x[n]$ unterschiedlicher Länge N_x , um die Echoverzögerungszeit N zu bestimmen. Variieren Sie dabei die Parameter α und N_x . Sie können auch Zufallssignale für $x[n]$ verwenden (MATLAB-Funktion `randn()`).

Aufgabe 8.20:

Es soll ein System zur Echoentzerrung untersucht werden. Dazu wird zum System von Aufgabe 8.19 ein System in Kette geschaltet, das durch die folgende Differenzgleichung charakterisiert ist:

$$y_e[n] + \alpha y_e[n - N] = y[n]$$

($y_e[n]$ ist das Ausgangssignal bzw. $y[n]$ das Eingangssignal des Echoentzerrers.)

Für eine erste Version Ihrer Lösung können Sie N und α als bekannt voraussetzen. In einer zweiten Version versuchen Sie zuerst N und α anhand des Signals mit Echo zu schätzen. Dann verwenden Sie diese Schätzwerte zur Echoentzerrung. Untersuchen Sie die Einflüsse von Schätzfehlern auf das Ergebnis der Echoentzerrung.

Aufgabe 8.21:

In diesem Beispiel soll die Anwendung eines Entzerres zur Unterdrückung von Echos untersucht werden. Das verwendete Echomodell hat die Form

$$h[n] = \delta[n] + \alpha \delta[n - N_0],$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ die Stärke und $N_0 \in \mathbb{N}$ die Verzögerung des Echos angeben.

- Bestimmen Sie den Frequenzgang obigen Systems für verschiedene Werte von α und N_0 .
- Entwerfen Sie ein System, das die Wirkung des Echos komplett kompensiert (welche Eigenschaft hat die Sprungantwort dieses Systems?), implementieren Sie diesen Entzerrer in Matlab (mit hinreichender Länge) und bestimmen Sie die Impulsantwort des Gesamtsystems (Echo + Entzerrer) und auf Eingangssignale Ihrer Wahl.
- In einer praktischen Implementierung wird man die Impulsantwort obigen Entzerrers nach N Samples abschneiden. Welchen Einfluss hat dieses Abschneiden auf die Impulsantwort des Gesamtsystems? Überprüfen Sie den Effekt für $N_0 = 1$ auch rechnerisch!
- Sie können mit `waveread` und `wavewrite` Wavefiles lesen bzw. schreiben. Überprüfen Sie den Effekt Ihres Echosystems und Entzerrers an einem Audiosignal!

Aufgabe 8.22:

Gegeben sind zwei einfache digitale Filter zur Unterdrückung von Störsignalen. Beide Systeme sind durch Differenzgleichungen beschrieben:

$$\text{System I: } y[n] = 0.5x[n] + 0.27x[n-1] + 0.77x[n-2]$$

$$\text{System II: } y[n] - 0.53y[n-1] + 0.46y[n-2] = 0.45x[n] + 0.5x[n-1] + 0.45x[n-2]$$

Das Eingangssignal der Länge $N = 300$ ist eine Überlagerung zweier Sinussignale:

$$x[n] = \cos \frac{2\pi 20}{256}n + \cos \frac{2\pi 200}{256}n \quad 0 \leq n < N,$$

wobei die höherfrequente Komponente der Störterm sei.

Welches der beiden Systeme liefert die bessere Störsignalunterdrückung? Bestimmen Sie die Systemantworten für das Chirp-Signal

$$x[n] = \cos \frac{\pi}{2N-1} n^2 \quad 0 \leq n < N$$

und versuchen Sie die Ergebnisse zu interpretieren.

Hinweis: Differenzgleichungen können Sie mit der MATLAB-Funktion `filter()` implementieren.

Aufgabe 8.23:

In dieser Aufgabe soll ein vereinfachtes Prinzip der DPCM (Differenz Pulse Code Modulation) mit MATLAB untersucht werden. Bei diesem Verfahren der Amplitudenquantisierung von Signalen reicht in der Regel eine geringere Wortlänge N zur Signaldarstellung aus, verglichen mit der normalen Quantisierung (siehe Aufgabe 8.3). Dabei wird nicht das Signal $x[n]$, sondern das Signal $w[n] = x[n] - ax[n-1]$ mit einer der Kennlinien $\mathcal{Q}(\cdot)$

von Aufgabe 8.3 quantisiert. Nach der Quantisierung wird der Einfluß der Differenzbildung durch ein inverses Filter kompensiert. Mit $w_Q[n] = \mathcal{Q}(w[n])$ erhält man damit das quantisierte Signal

$$x_Q[n] = ax_Q[n-1] + w_Q[n].$$

Implementieren Sie diese Form der DPCM mit MATLAB und bestimmen Sie für verschiedene Signale die Quantisierungsfehler in Abhängigkeit von a und der Wortlänge N .

8.5 Zeitdiskrete Systeme im Frequenzbereich und \mathcal{Z} -Bereich

Aufgabe 8.24:

Die Impulsantwort eines zeitdiskreten idealisierten Tiefpassfilters ist bekanntlich

$$h[n] = \frac{\sin \theta_g n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Approximieren Sie dieses Filter, indem Sie die Impulsantwort zeitlich begrenzen und bestimmen Sie mit der MATLAB-Funktion `freqz()` den Betrags- und Phasenverlauf des Frequenzgangs. Versuchen Sie die Abweichungen vom idealen Verlauf zu erklären.

Aufgabe 8.25:

Verwenden Sie $h[n]$ Ihres approximierten Tiefpassfilters von Aufgabe 8.24 zur Darstellung folgender Systeme im Frequenzbereich:

a) $h_1[n] = (-1)^n h[n]$

b) $h_2[n] = h[n] \cos \frac{\pi}{2} n$

c) $h_3[n] = h[n] \sigma[n]$.

Aufgabe 8.26:

Ein einfaches Verfahren zur Implementierung digitaler Filter mit steilen Übergängen zwischen Durchlass- und Sperrbereichen ist die Kettenschaltung von einfachen Filtern mit gleicher Übertragungsfunktion:

$$H_{ges}(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) H(e^{j\theta}) \dots = H(e^{j\theta})^K.$$

Untersuchen Sie das Frequenzverhalten des Gesamtsystems für das folgende einfache Teilfilter:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} (1 + z^{-1}).$$

Messen Sie den Zusammenhang zwischen der 3 dB-Grenzfrequenz des Gesamtsystems und der Anzahl K der Teilfilter. Hinweis: Zur Berechnung der Filterkoeffizienten des Gesamtfilters bietet sich die MATLAB-Funktion `conv()` an.

Aufgabe 8.27:

Von einem System sei die Differenzgleichung gegeben:

$$y[n] - y[n - 1] = \frac{1}{N}(x[n] - x[n - N]).$$

Bestimmen Sie mit MATLAB die Impulsantwort und den Frequenzgang (Betrag und Phase) dieses Systems für verschiedene Werte N . Wählen Sie für $x[n]$ ein einfaches Signal und berechnen Sie $y[n]$ im Zeit- und Frequenzbereich. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Matlab!

Aufgabe 8.28:

Ein digitales Hann-Filter hat die folgende Übertragungsfunktion:

$$H(z) = K \frac{1 - z^{-6}}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})} = \frac{A(z)}{B(z)}.$$

Untersuchen Sie dieses Filter im Frequenzbereich und zeichnen Sie das Pol/Nullstellendiagramm (MATLAB-Funktion `zplane()`). Der Faktor K soll so gewählt werden, daß $H(e^{j0}) = 1$ ist. Implementieren Sie das Filter mit der MATLAB-Funktion `filter()` auf verschiedene Arten und bestimmen Sie die Antwort des Systems auf

$$x[n] = \sin \frac{2\pi}{3}n, \quad 0 \leq n < 20.$$

- Vereinfachen Sie $H(z)$ und implementieren Sie das resultierende System.
- Filtern Sie $x[n]$ zuerst mit $A(z)$ (plotten Sie auch dieses Signal) und danach mit $B(z)$.
- Nun drehen Sie die Reihenfolge von $A(z)$ und $B(z)$ um.

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Verwenden Sie `conv()` zur Berechnung der Koeffizienten des Nennerpolynoms von $H(z)$.

Aufgabe 8.29:

Es sind zwei Übertragungsfunktionen von digitalen Filtern gegeben:

$$H(z) = 0.15 \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1} + 0.7z^{-2}} \quad G(z) = 0.15 \frac{1 - z^{-2}}{0.7 - 0.5z^{-1} + z^{-2}}.$$

Bestimmen Sie die Impulsantworten, Betrags- und Phasenverlauf beider Frequenzgänge und das Pol/Nullstellendiagramm (MATLAB-Funktion `zplane()`). Welches der beiden Systeme würden Sie zur Filterung vorziehen?

Aufgabe 8.30:

Entwickeln Sie ein MATLAB-Programm, das für eine gegebene \mathcal{Z} -Transformation $X(z)$ die inverse \mathcal{Z} -Transformation für kausale und akausale Signale $x[n]$ berechnet. Bestimmen

Sie zunächst mit `residue()` die Partialbruchzerlegung von $X(z)$, wobei Sie einfache Pole voraussetzen können:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = G(z) + \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{z - p_k}.$$

$G(z)$ ist als Polynom nur vorhanden, wenn der Grad des Zählerpolynoms $B(z)$ größer oder gleich jenem des Nenners $A(z)$ ist. Danach ordnen Sie jedem Term der Summe ein Zeitsignal zu (siehe Formelsammlung, Zeitverschiebung nicht vergessen!). Bei zweiseitigen Signalen legen wir fest, daß Terme mit $|p_k| < 1$ abklingende Schwingungen in positiver Zeitrichtung (kausale Anteile) bewirken. Terme mit $|p_k| > 1$ liefern abklingende Schwingungen in negativer Zeitrichtung (akausale Anteile). Beachten Sie, daß r_k und p_k im allgemeinen komplexwertig sind. Testen Sie Ihr Programm anhand folgender \mathcal{Z} -Transformationen:

a) $X(z) = \frac{z}{z - 1}$

b) $X(z) = \frac{z^2}{(z - 0.5)(z + 0.5)}$

c) $X(z) = \frac{z^2}{(z - 0.5)(z - 2)}$

d) $X(z) = \frac{z(1 - z^{-5})}{z - 1}$

e) $X(z) = \frac{5z(z - 1)}{z^2 - 1.6z + 0.8}$

Achten Sie insbesondere auf die Auswirkung von Rundungsfehlern!

Aufgabe 8.31:

Verwenden Sie die MATLAB-Funktionen `filter()` und `filtic()` zur Bestimmung von $y[n]$ für folgende Differenzgleichungen:

a) $y[n] = 0.5y[n - 1] + x[n] - 0.5x[n - 1]$
für $x[n] = \sigma[n]$ und der Anfangsbedingung $y[-1] = 1$.

b) $y[n] - 0.6y[n - 1] - 0.16y[n - 2] = 5x[n]$
für $x[n] = \delta[n]$ und $y[-2] = \frac{25}{4}$, $y[-1] = 0$.

Zeigen Sie, daß sich die Systemantwort jeweils zusammensetzt aus

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

($y_h[n]$ ist die Systemantwort für $x[n] \equiv 0$ und $y_p[n]$ jene für verschwindende Anfangsbedingungen.)

Aufgabe 8.32:

Gegeben sei ein System

$$H(z) = \frac{\rho z}{z^2 - \sqrt{2}\rho z + \rho^2}.$$

- Bestimmen Sie die Lage der Nullstellen und Pole (in Abhängigkeit von ρ !) und plotten Sie diese in der komplexen Ebene. Bestimmen Sie (mit `residue`) die Partialbruchzerlegung und berechnen Sie das (kausale) Zeitsignal $h[n]$.
- Die effektive Dauer eines Signales n_{eff} ist definiert gemäss

$$\sum_{n=0}^{n_{eff}} |h[n]|^2 = 0.7 \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]|^2,$$

also jene Zeit, in der 70 Prozent der Energie des Signals liegen. Bestimmen Sie diese Grösse in Abhängigkeit von ρ .

- Bestimmen Sie die Sprungantwort sowie die Antwort auf $x[n] = \sin(\theta_0 n)\sigma[n]$ für verschiedene Frequenzen θ_0 .

Aufgabe 8.33:

In diesem Beispiel soll die Hilbert Transformation und ihre Anwendung auf komplexe Signale untersucht werden. Diese Transformation kann durch ein spezielles Filter $H_{\mathcal{H}}(e^{j\theta})$ beschrieben werden,

$$H_{\mathcal{H}}(e^{j\theta}) = \begin{cases} 0 & \text{for } \theta \leq 0 \\ 1 & \text{for } \theta > 0. \end{cases}$$

Man kann so ein Filter erhalten, indem man ein ideales Tiefpassfilter $f[n]$ (mit Grenzfrequenz $\pi/2$) im Frequenzbereich um $\pi/2$ nach rechts “verschiebt”. Diese Verschiebung erreicht man durch Multiplikation (im Zeitbereich) der Filterfunktion $f[n]$ mit $x[n] = \exp(j\pi n/2)$.

- Zeichnen Sie die Spektren von $f[n]$ und $x[n]$ und veranschaulichen Sie, was bei der Multiplikation der beiden Signale passiert.
- Entwerfen Sie (mit `fir1`) in Matlab ein entsprechendes Tiefpassfilter, multiplizieren Sie dieses mit $x[n]$, wodurch Sie $f_{\mathcal{H}}[n]$ erhalten. Stellen Sie die Fouriertransformierte der Signale dar (Dazu können Sie das Matlab Programm im Skriptum nach Beispiel 4.5 verwenden).
- Nun erzeugen Sie ein Signal mit einer dreieckförmigen Fouriertransformierten und “schieben” Sie dieses Signal in den positiven Frequenzbereich; sie erhalten $d[n]$. Dabei sollte die Fouriertransformierte von $d[n]$ nur Komponenten im Bereich $\theta > 0$ haben; passen Sie die Breite des Dreieckspektrums und die Verschiebung entsprechend an.
- Nun filtern Sie $d[n]$ mit dem Hilberfilter $f_{\mathcal{H}}[n]$ und stellen Sie das Spektrum dar! Wie können Sie aus diesem Signal wieder $d[n]$ rekonstruieren?

Hinweis: Damit die Fenstereffekte nicht zu stark werden, wählen Sie die Signale entsprechen lang (in der Größenordnung von mehreren 100 Samples.)

8.6 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Aufgabe 8.34:

Bestimmen Sie mit der MATLAB-Funktionen `fft()` und optional mit `fftshift()` die DFT $X[k]$, $0 \leq k < 128$ für folgende Signale:

$$\text{a) } x[n] = \sin \frac{2\pi m}{128} n, \quad 0 \leq n < 128, \quad 1 \leq m \leq 64$$

$$\text{b) } x[n] = \sin \frac{2\pi m}{100} n, \quad 0 \leq n < 128, \quad 1 \leq m \leq 50$$

$$\text{c) } x[n] = e^{j\frac{2\pi m}{128} n}, \quad 0 \leq n < 128, \quad 1 \leq m \leq 128$$

Variieren Sie den Frequenzindex m der sinusförmigen Signale im angegebenen Bereich und interpretieren Sie die Ergebnisse. Zeichnen Sie den Betrag von $X[k]$ auch im dB-Maßstab.

Aufgabe 8.35:

Es soll die Frequenzschätzung für sinusförmige Signale mit Hilfe der DFT untersucht werden. Dabei sollen die Frequenzwerte nicht notwendigerweise ein Vielfaches der DFT-Auflösung (Abtastrate durch Anzahl der Frequenzpunkte) sein. Das sinusförmige Signal $x[n]$ wird mit einer Fensterfunktion $w[n]$ multipliziert, um eine geeignete Formung des Spektrums zu erzielen:

$$y[n] = w[n]x[n] = w[n] \sin \theta_0 n, \quad 0 \leq n < N.$$

Als Fensterfunktion verwenden Sie das Hann-Window $w[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi n}{N-1}$, $0 \leq n < N$. Um eine größere Anzahl $L > N$ von Frequenzpunkten zu erhalten, fügen Sie an das Signal $y[n]$ $L - N$ Nullen. In MATLAB genügt dazu der Funktionsaufruf `fft(y,L)`, da `fft()` automatisch Nullen anfügt, wenn weniger Zeit- als Frequenzpunkte vorliegen. Bestimmen Sie die Frequenz durch Maximumsuche im Spektralbereich. Wie ändert sich die Genauigkeit der Frequenzmessung in Abhängigkeit von N , L und θ_0 ?

Aufgabe 8.36:

Testen Sie mit MATLAB die zyklische Faltung für verschiedene Signale gleicher Länge N :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]x_2[(n-k) \oplus N], \quad 0 \leq n < N.$$

(\oplus ist die Modulooperation.)

Entwickeln Sie ein MATLAB-Programm, das die zyklische Faltung mit Hilfe der Funktionen `fft()` und `ifft()` berechnet. Veranschaulichen Sie sich die Unterschiede zur normalen Faltung!

Aufgabe 8.37:

Die DFT liefert das Spektrum eines Signals an äquidistanten Frequenzpunkten. Diese Abtastung im Frequenzbereich führt zu einem Aliasing im Zeitbereich. Untersuchen Sie dieses Phänomen, indem Sie das Spektrum

$$X(e^{j\theta}) = e^{-\theta^2}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

im angegebenen Frequenzintervall an N Punkten $\theta_k = \frac{2\pi}{N}k$ abtasten. Variieren Sie N und bestimmen Sie jeweils mit der inversen DFT das zugehörige Zeitsignal $x[n]$. Welche Kurvenform nimmt das Zeitsignal für große Werte von N an?

Aufgabe 8.38:

Entwickeln Sie ein MATLAB-Programm, das durch Berücksichtigung von Symmetrieverhältnissen die DFT von geraden und ungeraden reellwertigen Signalen mit einer FFT möglichst kurzer Länge bestimmt.

Aufgabe 8.39:

In dieser Aufgabe sollen Sie eine Form der diskreten Cosinustransformation (DCT) mit MATLAB untersuchen. Diese DCT (und die inverse DCT) ist für ein N -Punkte Signal $x[n]$ definiert durch

$$X_C[k] = 2 \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos \frac{\pi k(2n+1)}{2N}, \quad 0 \leq k < N$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w[k] X_C[k] \cos \frac{\pi k(2n+1)}{2N}, \quad 0 \leq n < N$$

mit

$$w[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ 1 & 1 \leq k < N \end{cases}.$$

DCT und inverse DCT können mit der DFT berechnet werden, indem mit $x[n]$ das folgende gerade symmetrische Signal $x_g[n]$ der Länge $2N$ gebildet wird:

$$x_g[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n < N \\ x[2N - n - 1] & N \leq n < 2N \end{cases}.$$

Mit der $2N$ -Punkte DFT $X_g[k]$ von $x_g[n]$ erhält man die DCT

$$X_C[k] = e^{-j\frac{\pi k}{2N}} X_g[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich mit

$$X_g[k] = \begin{cases} e^{j\frac{\pi k}{2N}} X_C[k] & 0 \leq k < N \\ 0 & k = N \\ -e^{j\frac{\pi k}{2N}} X_C[2N - k] & N + 1 \leq k < 2N \end{cases}$$

die inverse DCT (IDCT) mit Hilfe der DFT:

$$x[n] = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} X_g[k] e^{j\frac{2\pi}{2N}nk}, \quad 0 \leq n < N.$$

Programmieren Sie mit MATLAB die DCT und IDCT als Funktionen `mydct()` und `myidct()` unter Verwendung der angegebenen Beziehungen. Kontrollieren Sie vorher die Beziehungen analytisch. Wenn Sie die MATLAB Signal Processing Toolbox besitzen, dann können Sie die Ergebnisse mit jenen der Funktionen `dct()` und `idct()` vergleichen. Die Ergebnisse müssen bis auf einen Skalierungsfaktor übereinstimmen.

Die DCT hat die Eigenschaft, dass bei exponentiell abklingenden Signalen die DCT-Werte konzentriert sind, d.h. man kann Werte $X_C[k]$ mit größeren Indizes k Null setzen, ohne gravierende Fehler in der Darstellung des Signals zu machen. Diese Eigenschaft der DCT wird z.B. bei der Datenkompression ausgenutzt. Verwenden Sie ein Signal der Form

$$x[n] = a^n \cos \theta_0 n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

und approximieren Sie dieses Signal mit der IDCT bzw. IDFT, indem Sie bei den inversen Transformationen die Summen nur über m Werte ($m < N$) berechnen. Plotten Sie die Fehlerenergie dieser Approximationen in Abhängigkeit von m . Bei der IDCT ist die Fehlerenergie definiert durch

$$E_{DCT}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - x_m[n]|^2$$

mit $x_m[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^m w[k] X_C[k] \cos \frac{\pi k(2n+1)}{2N}$, $m < N$. Entsprechendes gilt für die IDFT. Vergleichen Sie die Fehler bei Verwendung der DCT und der DFT.

Aufgabe 8.40:

Quantisierung. Ein Amplitudenquantisierer wandelt kontinuierliche Werte im Bereich $[-1; 1]$ in Zahlen mit einer Wortlänge von N Bits um. Dabei wird Zahlen im Intervall $[-1 + (k-1)Q; -1 + kQ]$ der Integerwert k zugewiesen, wobei die Quantisierungsbreite $Q = 2^{1-N}$ ist. (Damit wird dem letzten Intervall der Integerwert 2^N zugewiesen und die Darstellung braucht N Bits)

- Erzeugen Sie einige Signale (Sinus, Dreieck, Rauschen,...) $x[n]$ (Länge L) quantisieren Sie diese (Matlab Funktion `uencode`) mit unterschiedlicher Bitanzahl und wandeln Sie die quantifizierten Werte wieder in floats $x_Q[n]$ um (Matlab `udencode`). Messen Sie den dabei entstandene Fehler

$$\epsilon = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L |x[n] - x_Q[n]|^2$$

und stellen Sie diesen graphisch gegenüber der Wortlänge dar!

Discrete Cosine Transform (DCT). Die M -Punkte DCT $X[k]$ eines Signals $x[n]$ der Länge M ist folgendermassen definiert:

$$X[k] = w[k] \sum_{n=1}^M x[n] \cos \frac{\pi(2n-1)(k-1)}{2M} \quad k = 1, \dots, M$$

mit $w[k] = 1/\sqrt{M}$, $k = 1$ und $w[k] = \sqrt{2/M}$ sonst. Die zugehörige inverse discrete cosine transform (IDCT) ist gemäss

$$x[n] = \sum_{k=1}^M w[k] x[k] \cos \frac{\pi(2n-1)(k-1)}{2M} \quad k = 1, \dots, M$$

definiert ($w[k]$ so wie oben). Eine Eigenschaft der DCT ist, dass bei vielen Signal die DCT Koeffizienten stark konzentriert sind; d.h. nur wenige Koeffizienten sind gross und tragen zum Signal bei.

- Erzeugen Sie einige Signale und berechnen Sie die DCT von diesen (entweder Sie schreiben eine Funktion selber, verwenden den Zusammenhang zwischen FFT und DFT wie in Aufgabe 39 beschrieben oder verwenden die Matlab Funktion `dct` und `idct`).
- Nun setzen Sie alle DCT Koeffizienten unterhalb einer gewissen Schwelle γ gleich Null, transformieren wieder in den Zeitbereich zurück, messen den Fehler (definiert wie oben) in Abhängigkeit von α und stellen diesen graphisch dar.
- Nun wiederholen Sie obige Aufgabenstellung, aber quantifizieren Sie die DCT Koeffizienten. Was passiert mit dem Fehler, wenn Sie die Wortlänge ändern?
- Sie können auch unterschiedliche Wortlängen zur Quantisierung für verschiedene DCT Koeffizienten $X[k]$ verwenden; der k te Koeffizienten $X[k]$ wird mit N_k Bits quantifiziert. Experimentieren Sie mit unterschiedlichen Zuordnungen N_k !

Audio Codierung. Ältere Audiokomprimierungen (MPEG Layer I und II) machen prinzipiell nichts anderes: Das Signal wird in Blöcke zerlegt und jeder Block wird einer (modifizierten) DCT unterworfen. Die einzelnen DCT Koeffizienten (jedes Blocks) werden mit unterschiedlich vielen Bits quantisiert. Danach wird eine sogenannte Huffmann Codierung (“besseres Winzip”) angewandt, um die DFT Koeff. optimal zu komprimieren.

- Sie können mit `wavread` und `wavwrite` Audiofiles lesen und schreiben. Laden Sie ein Audiofile und zerlegen dieses in (nichtüberlappende) Blöcke. (vgl. den M-Code im Appendix)
- Probieren Sie eine DCT mit unterschiedlichen Koeffizientenquantisierungen aus und hören Sie sich Ihre Ergebnisse an!

Aufgabe 8.41:

Auf Seite 129 im Skriptum wird die Overlap-Add Methode beschrieben, die eine blockweise Filterung ermöglicht.

- Entwerfen Sie (mittels `fir1`) Tiefpassfilter unterschiedlicher Ordnung und filtern Sie damit ein Audiosignal unter Verwendung der Overlap-Add Methode. Transformieren Sie die Filter zu Hoch-/Bandpassfiltern und filtern Sie das Audiosignal mit diesen Filtern.
- Erzeugen Sie ein künstliches Echo, indem Sie Ihr Signal mit einem System der Form $h[n] = \delta[n] + a\delta[n - N_0]$ filtern.
- Vergleichen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus für unterschiedliche Block- und Filterlängen (`tic` und `toc`)

(Sie können wav-Dateien mit `waveread` und `wavewrite` lesen bzw. schreiben)

Aufgabe 8.42:

Auf Seite 129 im Skriptum wird die Overlap-Save Methode beschrieben, die eine blockweise Filterung ermöglicht.

- Entwerfen Sie (mittels `fir1`) Tiefpassfilter unterschiedlicher Ordnung und filtern Sie damit ein Audiosignal unter Verwendung der Overlap-Save Methode. Transformieren Sie die Filter zu Hoch-/Bandpassfiltern und filtern Sie das Audiosignal mit diesen Filtern.
- Erzeugen Sie ein künstliches Echo, indem Sie Ihr Signal mit einem System der Form $h[n] = \delta[n] + a\delta[n - N_0]$ filtern.
- Vergleichen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus für unterschiedliche Block- und Filterlängen (`tic` und `toc`)

(Sie können wav-Dateien mit `waveread` und `wavewrite` lesen bzw. schreiben)

Aufgabe 8.43:

In diesem Beispiel soll die Anwendung der DFT auf Signale nicht endlicher Länge untersucht werden. Dazu betrachten wir das Signal $x[n] = \alpha^n \sigma[n]$, sowie ein auf die Länge N gekürztes Signal $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Berechnen Sie von $\tilde{x}[n]$ die DFT $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis von Matlab (Funktion `fft`).
- Berechnen Sie das kontinuierliche Spektrum $X(e^{j\theta})$ von $x[n]$ und plotten Sie dieses für verschiedene Werte von α .

Wenn man das kontinuierliche Spektrum $X(e^{j\theta})$ an den Stellen $\theta = k\frac{2\pi}{N}$ abtastet, erhält man ein diskretes Spektrum $X_s[k] = X(e^{j\theta})|_{\theta=k\frac{2\pi}{N}}$. Durch die Abtastung im Frequenzbereich kommt es zu Aliasing im Zeitbereich; das Signal $x_s[k]$ ist gegeben durch $x_s[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN]$.

- Berechnen Sie $x_s[k]$ und vergleichen Sie dieses Signal (in Matlab) mit dem Signal, das Sie erhalten, wenn Sie (mittels `ifft`) $X_s[k]$ in den Zeitbereich transformieren.
- Wenn N gross genug ist (bzw. α klein genug), dann gilt $x_s[k] \approx \tilde{x}[n]$, und die DFT und $X_s[k]$ stimmen näherungsweise überein. Überprüfen Sie diese Aussage in Matlab!

8.7 Digitale Filter

Aufgabe 8.44:

Ein einfaches Verfahren zum Entwurf von linearphasigen FIR-Filtern ist die Fenstermethode. Dazu wird die Impulsantwort eines idealisierten Tiefpasses ($h_d[n] = \frac{\sin\theta_g n}{\pi n}$) zeitverschoben und mit einer Fensterfunktion $w[n]$ (der Länge N) auf das Intervall $0 \leq n < N$ zeitbegrenzt:

$$h[n] = h_d \left[n - \frac{N-1}{2} \right] w[n] \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Durch Wahl der Fensterfunktion $w[n]$ und der Filterlänge N kann man die Approximation des idealisierten Tiefpassfilters beeinflussen.

- Bestimmen Sie mit Matlab den Frequenzgang von $h[n]$ für unterschiedliche Werte von θ_g , N und für verschiedene Fensterformen (vgl. Tabelle 6.1 im Skriptum) und diskutieren Sie das Ergebnis. Wie hängt die Sperrdämpfung von N und vom verwendeten Fenster ab?
- Verwenden Sie die Tiefpassfilterapproximation zum Entwurf eines linearphasigen
 - a) FIR-Hochpassfilters,
 - b) FIR-Bandpassfilters,
 - c) FIR-Bandsperrfilters.

Aufgabe 8.45:

Untersuchen Sie die Eigenschaften der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation zum Entwurf von IIR-Filtern. Die normierte Form der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation ist gegeben durch

$$s = \frac{1}{\tan \pi \frac{f_g}{f_s}} \frac{z-1}{z+1}.$$

(Filtergrenzfrequenz f_g , Abtastfrequenz f_s .) Verwenden Sie dazu die folgenden analogen Referenzfilter:

a) $H(s) = s$

b) $H(s) = \frac{1}{s}$

c) $H(s) = 1 + s$

d) $H(s) = \frac{1}{1 + s}$

e) $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

f) $H(s) = \frac{0.01s^2 + 0.9876}{s^2 + 1.0915s + 1.1081}$

Für alle Filter verwenden Sie $f_g = 1$ kHz und $f_s = 16$ kHz. Plotten Sie Betrags- und Phasenfrequenzgänge der Filter. Realisieren Sie diese Filter mit der MATLAB-Funktion `filter()` und prüfen Sie wichtige Eigenschaften, wie z.B. Stabilität, minimale Phase, Lage der Pole und Sperrstellen.

Aufgabe 8.46:

Ein stabiles und kausales digitales Filter kann als Kettenschaltung eines Allpasses $H_{AP}(z)$ und eines minimalphasigen Systems $H_{min}(z)$ dargestellt werden. Ein Allpass hat einen konstanten Betragsfrequenzgang, d.h. $|H_{AP}(e^{j\theta})| = \text{const}$, dies wird durch

$$H_{AP}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

erreicht. Für die Übertragungsfunktion des digitalen Filters gilt daher

$$H(z) = H_{AP}(z)H_{min}(z),$$

wobei die Übertragungsfunktion $H_{min}(z)$ des minimalphasigen Teilsystems nur Pole und Nullstellen im Inneren des Einheitskreises in der komplexen z -Ebene hat. Alle anderen Pole und Nullstellen werden der Allpassübertragungsfunktion $H_{AP}(z)$ zugeordnet.

- Berechnen Sie den Betragsfrequenzgang $|H_{AP}(e^{j\theta})|$ und zeigen Sie, dass dieser konstant ist.
- Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, mit dem für eine gegebene Filterübertragungsfunktion (in Form der Koeffizienten von Nenner- und Zählerpolynom) das Allpass- und das Minimalphasenteilfilter bestimmt werden können.
- Stellen Sie graphisch die Pol/Nullstellendiagramme und die Betrags- und Phasenverläufe der Teilübertragungsfunktionen dar.
- Vergleichen Sie die Impulsantworten $h[n]$ sowie $h_{min}[n]$.

Testen Sie Ihr Programm u.a. mit den folgenden Beispielen:

$$\text{a) } H(z) = \frac{z + 3}{z + \frac{1}{2}}$$

$$\text{b) } H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 4z^{-2})}{1 - 0.64z^{-1}}$$

$$\text{c) } H(z) = \frac{1 - z^{-8}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

Aufgabe 8.47:

Linearphasige FIR-Filter mit reeller Impulsantwort haben Nullstellen entweder am Einheitskreis oder an konjugiert reziproken Stellen (Spiegelung am Einheitskreis). Damit kann die Übertragungsfunktion $H(z)$ eines solchen linearphasigen FIR-Filters in der Form

$$H(z) = H_{min}(z)H_1(z)H_{max}(z)$$

dargestellt werden. Der Minimalphasenterm $H_{min}(z)$ hat alle Nullstellen im Inneren des Einheitskreises der z -Ebene. Der Maximalphasenterm $H_{max}(z)$ besitzt nur Nullstellen außerhalb des Einheitskreises und alle Nullstellen von $H_1(z)$ liegen am Einheitskreis. Wegen der Spiegelung der Nullstellen am Einheitskreis gilt außerdem

$$H_{max}(z) = z^{-N_i} H_{min}(1/z)$$

(N_i ist die Anzahl der Nullstellen innerhalb des Einheitskreises).

Entwickeln Sie ein MATLAB-Programm mit dem für ein gegebenes FIR-Filter diese Aufspaltung von $H(z)$ bestimmt werden kann. Das FIR-Filter sei dabei durch die Impulsantwortwerte $h[n]$ charakterisiert. Zeichnen Sie alle Pol/Nullstellendiagramme und Betrags- und Phasenverläufe der Übertragungsfunktionen. Testen Sie Ihr Programm u.a. für folgende Symmetrien der FIR-Filterimpulsantwort:

$$\text{a) } h[n] = h[N - n], \quad 0 \leq n \leq N \quad (N \text{ geradzahlig})$$

$$\text{b) } h[n] = -h[N - n], \quad 0 \leq n \leq N \quad (N \text{ geradzahlig})$$

Geeignete Impulsantworten können Sie z.B. mit den MATLAB-Funktionen `fir1()` und `remez()` erzeugen.

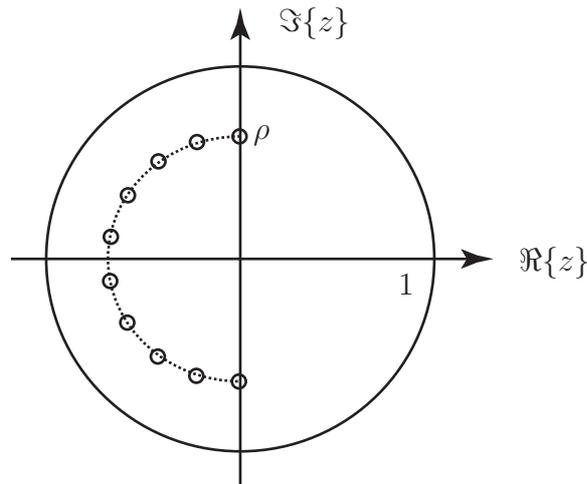
Aufgabe 8.48:

Ein FIR-Filter der Ordnung N hat folgende Form:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N/2} (1 - a_k z^{-1})(1 - a_k^* z^{-1}).$$

- Bestimmen Sie die Lage der Pole und Nullstellen.
- Welche Bedingung müssen die a_k erfüllen, dass das System stabil und kausal ist?

- Das Verhalten des Frequenzganges soll in Abhängigkeit der Lage der Nullstellen untersucht werden (Dabei sollen die Nullstellen innerhalb des Einheitskreises liegen, um ein minimalphasiges System zu erhalten).
 - Platzieren Sie die Nullstellen so, dass Sie auf einem Halbkreis gleichmässig verteilt sind. Wie verändert sich der Frequenzgang, wenn Sie den Radius ρ verändern? Was passiert, wenn Sie die Ordnung des Filters erhöhen (also mehr Nullstellen platzieren)?



- Nun untersuchen Sie den Fall, wenn die Nullstellen nicht gleichmässig auf dem Halbkreis verteilt sind - z.B. wenn die Nullstellen zur reellen Achse hin dichter liegen.
- Platzieren Sie die Nullstellen nicht auf einem Halbkreis, sondern auf einer Ellipse und untersuchen Sie den Frequenzgang für diesen Fall.

Aufgabe 8.49:

Folgendes System $H(z)$ sei gegeben

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 2\rho z \cos \alpha + \rho^2} = \frac{1}{z^2 - c_1 z + c_2}.$$

- Bestimmen Sie die Lage der Pole und in welchen Intervallen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ müssen c_1 und c_2 liegen, damit das System stabil ist?
- Nun werden die Koeffizienten c_k quantisiert, diese ergeben sich zu $c_k^Q = \Delta \left[\frac{c_k}{\Delta} + \frac{1}{2} \right]$ (Vergleiche auch Aufgabe 3). Verwendung dieser quantifizierten Koeffizienten ergibt ein neues Filter $H^Q(z)$. Stellen Sie die Lage der Pole des Filters $H^Q(z)$ (in Abhängigkeit von der Quantisierungsbreite Δ) dar.
- Bestimmen Sie Impulsantwort und Frequenzgang von $H(z)$ und $H^Q(z)$ für beliebige Koeffizienten c_1 und c_2 .

- Vergleichen Sie qualitativ den Verlauf von Impulsantwort und Frequenzgang der beiden Filter.
- Bestimmen Sie den Unterschied der Impulsantworten $h[n]$ und $h^Q[n]$

$$\sum_n |h[n] - h^Q[n]|^2$$

und plotten Sie diesen in Abhängigkeit von Δ und für verschiedene Koeffizienten c_k . Für welche Lage der Pole ist der Unterschied zwischen $H(z)$ und $H^Q(z)$ besonders groß?

Aufgabe 8.50:

In diesem Beispiel soll das Design eines FIR Filters mit beliebigem Frequenzgang untersucht werden. Dieses Problem stellt ein sogenanntes konvexes Optimierungsproblem dar, für das es äußerst effiziente Lösungsalgorithmen gibt.

In diesem Beispiel werden wir das Paket CVX verwenden, ein Matlab Paket, das konvexe Optimierungsprobleme lösen kann.

- Das CVX Paket erhalten Sie unter <http://www.stanford.edu/~boyd/cvx/download.html> Installieren Sie das Paket, indem Sie das Archiv in ein leeres Verzeichnis entpacken, und in diesem (in Matlab) `cvx_setup` ausführen.
- Um sich mit dem Paket vertraut zu machen, probieren Sie folgendes einfaches Beispiel aus

$$\min x_1^2 + x_2^2 \quad \text{Nebenbedingungen: } x_1 > 1, x_2 > 2.$$

Mit CVX lösen Sie Aufgabe, indem Sie die folgenden Befehle in ein Skriptfile schreiben und dieses ausführen.

```
clear all
cvx_begin
variable x(2)
    minimize x(1)^2+x(2)^2
    subject to
    x(1) > 1
    x(2) > 2
cvx_end
x
```

Im `cvx` block wird zuerst die Variable `x` als zweidimensionale Variable definiert, dann der zu minimierende Term ausgedrückt und schließlich die Nebenbedingungen angegeben. Nach dem `cvx` Block enthält der Vektor `x` die Lösung.

- Plotten Sie die zu minimierende Funktion und überprüfen Sie die Lösung.

- Wir betrachten ein (akausales) FIR Filter, dessen Koeffizienten $h[n]$ symmetrisch sind: $h[n] = h[-n]$. Zeigen Sie, daß sich die Fouriertransformation $H(e^{j\theta})$ gemäß $H(e^{j\theta}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N h_n \cos(\theta n)$ darstellen läßt.
- Wenn man die Filterkoeffizienten $h[n]$ in einem Vektor $\mathbf{h} = (h_0 h_1 \cdots h_N)^T$ zusammenfaßt, kann man die Fouriertransformierte an der Stelle θ_k als $H(e^{j\theta_k}) = (2 \cos \theta_k 2 \cos(2\theta_k) \cdots 2 \cos(N\theta_k)) \mathbf{h}$ schreiben. Faßt man nun M Werte der Fouriertransformierten in einen Vektor \mathbf{f} zusammen, erhält man

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} H(e^{j\theta_1}) \\ H(e^{j\theta_2}) \\ \vdots \\ H(e^{j\theta_M}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cos \theta_1 & 2 \cos(2\theta_1) & \cdots & 2 \cos(N\theta_1) \\ 1 & 2 \cos \theta_2 & 2 \cos(2\theta_2) & \cdots & 2 \cos(N\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 \cos \theta_M & 2 \cos(2\theta_M) & \cdots & 2 \cos(N\theta_M) \end{pmatrix} \mathbf{h} = \mathbf{A} \mathbf{h}.$$

Generieren Sie die Matrix \mathbf{A} in Matlab und berechnen und plotten Sie, für beliebige Filterkoeffizienten, $|H(e^{j\theta_k})|$.

- Ein FIR Tiefpaß-Filter mit Durchlassfrequenz θ_p , Sperrfrequenz θ_s und Passband Ripple ϵ läßt sich folgendermaßen als Optimierungsproblem schreiben:

$$\begin{aligned} & \min \max ||\mathbf{A}_s \mathbf{h}|| \\ & \text{subject to: } \mathbf{A}_p \mathbf{h} \leq 1 + \epsilon, \mathbf{A}_s \mathbf{h} \geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Dabei ist \mathbf{A}_p die Matrix \mathbf{A} nur mit den Zeilen $\theta < \theta_p$, und \mathbf{A}_s die Matrix \mathbf{A} nur mit den Zeilen $\theta > \theta_s$.

- Erzeugen Sie die Matrizen \mathbf{A}_p und \mathbf{A}_s in Matlab, und lösen Sie das Filter Design mit dem cvx Paket für $N = 10$, $\theta_p = 0.2\pi$, $\theta_s = 0.3\pi$ und $\epsilon = 0.2$ (Wählen Sie $M = 10N$). Was passiert wenn Sie den Abstand zwischen θ_p und θ_s verringern, ϵ variieren oder N verändern?

8.8 Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung

Aufgabe 8.51:

Bearbeiten Sie die Aufgaben von Kapitel 7 mit MATLAB. Versuchen Sie mit den Zusammenhängen in der Formelsammlung auf Seite 106 effiziente Systeme zu erzeugen, bei denen die meisten Arithmetikoperationen mit der niedrigeren Taktrate ausgeführt werden.

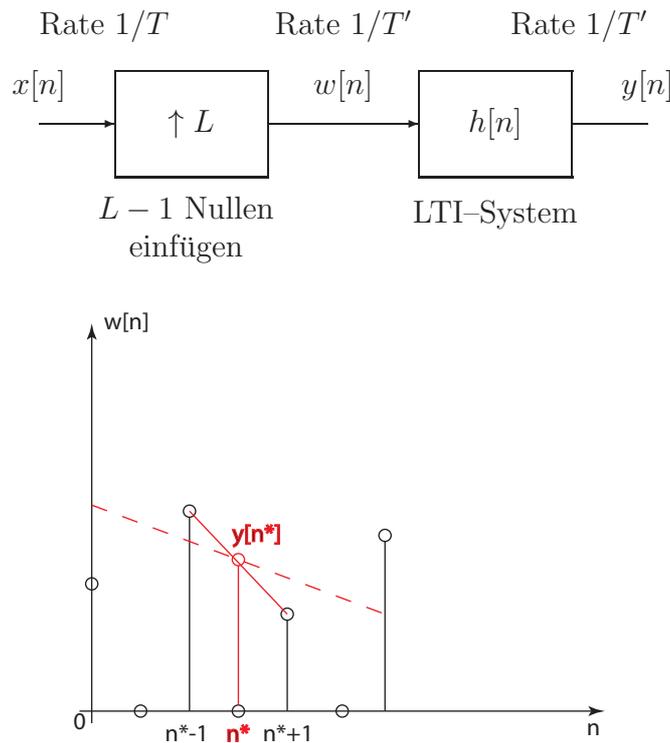
Aufgabe 8.52:

In vielen Anwendungen werden Systeme zur Verzögerung von Signalen benötigt. Einfach zu realisieren sind nur Verzögerungen um ganzzahlige Vielfache des Abtastintervalls. Eine feinstufige Verzögerung um Bruchteile des Abtastintervalls erfordert einen erheblichen Aufwand, insbesondere dann, wenn die Signalverzögerung über einen weiten Frequenzbereich konstant sein soll. Eine mögliche Realisierung einer sog. *Fractional Delay* soll in dieser Aufgabe mit MATLAB untersucht werden.

Im abgebildeten System wird das Eingangssignal $x[n]$ mit dem ganzzahligen Faktor L überabgetastet und um K Abtastwerte verzögert. Das Ausgangssignal $y[n]$ erhält man durch Tiefpassfilterung und Taktratenreduktion. Als Tiefpassfilter wählen Sie am einfachsten ein FIR-Filter. Variieren Sie die Länge und Grenzfrequenz des Filters, um eine Fractional Delay über einen möglichst weiten Frequenzbereich zu erhalten.

Aufgabe 8.53:

Bei diesem Beispiel soll eine Taktratenerhöhung um den Faktor L betrachtet werden.



Dabei wird das Spektrum $X(e^{j\theta})$ “zusammengestaucht” und um das ursprüngliche Signal (mit einer höheren Samplerate) zu erhalten, muss $h[m]$ ein idealisiertes Tiefpassfilter mit Grenzfrequenz $\frac{\pi}{L}$ sein.

Ein idealisiertes Tiefpassfilter ist aber nicht realisierbar und wird daher immer approximiert. In diesem Beispiel soll der durch nichtideale Filter entstandene Fehler quantisiert werden. Als Fehlermass bietet sich die Summe der quadratische Abweichungen an

$$\epsilon = \sum |y_{\text{ref.TP}}[n] - y[n]|^2,$$

wobei $y_{\text{ref.TP}}[n]$ das mit einem (hinreichend) idealen Tiefpassfilter gefilterte Ausgangssignal ist und $y[n]$ das mit einem anderen Filter verarbeitete Ausgangssignal. Um ein hinreichend ideales Tiefpassfilter zu erhalten, kann die Ordnung des Referenztiefpasses im Bereich von 50 oder 100 liegen und um den Einschwingeffekt des Filters zu verringern, wählen Sie die Signaldauer entsprechend lange.

- Experimentieren Sie mit Tiefpassfiltern verschiedener Ordnung und messen Sie ϵ in Abhängigkeit von der Ordnung und L .
- Führen Sie eine lineare Interpolation

$$y[n^*] = 1/2 * (w[n^* - 1] + w[n^* + 1])$$

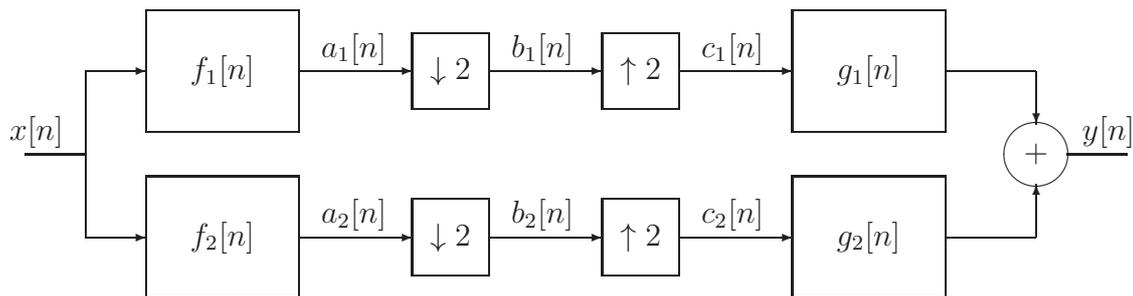
durch, um die $y[n]$ zu berechnen, die Null sind (Das würde der roten Linie entsprechen).

- Sie können auch eine gewichtete lineare Interpolation mit mehreren Randpunkten (strichlierte Linie) durchführen

$$y[n^*] = \alpha_3 w[n^* - 3] + \alpha_1 w[n^* - 1] + \alpha_1 w[n^* + 1] + \alpha_3 w[n^* + 3]$$

Aufgabe 8.54:

In diesem Beispiel wird eine QMF Bank behandelt (siehe auch Bsp. 7.6 im Übungsskriptum). Diese hat folgende Struktur:



Wenn die 4 Filter einige gewisse Bedingungen erfüllen (auf das wird hier nicht eingegangen), dann ist das Gesamtsystem ein LTI System mit Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^N \frac{1}{2} [F_1(z)G_1(z) + F_2(z)G_2(z)].$$

Unter einer “perfect reconstruction Filterbank” versteht man eine Filterbank, für die

$$H(z) = z^N, N \in \mathbb{Z}_0$$

gilt; d.h. Eingangs- und Ausgangssignal stimmen (bis auf eine zeitliche Verschiebung) miteinander überein. Daraus kann man folgende Ausdrücke für G_1 und G_2 ableiten

$$G_1(z) = \frac{2z^N F_2(-z)}{F_1(z)F_2(-z) - F_1(-z)F_2(z)}, \quad G_2(z) = \frac{2z^N F_1(-z)}{F_1(-z)F_2(z) - F_1(z)F_2(-z)}.$$

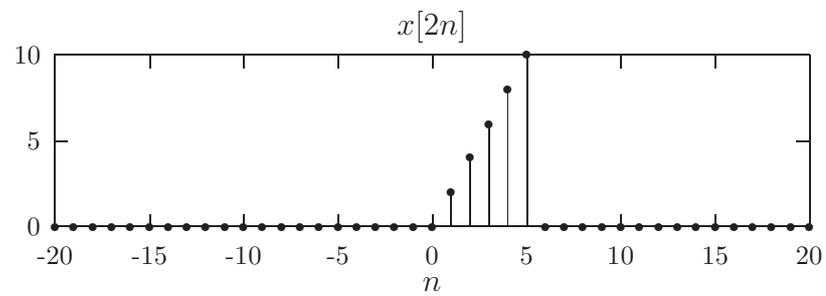
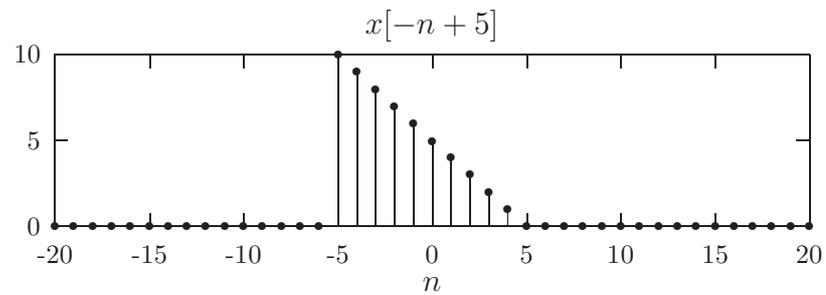
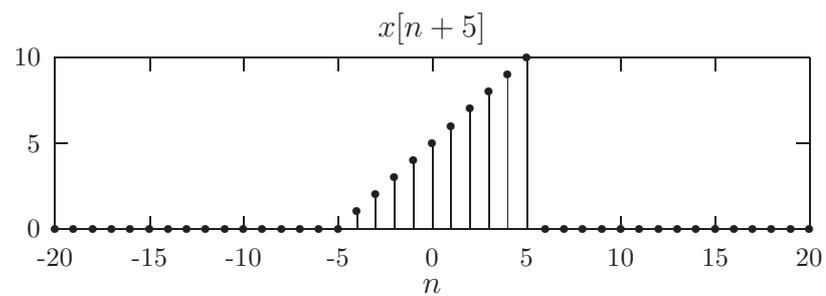
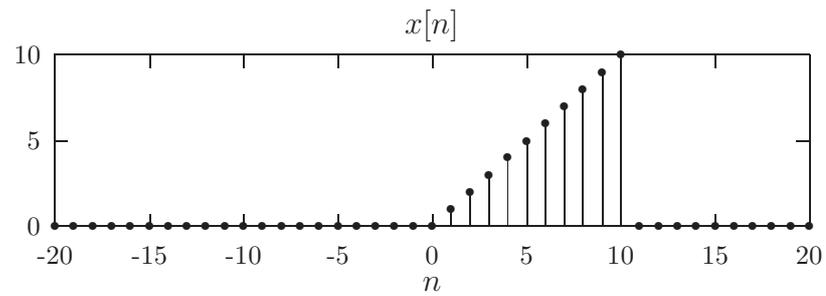
- Zeigen Sie, dass man für obige Wahl von G_1 und G_2 eine perfect reconstruction Filterbank erhält ($H(z) \equiv 1$).

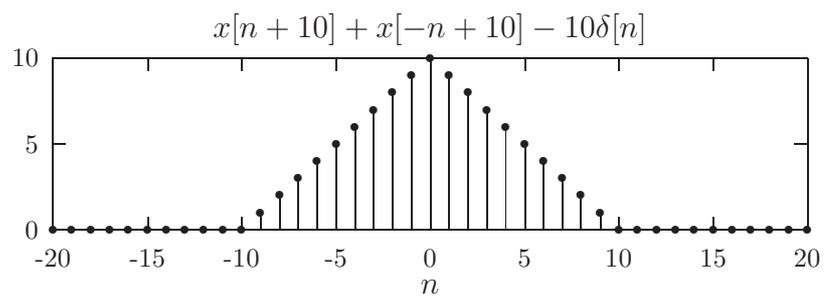
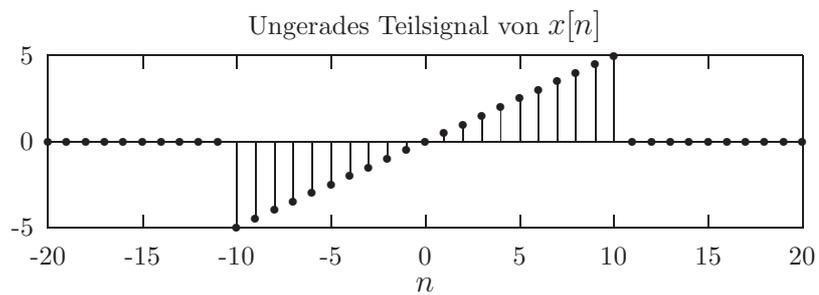
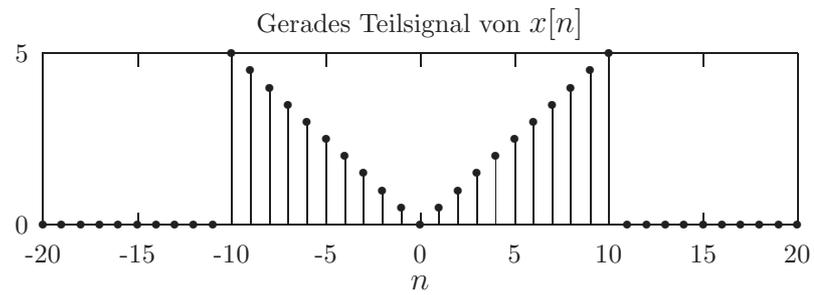
- Nehmen Sie für $F_1(z)$ einen idealen Tiefpass mit Grenzfrequenz $\pi/2$ und für $F_2(z)$ einen Hochpass mit Grenzfrequenz $\pi/2$ und berechnen Sie $G_1(z)$ und $G_2(z)$. Geben Sie eine intuitive Interpretation des Systems! Approximieren Sie nun die Filter (Entwerfen Sie die Filter mit `fir1` und hinreichend grosser Ordnung) und implementieren Sie das ganze in Matlab.
- Erzeugen Sie für $x[n]$ ein Signal mit dreieckförmigem Spektrum, plotten Sie $y[n]$ und zeichnen Sie die Spektren von $A_k(e^{j\theta})$, $B_k(e^{j\theta})$ und $C_k(e^{j\theta})$ ($k = 1, 2$).
- *Zusatz:* Wählen Sie $F_1(z) = 1 + a_1z^{-1}$ und $F_2(z) = 1 + a_2z^{-1}$, bestimmen Sie $G_1(z)$ und $G_2(z)$ sowie N so, daß $G_1(z)$ und $G_2(z)$ kausal sind und implementieren Sie das ganze in Matlab.

A Lösungen

A.1 Zeitdiskrete Signale

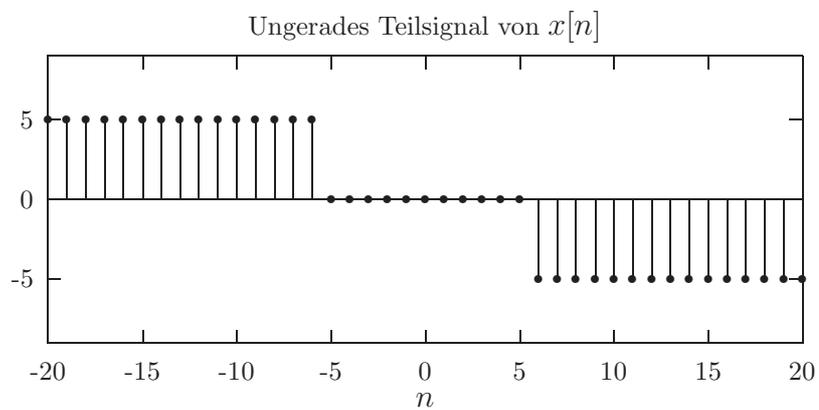
Lösung 1.1:





Lösung 1.2:

Hinweis: Aus $x_1[n]$ erhält man mit $n \rightarrow n - 5$ unmittelbar $x[n]$ für $n < 0$.



Lösung 1.3:

$$\text{a) } x_g[n]x_u[n] = \frac{1}{4} \underbrace{(x^2[n] - x^2[-n])}_{\text{ungerade Funktion}}$$

$$\text{b) } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] = 0$$

c) folgt aus den beiden vorhergehenden Punkten.

Lösung 1.4:

Das Signal $x[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ ist nur dann periodisch, wenn $\frac{N}{k}l$ ganzzahlig ist, mit zunächst beliebigem, ganzzahligem l . Daraus folgt die Grundperiode N_x von $x[n]$:

$$N_x = \frac{N}{\text{ggT}(N, k)} = \frac{\text{kgV}(N, k)}{k}.$$

Dabei ist $\text{ggT}(N, k)$ der *größte gemeinsame Teiler* von N, k , und $\text{kgV}(N, k)$ das *kleinste gemeinsame Vielfache* von N, k .

Lösung 1.5:

Die Periode N_y von $y[n] = x[Mn]$ ergibt sich zu

$$N_y = \frac{N_x}{\text{ggT}(N_x, M)} = \frac{\text{kgV}(N_x, M)}{M},$$

wobei N_x die Periode von $x[n]$ ist. Das Ergebnis kann auch sehr einfach an Hand des δ -Pulses

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN_x]$$

veranschaulicht werden.

Lösung 1.6:

$$\text{a) } d_k = c_k(-1)^k$$

$$\text{b) } d_k = c_{-k}$$

$$\text{c) } d_k = \Re\{c_k\}$$

$$\text{d) } \text{Periode } N \text{ von } x[n] \text{ ungerade: } d_k = \begin{cases} c_{\frac{k}{2}} & k = 0, 2, 4 \dots N-1 \\ c_{\frac{k+N}{2}} & k = 1, 3, 5 \dots N-2 \end{cases}$$

$$\text{Periode } N \text{ von } x[n] \text{ gerade: } d_k = c_k + c_{k+\frac{N}{2}} \quad k = 0, 1, 2 \dots \frac{N}{2} - 1$$

Hinweis: Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen d_k und c_k aus

$$d_k = \frac{1}{N_y} \sum_{n=0}^{N_y-1} x[2n] e^{-j \frac{2\pi}{N_y} nk} = \frac{1}{N_y} \sum_{n=0}^{N_y-1} \left[\sum_{l=0}^{N_x-1} c_l e^{j \frac{2\pi}{N_x} 2nl} \right] e^{-j \frac{2\pi}{N_y} nk}$$

mit der Periode $N_x = N$ von $x[n]$ und der Periode N_y von $y[n] = x[2n]$.

- e) Ist N die Periode von $x[n]$ und ist außerdem $\frac{L}{M}N$ ganzzahlig (d.h. $N = \frac{\text{kgV}(M,L)}{L}$), dann besitzt $y[n]$ ebenfalls die Periode N und es gilt:

$$d_k = \frac{1}{2} c_{k - \frac{L}{M}N} + \frac{1}{2} c_{k + \frac{L}{M}N}.$$

f)
$$d_k = \sum_{l=0}^{N-1} c_l c_{k-l}$$

Lösung 1.7:

a)
$$c_k = \delta_8[k] - \frac{1}{2} \delta_8[k-1] - \frac{1}{2} \delta_8[k+1]$$

mit dem N -periodischen δ -Puls $\delta_N[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[k - lN]$.

b)
$$c_k = \frac{2}{3} e^{j \frac{2\pi}{3} k} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2} e^{-j \frac{\pi}{3} k}}$$

c)
$$c_k = \frac{1}{3}, \quad \forall k$$

d)
$$c_k = \delta_N \left(k - \frac{L}{M} N \right)$$

mit der Periode $N = \frac{M}{\text{ggT}(M,L)}$ von $x[n]$ (siehe Aufgabe 1.4).

e)
$$c_k = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{4} k + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} k = \frac{1}{8} \frac{\sin \frac{5\pi}{8} k}{\sin \frac{\pi}{8} k}$$

Hinweis: Die rechte Form der Lösung erhält man bei Anwendung der Summenformel einer endlichen geometrischen Reihe.

Lösung 1.8:

$$\begin{aligned} c[0] &= 0, \quad c[3] = 1, \\ x[0] &= 4, \quad x[1] = -2, \quad x[2] = 0, \quad x[3] = -2. \end{aligned}$$

Lösungsweg:

- c_3 : die Eigenschaft “**reelles Signal**” ist gleichbedeutend mit folgender Symmetrieeigenschaft:

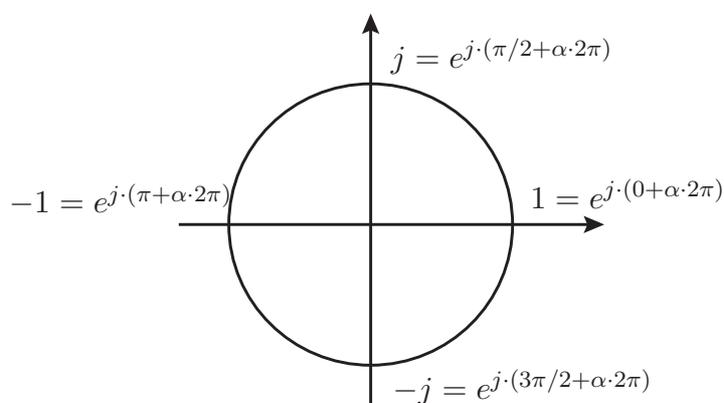
$$c_k = c_{N-k}^*$$

und daher:

$$c_1 = c_3 = 1 .$$

- Aus der **Mittelwertfreiheit** folgt unmittelbar: $c_0 = 0$. (Ein Gleichanteil hat Frequenz 0!)

Entlang des Einheitskreises lassen sich komplexe Exponentialfunktionen besonders leicht in ihre kartesischen Entsprechungen umwandeln:



wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

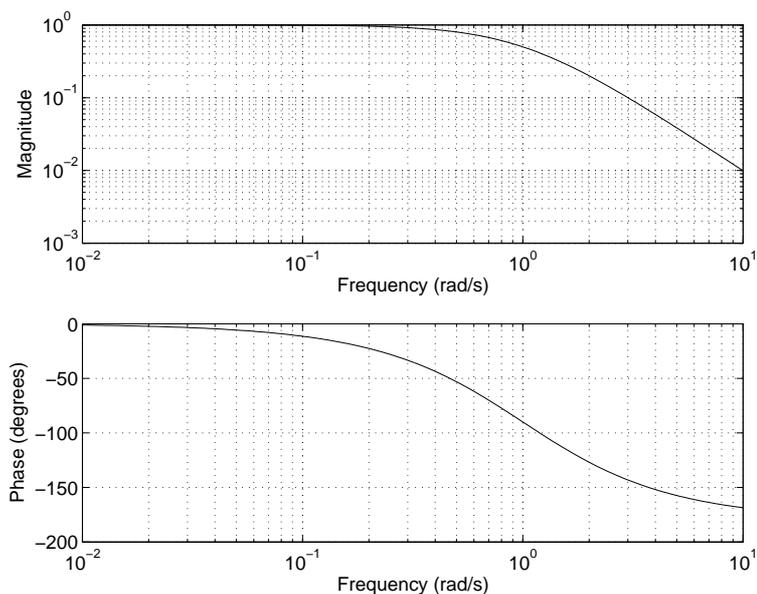
- Mit $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j \frac{2\pi k}{N} n}$ ergibt sich für **eine Periode des Signals im Zeitbereich**:

$$\begin{array}{rclclcl}
 x[0] & = & 0 & +1 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 0} & +2 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 0} & +1 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 0} & = & 4 \\
 x[1] & = & 0 & +1 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 1} & +2 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 1} & +1 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 1} & = & -2 \\
 x[2] & = & 0 & +1 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 2} & +2 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 2} & +1 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 2} & = & 0 \\
 x[3] & = & 0 & +1 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 3} & +2 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 2 \cdot 3} & +1 e^{j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot 3 \cdot 3} & = & -2
 \end{array}$$

Lösung 1.9:

a) $X_a(j\omega) = \frac{\tau}{(1 + j\omega\tau)^2}$

- b) Verwenden Sie z.B. den MATLAB-Befehl `freqs(1, [1 2 1]);`, um das folgende Diagramm für $\tau = 1$ sec. zu erhalten:



$$c) X(e^{j\theta}) = \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + j\frac{\theta + 2\pi k}{T}\tau)^2}$$

d) Verwenden Sie MATLAB, um $X(e^{j\theta})$ für $\frac{\tau}{T} = 5$ zu plotten. Es genügen drei Terme ($k = -1, 0, 1$).

$$e) f_s > \frac{5}{3\pi^2 \varepsilon \tau}$$

$$f) f_s > 16887 \text{ Hz}$$

A.2 Zeitdiskrete Systeme

Lösung 2.1:

- Das System ist linear, zeitinvariant, BIBO-stabil und kausal. Die Impulsantwort ist $h[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$.
- Das System ist nichtlinear, zeitinvariant, BIBO-stabil und kausal.
- Das System ist linear, zeitinvariant, BIBO-stabil und akausal. Die Impulsantwort ist $h[n] = \sigma[n + 4] \sigma[-n + 2]$.
- Das System ist linear, zeitvariant, BIBO-stabil und akausal.
- Das System ist linear, zeitvariant, BIBO-stabil und akausal.
- Das System ist linear, zeitvariant, BIBO-stabil und kausal.

- g) Das System ist linear, zeitinvariant, BIBO-stabil und akausal. Die Impulsantwort ist $h[n] = \delta[n - 1] + \delta[n] - \delta[n + 1]$.

Lösung 2.2:

$$\text{a) } y[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \sigma[n]$$

$$\text{b) } y[n] = \begin{cases} \frac{1}{1 - \alpha} & n \leq 0 \\ \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} & n > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } y[n] = \frac{1}{1 - \alpha} ((1 - \alpha^{n+1}) \sigma[n] - (1 - \alpha^{n-N}) \sigma[n - N - 1])$$

$$\text{d) } y[n] = \frac{1}{1 - \alpha} ((1 - \alpha^{n+1+N}) \sigma[n + N] - (1 - \alpha^{n-N}) \sigma[n - N - 1])$$

$$\text{e) } y[n] = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} \sigma[n]$$

Für $\alpha = \beta$ erhält man $y[n] = (n + 1) \alpha^n \sigma[n]$.

Lösung 2.3:

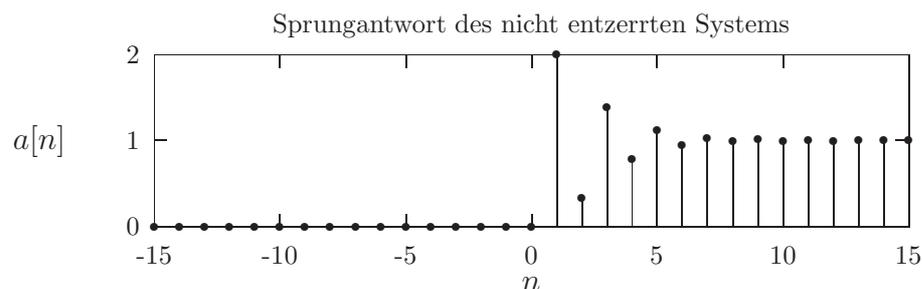
$$y[n] = (h_1 * y_1)[n] = h_1[n]$$

Lösung 2.4:

$$h[n] = (h_1 * \sigma)[n] = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \sigma[n]$$

Lösung 2.5:

$$\text{a) } a[n] = \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) \sigma[n]$$



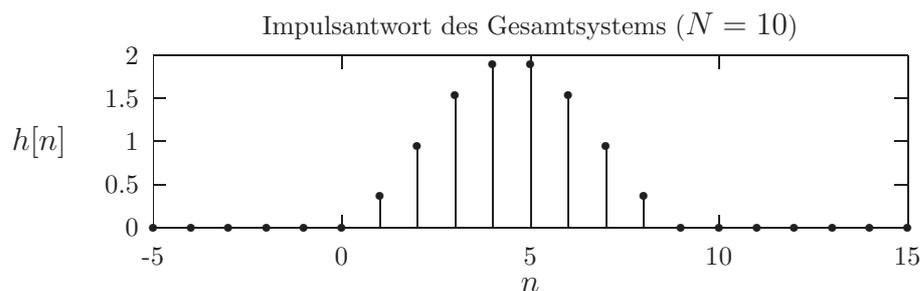
$$\text{b) } a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{12}, \quad c = \frac{1}{12}$$

$$\text{c) } n_0 = 1$$

Lösung 2.6:

$$\text{a) } h_1[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 2 \sin \frac{\pi}{N} n \sin \frac{\pi}{N} (n+1) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \geq N \end{cases}$$



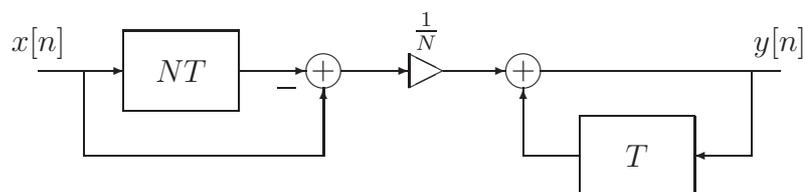
$$\text{b) } y[n] = 0$$

$$\text{c) } y[n] \rightarrow \infty$$

Vertauschung ist nicht zulässig, da Impulsantwort $h_2[n]$ für $n \rightarrow \infty$ nicht abklingt (d.h. ein Teilsystem der Kettenschaltung ist instabil).

Lösung 2.7:

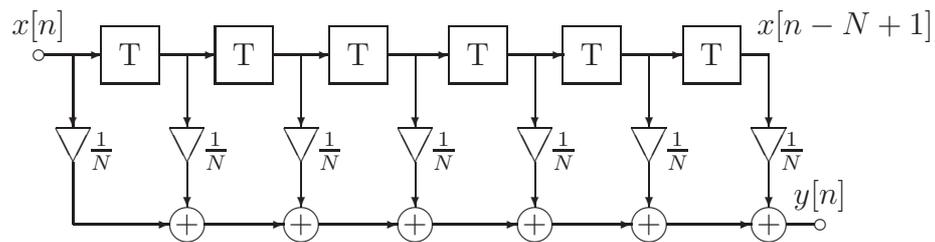
a)



$$b) \quad h[n] = \frac{1}{N}(\sigma[n] - \sigma[n - N])$$

$$a[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1}{N}(n + 1) & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 1 & n \geq N \end{cases}$$

c)

**Lösung 2.8:**

a) $y[n] = nx[n]$

b) trivial

c) System ist linear, reellwertig, zeitvariant, stabil für $|x[n]| \propto \frac{1}{n^p}$, $n \rightarrow \infty$ und $p \geq 1$ **Lösung 2.9:**

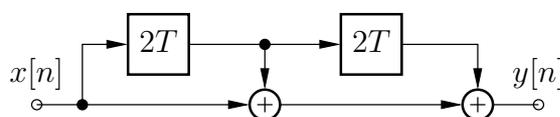
a) linear, akausal, stabil, zeitinvariant

b) $h[n] = \delta[n + 2] + \delta[n] + \delta[n - 2]$

$$H(e^{j\theta}) = 1 + 2 \cos 2\theta$$

c) $y[n] = H(e^{j\pi}) e^{j\pi n} = 3(-1)^n$

d) $\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}}$

e) Für Kausalität muß $h[n]$ um $2T$ verzögert werden:

A.3 Fouriertransformation zeitdiskreter Signale und Systeme

Lösung 3.1:

$$\text{a) } X(e^{j\theta}) = \frac{\alpha e^{-j\theta} \sin \theta_0}{1 + \alpha^2 e^{-2j\theta} - 2\alpha e^{-j\theta} \cos \theta_0}$$

$$\text{b) } X(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\theta}}$$

$$\text{c) } X(e^{j\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\theta + \frac{3\pi}{4} \right) & -\frac{3\pi}{4} < \theta < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \\ -\frac{1}{2\pi} \left(\theta - \frac{3\pi}{4} \right) & \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{sonst in } [-\pi, \pi] \end{cases}$$

$$\text{d) } X(e^{j\theta}) = \frac{3}{5 - 4 \cos \theta}$$

$$\text{e) } X(e^{j\theta}) = -\frac{12j \sin \theta}{(5 - 4 \cos \theta)^2}$$

$$\text{f) } X(e^{j\theta}) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \pi - 2\pi l) = 2\pi \delta_{2\pi}(\theta - \pi)$$

$$\text{g) } X(e^{j\theta}) = 1 + \sum_{k=1}^9 \frac{k}{5} \cos((10 - k)\theta) = \frac{1}{10} \left(\frac{\sin 5\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)^2$$

Hinweis: Stellen Sie z.B. $x[n]$ als Faltung zweier Rechtecksignale dar (mit den Werten $1/\sqrt{10}$ für $n \in [0, 9]$ und 0 sonst) und verschieben Sie das Faltungsergebnis (Maximum bei $n = 0$).

Lösung 3.2:

$$\text{a) } x[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

$$\text{b) } x[n] = \frac{2\pi}{\theta_g} \left(\frac{\sin \frac{\theta_g}{2} n}{\pi n} \right)^2$$

$$\text{c) } x[n] = \begin{cases} -\frac{1+(-1)^n}{2\pi j n} & n \neq 0 \\ \frac{1}{2} & n = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } x[n] = \frac{6}{5} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^n - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) \sigma[n]$$

Lösung 3.3:

$$\text{a) } y[n] = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{4} n$$

$$\text{b) } y[n] = \frac{5}{8} + \frac{\sin \frac{5\pi}{8}}{4 \sin \frac{\pi}{8}} \cos \frac{\pi}{4} n \text{ (Hinweis: Superposition der Lösung von a))}$$

$$\text{c) } y[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{3}(n+1)}{(n+1)\pi} + \frac{\sin \frac{\pi}{3}(n-1)}{(n-1)\pi}$$

$$\text{d) } y[n] = x[n]$$

$$\text{e) } y[n] = 0$$

Lösung 3.4:

$$\text{a) } y[n] = 2 \frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{n} x[n]$$

b) Das System ist linear, zeitvariant, kausal, BIBO-stabil und reellwertig.

c) Das System kann nicht durch eine Impulsantwort $h[n]$ beschrieben werden.

Lösung 3.5:

$$\text{a) } P(e^{j\theta}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{N}$$

$$Y(e^{j\theta}) = \frac{1}{N} H_{TP}(e^{j\theta})$$

$$\text{b) } y[n] = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{3\pi}{N} n}{\pi n}$$

Lösung 3.6:

$$\text{a) } P(e^{j\theta}) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \pi - 2\pi l) = 2\pi \delta_{2\pi}(\theta - \pi)$$

$$U(e^{j\theta}) = X(e^{j(\theta-\pi)})$$

$$V(e^{j\theta}) = U(e^{j\theta})$$

$$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})$$

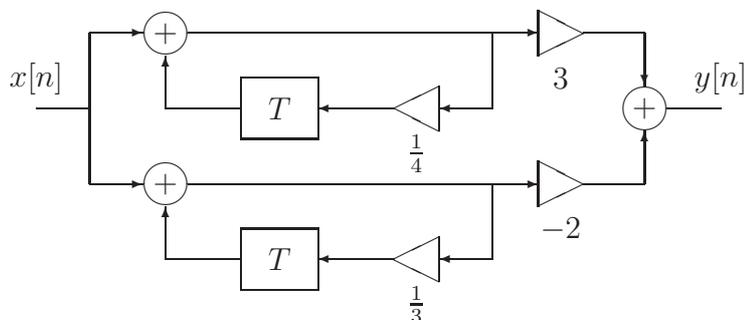
$$\text{b) } y[n] = x[n] = 4 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{\pi n} \right)^2$$

Lösung 3.7:

$$\text{a) } H(e^{j\theta}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\theta}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\theta}\right)} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\theta}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\theta}}$$

$$\text{b) } h[n] = \left(3 \left(\frac{1}{4} \right)^n - 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) \sigma[n]$$

c)

**Lösung 3.8:**

$$\text{a) } h_{TP}[n] = \frac{\sin \frac{\pi}{4} n}{\pi n}$$

$$\text{b) } h[n, k] = \frac{\sin \frac{\pi}{8} (n - 2k)}{\pi (n - 2k)}$$

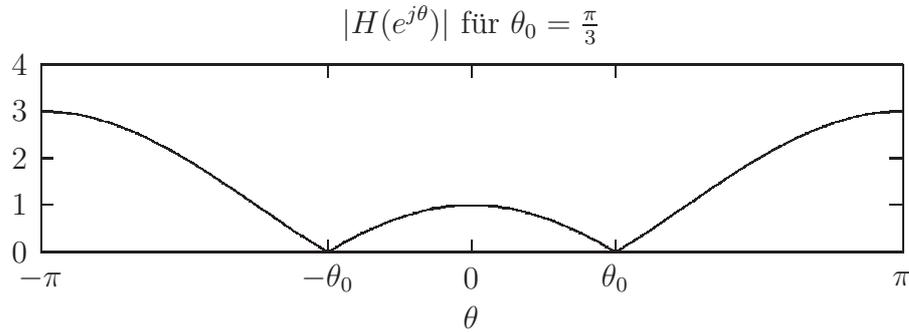
$$\text{c) } Y(e^{j\theta}) = \begin{cases} X(e^{j2\theta}) & |\theta| < \frac{\pi}{8} \\ 0 & \text{sonst in } [-\pi, \pi] \end{cases}$$

d) Das Gesamtsystem ist linear, zeitvariant, akausal, instabil und reellwertig.

Lösung 3.9:

$$\text{a) } \alpha = -2 \cos \theta_0 \text{ und } \beta = 1$$

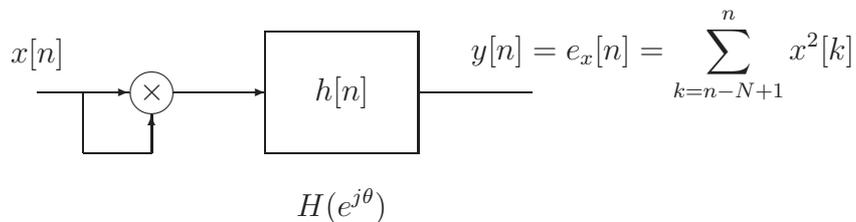
$$\text{b) } H(e^{j\theta}) = 2(\cos \theta - \cos \theta_0) e^{-j\theta}$$



Der Phasenverlauf von $H(e^{j\theta})$ ist linear, mit einem Sprung der Höhe π bei $\theta = \theta_0$.

Lösung 3.10:

a)



$$b) E_x(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} (X * X)(e^{j\theta}) H(e^{j\theta})$$

$$\text{mit } H(e^{j\theta}) = \frac{\sin \frac{N\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{-j\frac{N-1}{2}\theta}$$

$$c) N = \frac{k\pi}{\theta_0}, \text{ wobei } k\pi \text{ durch } \theta_0 \text{ teilbar sein muss.}$$

Lösung 3.11:

$$a) P(e^{j\theta}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$Z(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} (X * P)(e^{j\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\theta - j\frac{2\pi}{N}k})$$

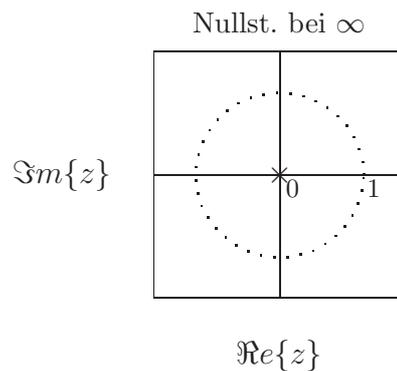
$$Y(e^{j\theta}) = 2 \begin{cases} 1 - \frac{|\theta|N}{\pi} & 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{N} \\ 0 & \frac{\pi}{N} \leq |\theta| \leq \pi \end{cases}$$

$$b) y[n] = 4N \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2N}n}{\pi n} \right)^2$$

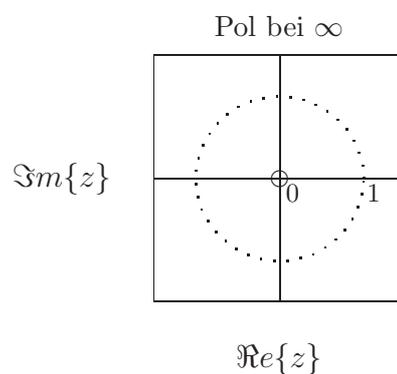
A.4 \mathcal{Z} -Transformation

Lösung 4.1:

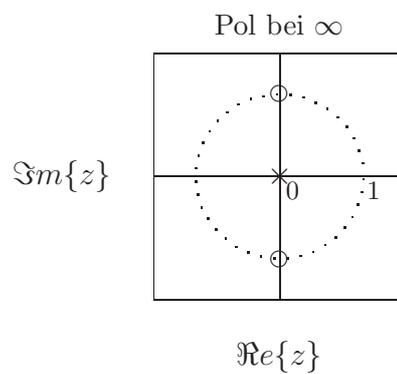
a) $X(z) = \frac{1}{z}$, $0 < R_x \leq \infty$ Nullstelle bei ∞ , Pol bei 0



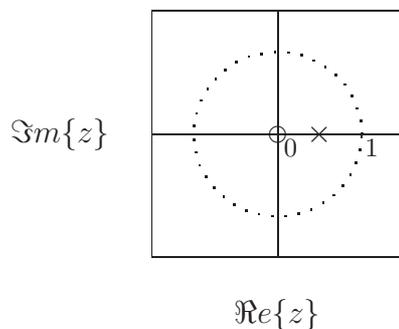
b) $X(z) = z$, $0 \leq R_x < \infty$ Nullstelle bei 0, Pol bei ∞



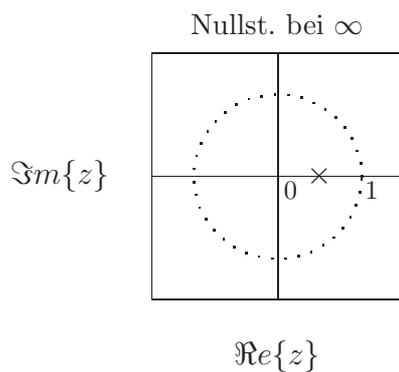
c) $X(z) = \frac{z^2 + 1}{z}$, $0 < R_x < \infty$ Nullstellen bei j und $-j$, Pole bei 0 und ∞



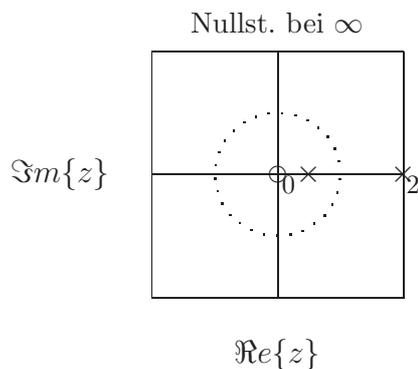
d) $X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$, $\frac{1}{2} < R_x \leq \infty$ Nullstelle bei 0, Pol bei $\frac{1}{2}$



e) $X(z) = \frac{1}{1 - 2z}$, $0 \leq R_x < \frac{1}{2}$ Nullstelle bei ∞ , Pol bei $\frac{1}{2}$

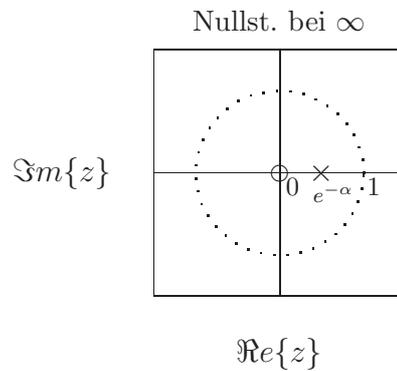


f) $X(z) = -\frac{\frac{3}{2}z}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)}$, $\frac{1}{2} < R_x < 2$ Nullstellen bei 0, ∞ , Pole bei $\frac{1}{2}$, 2



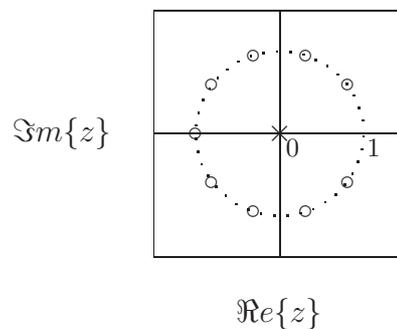
$$\text{g) } X(z) = \frac{e^{-\alpha}}{z(1 - e^{-\alpha}\frac{1}{z})^2}, \quad e^{-\alpha} < R_x \leq \infty$$

Nullstellen bei 0 und ∞ , 2-facher Pol bei $e^{-\alpha}$



$$\text{h) } X(z) = \frac{z^{10} - 1}{z^9(z - 1)}, \quad 0 < R_x \leq \infty$$

Nullstellen bei $e^{j\phi_k}$ $\phi_k = \frac{2\pi k}{10}$, $k = 1 \dots 9$, 9-facher Pol bei 0. Bei $z = 1$ tritt eine Pol-Nullstellenauslöschung auf.



Lösung 4.2:

$$\text{a) rechtsseitig: } x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n]$$

$$\text{linksseitig: } x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[-n - 1]$$

$$\text{b) rechtsseitig: } x[n] = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \sigma[n]$$

linksseitig: $x[n] = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 2 \right) \sigma[-n-1]$

c) rechtsseitig: $x[n] = 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \sigma[n] - \delta[n]$

linksseitig: $x[n] = -2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \sigma[-n] + \delta[n]$

Lösung 4.3:

a) Pole: $z_{\infty 1} = 1/4$, $z_{\infty 2} = 1/2$; Nullstelle: $z_{01} = 0$; Konvergenzbereich: $1/2 < |z| \leq \infty$

$$H(z) = 4 \left(\frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \right) .$$

und

$$h[n] = 4 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] \sigma[n]$$

b)

$$H(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{3} \right) \left(z + \frac{1}{4} \right)} = \frac{12}{7} \left(\frac{1}{z - \frac{1}{3}} - \frac{1}{z + \frac{1}{4}} \right)$$

Pole: $z_{\infty 1} = -1/4$, $z_{\infty 2} = 1/3$; Nullstelle: $z_{01} = \infty$; Konvergenzbereich: $1/3 < |z| \leq \infty$

$$h[n] = \frac{12}{7} \left[3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right] \sigma[n-1]$$

c)

$$H(z) = \frac{1}{(3z-1)(6z-1)(2z-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z - \frac{1}{6}} - \frac{1}{z - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$$

Pole: $z_{\infty 1} = 1/6$, $z_{\infty 2} = 1/3$, $z_{\infty 3} = 1/2$; Nullstelle: $z_{01} = \infty$; Konvergenzbereich: $1/2 < |z| \leq \infty$

$$h[n] = \left[3 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] \sigma[n-1]$$

d)

$$H(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2} \right)^2} = \frac{1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2} \right)^2}$$

Lösung 4.4:

a) $H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}$

b) Pole bei $\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{3}}{4}$, 2-fache Nullstelle bei $z = 0$

$$\text{c) } y[n] = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} n\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n]$$

Lösung 4.5:

$$\text{a) } H(z) = \frac{z - \frac{k}{4}}{z + \frac{k}{3}}$$

b) Für Stabilität muss $|k| < 3$ sein

Pol bei $-\frac{k}{3}$ und Nullstelle bei $\frac{k}{4}$

$$\text{c) } h[n] = \left(-\frac{k}{3}\right)^n \sigma[n] - \frac{k}{4} \left(-\frac{k}{3}\right)^{n-1} \sigma[n-1] = \frac{7}{4} \left(-\frac{k}{3}\right)^n \sigma[n] - \frac{3}{4} \delta[n]$$

$$a[n] = \frac{1 - \frac{k}{4}}{1 + \frac{k}{3}} \sigma[n] + \frac{7}{4} \frac{1}{1 + \frac{3}{k}} \left(-\frac{k}{3}\right)^n \sigma[n] = \left(\frac{7}{4} \frac{1 - \left(-\frac{k}{3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{k}{3}} - \frac{3}{4}\right) \sigma[n]$$

Lösung 4.6:

$$\text{a) } y[n] = -\frac{15}{7} (-3)^n \sigma[n] + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n]$$

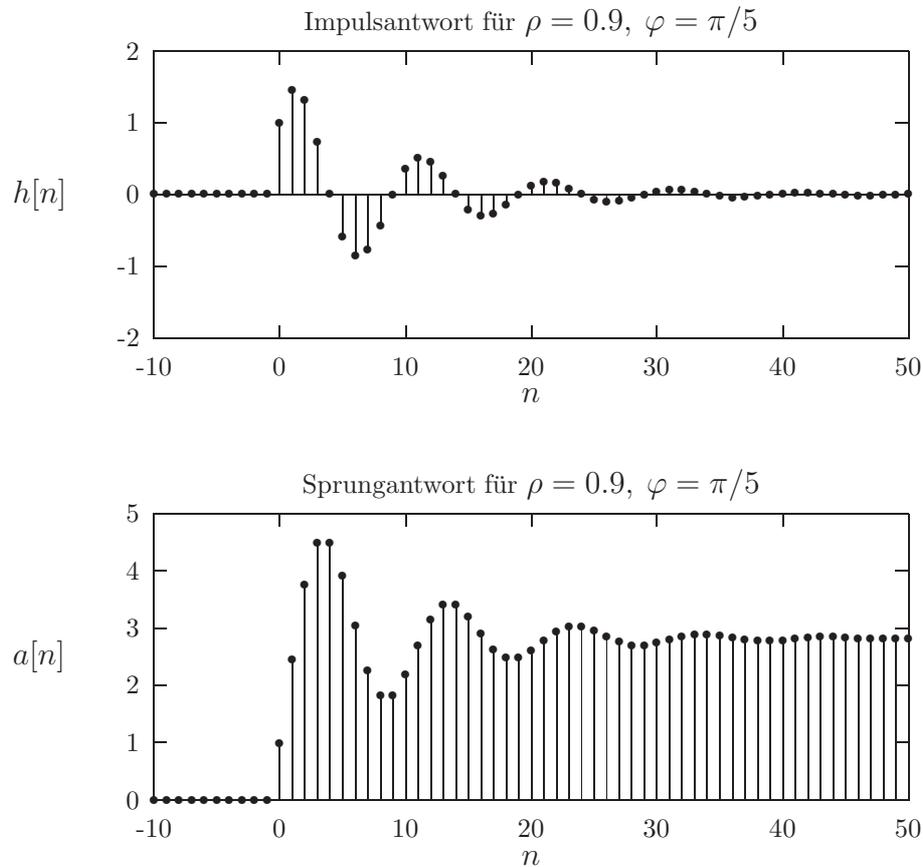
$$\text{b) } y[n] = \sigma[n]$$

$$\text{c) } y[n] = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \sigma[n]$$

Lösung 4.7:

$$h[n] = \rho^n \frac{\sin \varphi(n+1)}{\sin \varphi} \sigma[n]$$

$$a[n] = \frac{1}{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2} \left(1 - \frac{\rho^{n+1} \sin \varphi(n+2) - \rho^{n+2} \sin \varphi(n+1)}{\sin \varphi}\right) \sigma[n]$$

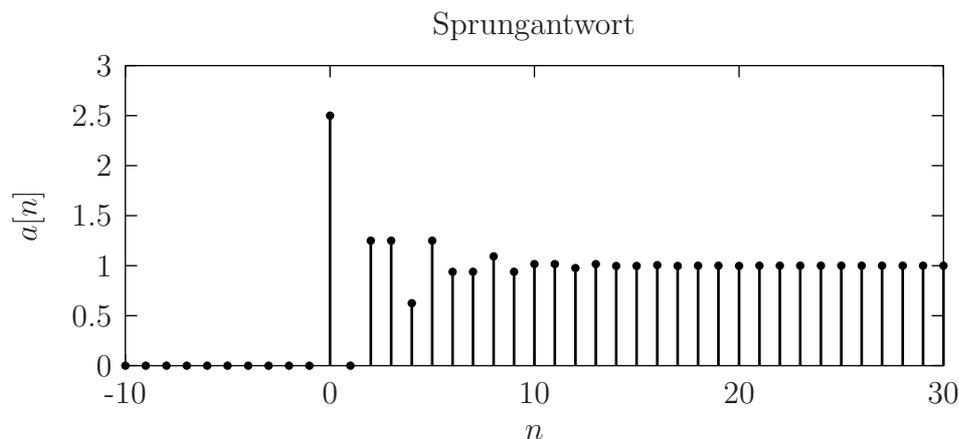
**Lösung 4.8:**

a) $H(z) = \frac{5}{2} \frac{z^2}{z^2 + z + \frac{1}{2}}$

b) $z_{0,1,2} = 0$, $z_{\infty 1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$

c)

$$\begin{aligned}
 a[n] &= \sigma[n] + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} \left[3 \cos \frac{3\pi}{4}n - \sin \frac{3\pi}{4}n \right] \sigma[n] \\
 &= \sigma[n] + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} \left[3 \sin \frac{\pi}{4}(n+2) - \cos \frac{\pi}{4}(n+2) \right] \sigma[n] \\
 &= \sigma[n] + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos \frac{3\pi}{4}n \sigma[n] + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} \sin \frac{3\pi}{4}(n+1) \sigma[n]
 \end{aligned}$$



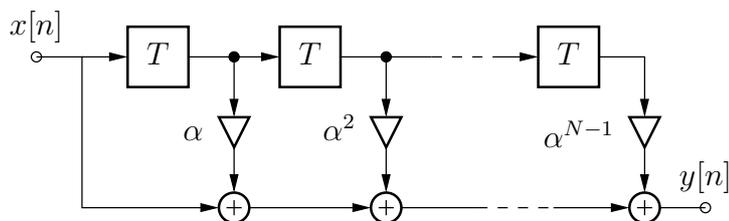
d) $y[-1] = y[-2] = 1$

Lösung 4.9:

a) $H(z) = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - \alpha^N}{z - \alpha}$

$N - 1$ facher Pol bei $z = 0$, $N - 1$ Nullstellen $z_{0l} = \alpha e^{j\frac{2\pi l}{N}}$ $l = 1 \dots N - 1$, stabil für alle endlichen Werte von α

b)



c) $N - 1$ Additionen, Multiplikationen und Speicherelemente

d) Filter links: $H_1(z) = 1 - \alpha^N z^{-N}$

Filter rechts: $H_2(z) = z^{-1}$

e) Das in der Angabe abgebildete Gesamtsystem ist für alle endlichen Werte von α stabil, da es ja eine Impulsantwort endlicher Dauer hat. Das rekursive Teilsystem ist jedoch nur für $|\alpha| < 1$ stabil. Wegen der Pol/Nullstellenauslöschung bei $z = \alpha$ ist das Gesamtsystem stabil. Eine Vertauschung der Teilsysteme des Gesamtsystems ist jedoch für $|\alpha| \geq 1$ nicht zulässig (warum?).

f) 2 Additionen und Multiplikationen, $N+1$ Speicherelemente

Lösung 4.10:

a) trivial

b)
$$H(z) = k \frac{(z-b)(z-\frac{1}{b})}{z(z-a)}$$

$$k = \frac{1-a}{(1-b)(1-\frac{1}{b})}$$

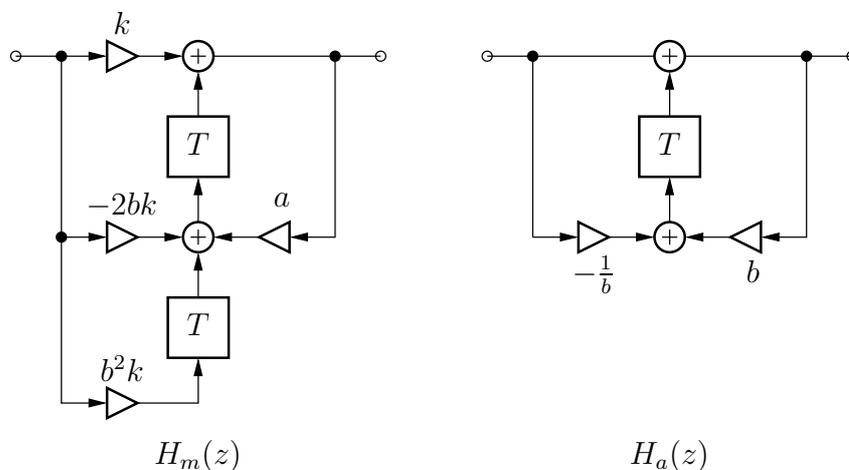
c)
$$H_m(z) = k \frac{(z-b)^2}{z(z-a)}$$

Pole bei $z = 0$ und $z = a$, zweifache Nullstelle bei $z = b$

d)
$$H_a(z) = \frac{z-\frac{1}{b}}{z-b}$$

Pol bei $z = b$, Nullstelle bei $z = \frac{1}{b}$ e) stabil für $|a| < 1$ und $|b| < 1$, kausal

f)

**Lösung 4.11:**

a)
$$H(e^{j\theta}) = \frac{3}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}} \quad h[n] = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n]$$

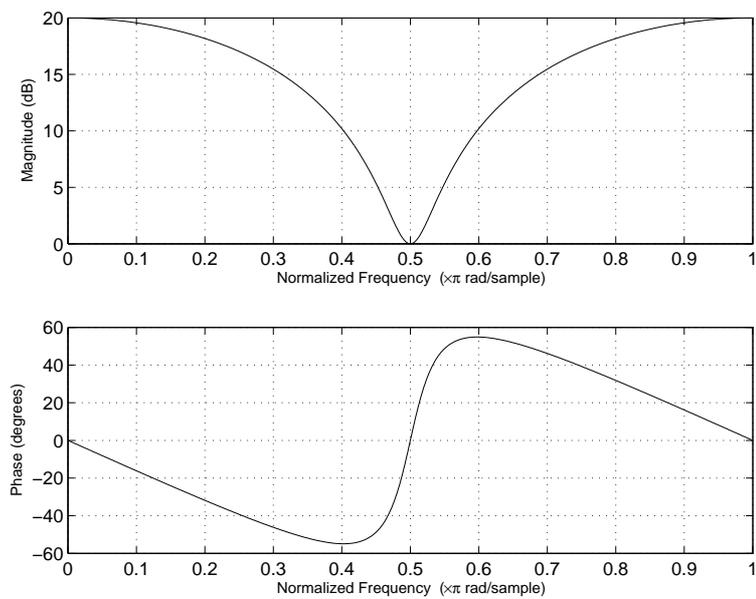
b)
$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \frac{3}{2}x[n]$$

c) trivial

Lösung 4.12:

$$\text{a) } b_1 = \frac{H_0 + 1}{2} \quad b_2 = \frac{H_0 - 1}{2}$$

Skizze mit MATLAB: `H0 = 10; freqz([0.5*(H0+1) 0 0.5*(H0-1)],1);`



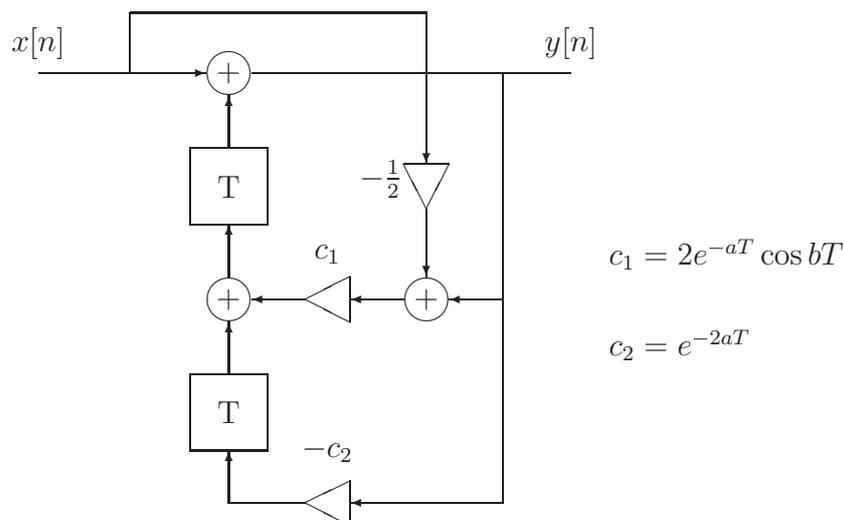
- b) b₁) nichtrekursiv
 b₂) lineare Phase für b₁ = 0 oder b₂ = 0
 b₃) trivial

$$\text{c) } z_{\infty,1,2} = 0, z_{0,1,2} = \pm j \sqrt{\frac{H_0 - 1}{H_0 + 1}}$$

A.5 Digitale Filter**Lösung 5.1:**

- a) Durch Abtastung der analogen Impulsantwort $h_a(t) = e^{-at} \cos bt \sigma(t)$ erhält man das angegebene $h[n]$. Dabei geht formal $\sigma(t)$ in $\sigma[n]$ über, was bei $t = 0$ nicht stimmt. Siehe dazu den Kommentar bei der Lösung von 5.4 c).

$$\begin{aligned} h[n] &= e^{-aTn} \cos bTn \sigma[n] \\ H(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - e^{-(a+jb)T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-(a-jb)T} z^{-1}} \right) \\ &= \frac{1 - z^{-1} e^{-aT} \cos bT}{1 - 2z^{-1} e^{-aT} \cos bT + z^{-2} e^{-2aT}} \end{aligned}$$



b)

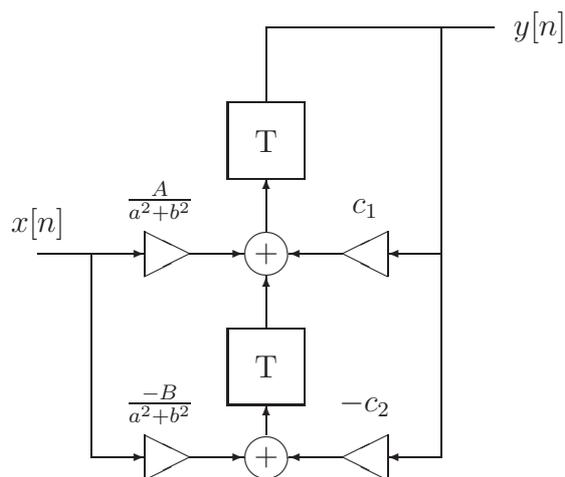
$$a[n] = \frac{1}{a^2 + b^2} (a - ae^{-aTn} \cos bTn + be^{-aTn} \sin bTn) \sigma[n]$$

$$H(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{-(a-jb)T}}{(a-jb)(z - e^{-(a-jb)T})} - \frac{1 - e^{-(a+jb)T}}{(a+jb)(z - e^{-(a+jb)T})} \right)$$

$$= \frac{Az - B}{(a^2 + b^2)(z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT})}$$

$$A = a(1 - e^{-aT} \cos bT) + be^{-aT} \sin bT$$

$$B = a(e^{-aT} \cos bT - e^{-2aT}) + be^{-aT} \sin bT$$

**Lösung 5.2:**

a) $e[n] = h[n] - h_d[n]$

$$\text{b) } \varepsilon^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e[n]|^2$$

c) Mit dem allgemeinen Ansatz

$$h[n] = \begin{cases} a_n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man aus $\varepsilon^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n - h_d[n]|^2$ mit $\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_n} = 0$ den gesuchten Zusammenhang zwischen $h[n]$ und $h_d[n]$.

Lösung 5.3:

a) Aus $\tilde{s} = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ erhält man mit $\tilde{s} = j\omega$ und $z = e^{j\theta}$ die Frequenzverzerrung der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation:

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\theta}{2}.$$

Damit ergibt sich für die Normierungsfrequenz (Grenzfrequenz) des vorverzerrten analogen Referenz Tiefpassfilters

$$\omega_N = \frac{2}{T} \tan \frac{\pi f_g}{f_s}$$

und schließlich

$$s = \frac{\tilde{s}}{\omega_N} = \frac{1}{\tan \pi \frac{f_g}{f_s}} \frac{z-1}{z+1}$$

als normierte Form der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation.

b) Aus $s - s_0 \iff z - z_0$ folgt

$$z_0 = \frac{\cot \pi \frac{f_g}{f_s} + s_0}{\cot \pi \frac{f_g}{f_s} - s_0}.$$

Zusätzlich entsteht durch die bilineare \mathcal{Z} -Transformation pro Pol (Nullstelle) eine Nullstelle (Pol) bei $z = -1$.

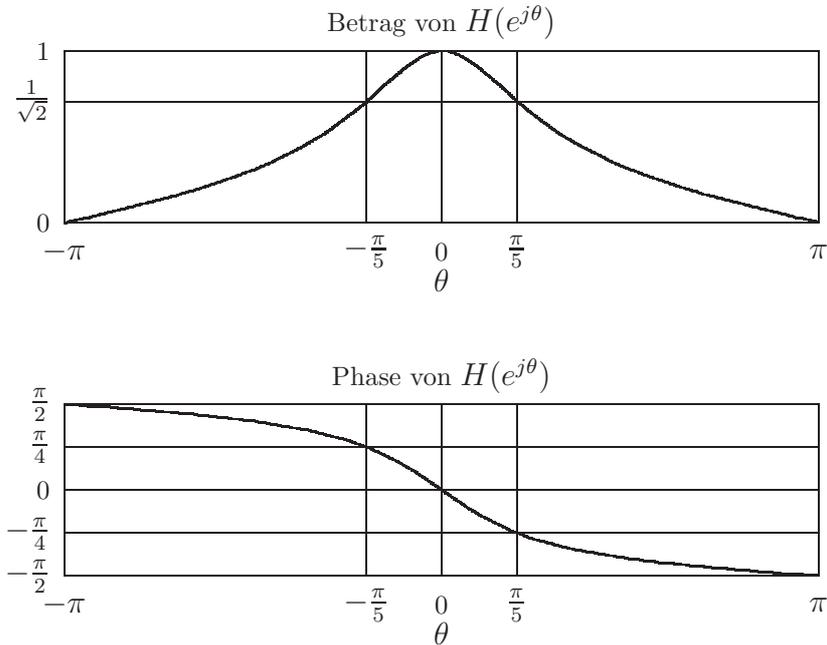
Lösung 5.4:

a)

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{z-1}{v(z+1)}} = \frac{v}{1+v} \frac{z+1}{z - \frac{1-v}{1+v}} \quad v = \tan \frac{\pi}{10}$$

$$|H(e^{j\theta})| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\pi}{10}} \right)^2}}$$

$$\phi(e^{j\theta}) = -\arctan \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\pi}{10}}$$



b)

$$h[n] = k\alpha^n\sigma[n] + k\alpha^{n-1}\sigma[n-1]$$

$$a[n] = \frac{1}{2}((1 - \alpha^{n+1})\sigma[n] + (1 - \alpha^n)\sigma[n-1]).$$

Mit $k = \frac{v}{1+v}$ und $\alpha = \frac{1-v}{1+v}$.

c) $h[n] = \beta e^{-\beta n}\sigma[n], \quad \beta = 2\pi \frac{f_g}{f_s}$

Diese Lösung für $h[n]$ erhält man, wenn bei der Abtastung der Analogfilterimpulsantwort $h_a(t)$ die zeitkontinuierliche Sprungfunktion $\sigma(t)$ formal durch $\sigma[n]$ ersetzt wird. Nun ist aber $\sigma(0) = \frac{1}{2}$ und $\sigma[0] = 1$, d.h. der Wert von $h[0]$ stimmt nicht mit

$Th_a(0)$ überein. Besser ist daher folgende Lösung: $h[n] = \beta \left(e^{-\beta n}\sigma[n] - \frac{1}{2}\delta[n] \right)$.

Bei dieser alternativen Lösung ist $h[0] = Th_a(0)$. Im Vergleich zur ersten Lösung ergibt sich damit auch ein besserer Frequenzgang (warum?).

d) $a[n] = (1 - e^{-\beta n})\sigma[n]$

Lösung 5.5:

a) Mit $z = e^{j\theta}$ erhält man

$$z \rightarrow -z \Rightarrow \theta \rightarrow \theta \pm \pi$$

$$z \rightarrow -z^2 \Rightarrow \theta \rightarrow 2\theta \pm \pi$$

$$z \rightarrow z^2 \Rightarrow \theta \rightarrow 2\theta$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{Hochpass:} \quad \theta_g &= \pi - \theta_{gTP} & f_g &= \frac{f_s}{2} - f_{gTP} \\
\text{Bandpass:} \quad \theta_{g1,2} &= \frac{\pi}{2} \mp \frac{\theta_{gTP}}{2} & f_{g1,2} &= \frac{f_s}{4} \mp \frac{f_{gTP}}{2} \\
\text{Bandsperre:} \quad \theta_{g1} &= \frac{\theta_{gTP}}{2} & f_{g1} &= \frac{f_{gTP}}{2} \\
& \theta_{g2} = \pi - \frac{\theta_{gTP}}{2} & f_{g2} &= \frac{f_s}{2} - \frac{f_{gTP}}{2}
\end{aligned}$$

c) Sperrdämpfungen und Durchlasswelligkeiten ändern sich nicht durch diese Frequenztransformationen.

d) Aus $H_a(s) = \frac{1}{1+s}$ ergibt sich durch Anwendung der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation und der Frequenztransformationen:

$$\begin{aligned}
H_{HP}(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1+z}{v(1-z)}} & H_{HP}(e^{j\theta}) &= \frac{1}{1 - j \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta_g}{2}}} \\
H_{BP}(z) &= \frac{1}{1 - \frac{z^2+1}{v(1-z^2)}} & H_{BP}(e^{j\theta}) &= \frac{1}{1 - j \frac{\cot \theta}{\tan \frac{\theta_g}{2}}} \\
H_{BS}(z) &= \frac{1}{1 + \frac{z^2-1}{v(z^2+1)}} & H_{BS}(e^{j\theta}) &= \frac{1}{1 + j \frac{\tan \theta}{\tan \frac{\theta_g}{2}}}
\end{aligned}$$

Lösung 5.6:

a) Linkes System: $H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2zr \cos \phi + r^2}$

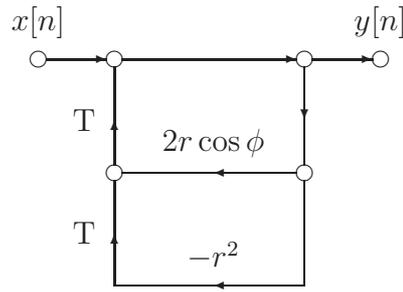
Rechtes System: $H(z) = \frac{z - r \cos \phi}{z^2 - 2zr \cos \phi + r^2}$

b) Linkes System: Pole in $z = r \cos \phi \pm jr \sin \phi$ und zweifache Nullstelle in $z = 0$.

Rechtes System: Pole wie linkes System, Nullstelle in $z = r \cos \phi$ und im Unendlichen.

c) Ein zweifacher reeller Pol kann mit der rechten Struktur nicht realisiert werden, da es zur Pol/Nullstellenauslöschung kommt. Daher ist in diesem Fall die linke Struktur zu verwenden!

d) Beim Transponieren eines Signalflussgraphen werden Eingänge und Ausgänge vertauscht und die Richtungen aller Pfade umgedreht. Durch diese Netzwerktransformation ändert sich das Eingangs/Ausgangsverhalten (Übertragungsfunktion, Impulsantwort, etc.) nicht.



Die rechte Struktur ändert sich nicht durch Transponieren!

Lösung 5.7:

Frequenzgang A gehört zu Filter 3,
 Frequenzgang B gehört zu Filter 1,
 Frequenzgang C gehört zu Filter 4,
 Frequenzgang D gehört zu Filter 2

Lösung 5.8:

$$\text{a) } H(z) = \frac{(a^2 - 1)z}{a(z - a)(z - \frac{1}{a})}$$

b) Pole bei $z = a$ und $z = \frac{1}{a}$, Nullstelle bei $z = 0$
 System ist stabil und akausal für $|a| < 1$

$$\text{c) } |H(e^{j\theta})| = \left| \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \frac{1}{1 - \frac{2a}{1+a^2} \cos \theta} \right| \quad \arg H(e^{j\theta}) \equiv 0$$

$$\text{d) } a[n] = \begin{cases} \frac{1 + a - a^{n+1}}{a^{-n} - a} & n \geq 0 \\ \frac{1}{1 - a} & n < 0 \end{cases}$$

Lösung 5.9:

$$\text{a) } H_{BP}(e^{j\theta}) = H_{TP}(e^{j(\theta - \theta_M)})$$

BP-Bandbreite = doppelte TP-Bandbreite

b) Sperrdämpfung und Welligkeit im Durchlassbereich bleiben erhalten

$$\text{c) } h_{TP}[n] = - \sum_{k=1}^N a_k h_{TP}[n - k] + \sum_{k=0}^M b_k \delta[n - k]$$

$$h_{BP}[n] = - \sum_{k=1}^N a_k e^{j\theta_M k} h_{TP}[n - k] + \sum_{k=0}^M b_k e^{j\theta_M k} \delta[n - k]$$

d) $h_{BP}[n] = h_{TP}[n] \cos \theta_M n$

Verhalten bleibt gleich, bis auf Faktor $\frac{1}{2}$ bei der Übertragungsfunktion

Lösung 5.10:

a) $x_a(t)$ ist bereits als Fourierreihe gegeben, mit den Koeffizienten a_k , $k = 0, 1, 2$

b) b₁) $x[n]$ ist periodisch mit Periode 2

b₂) $x[n] = a_0 + a_1 \cos \pi n + a_2$

b₃) Aliasing tritt auf (konstanter Term a_2 in $x[n]$)

c) $x[n] = a_0 + a_1 \cos \frac{\pi}{3}n + a_2 \cos \frac{2\pi}{3}n$, Periode 6, kein Aliasing

d) FIR-Filter mit $H(z) = 1 - z^{-3}$

d₁) Nullstelle bei $z_{0k} = e^{j\frac{2\pi}{3}k}$, $k = 0, 1, 2$, dreifacher Pol bei $z = 0$

d₂) Filterkoeffizienten siehe $H(z)$

d₃) $h[n] = \delta[n] - \delta[n - 3]$

d₄) lineare Phase (abgesehen von Sprungstellen bei den Sperrstellen)

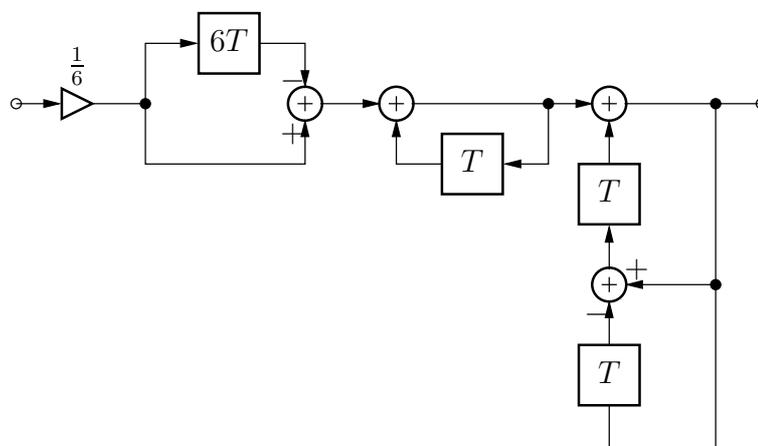
Lösung 5.11:

a) dreifacher Pol bei $z = 0$, Nullstellen $z_{0k} = e^{j\frac{\pi}{3}k}$, $k = 2, 3, 4$

b) linearphasiges Tiefpassfilter 3. Ordnung

c) $K = \frac{1}{6}$

d)



e) $h[n] = \frac{1}{6}\delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n - 1] + \frac{1}{3}\delta[n - 2] + \frac{1}{6}\delta[n - 3]$

A.6 Diskrete Fouriertransformation (DFT) und FFT

Lösung 6.1:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n + mN] e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}$$

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\theta n}$$

$$X(e^{j \frac{2\pi k}{N}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}$$

$$c_k = \frac{1}{N} Y[k]$$

Substituieren Sie $l = n + mN$ und versuchen Sie die verbleibende Doppelsumme aufzulösen.

Alternative:

Verwenden Sie $y[n] = (x * p)[n]$, mit $p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n + mN]$ und vergleichen Sie die Fouriertransformation dieser Darstellung von $y[n]$ mit dem Zusammenhang zwischen der Fouriertransformation periodischer Signale und deren Fourierreihe.

Lösung 6.2:

a) $Y[k] = (-1)^k$

b) $Y[k] = (-1)^k$

c) $Y[k] = 20\delta[k - 2]$

d) $Y[k] = e^{-j \frac{2\pi}{5} k} \frac{\sin \frac{\pi}{2} k}{\sin \frac{\pi}{10} k}$

e) $Y[k] = \frac{1 - \alpha^{\frac{N}{2}} (-1)^k}{1 - \alpha e^{-j \frac{2\pi k}{N}}} + \alpha e^{j \frac{2\pi k}{N}} \frac{1 - \alpha^{\frac{N}{2}} (-1)^k}{1 - \alpha e^{j \frac{2\pi k}{N}}}$

Lösung 6.3:

a) Verwenden Sie die Beziehung $X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$.

Untersuchen Sie die Fälle N gerade und N ungerade getrennt.

b) Verwenden Sie die Beziehung $X[\frac{N}{2}] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] (-1)^n$.

c) Schreiben Sie $\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$ als $\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x^*[n]$.

Lösung 6.4:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+10m] = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+10m} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}, \quad n = 0 \dots 9$$

Lösung 6.5:

a) $H(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = \frac{1}{A[k]}$, wobei $A[k]$ die N-Punkte DFT des "Signals"

$$a[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -a_n & 1 \leq n \leq p \\ 0 & p < n < N \end{cases}$$

ist.

b) $H(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = \frac{B[k]}{A[k]}$, wobei $A[k]$ die N-Punkte DFT des "Signals"

$$a[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -a_n & 1 \leq n \leq p \\ 0 & p < n < N \end{cases}$$

ist, bzw. $B[k]$ jene des "Signals"

$$b[n] = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq q \\ 0 & q < n < N \end{cases}$$

ist, mit $N > \max(p, q)$.

Lösung 6.6:

I. $x[n] = \text{IDFT}_N\{X[k]\} = \frac{1}{N} \text{DFT}_N\{X[-k]\} = \frac{1}{N} \text{DFT}_N\{X[N-k]\}$

II. Für ein reellwertiges $x[n]$ gilt auch $x[n] = \frac{1}{N} \text{DFT}_N\{X^*[k]\}$

III. $x_1[n] = \frac{1}{N} \text{DFT}_N\{\Im\{X[k]\} + j\Re\{X[k]\}\}$

$$x[n] = \Im\{x_1[n]\} + j\Re\{x_1[n]\}$$

Lösung 6.7:

a)

$$\begin{aligned}
X[k] &= X_1[k] + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} X_2[k] & k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1 \\
X_1[k] &= \frac{1}{2} X_c[k] + \frac{1}{2} X_c^*[-k] & k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1 \\
X_2[k] &= \frac{1}{2j} X_c[k] - \frac{1}{2j} X_c^*[-k] & k = 0 \dots \frac{N}{2} - 1 \\
X[k] &= X^*[N - k] & k = \frac{N}{2} \dots N - 1 \\
X\left[\frac{N}{2}\right] &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] - \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r + 1]
\end{aligned}$$

b) Die hier untersuchte Methode benötigt $\frac{N}{2}(\log_2 N - 1)$ Operationen.Es ergibt sich ein Geschwindigkeitssteigerungsfaktor von $\frac{20}{9} = 2.2\dot{2}$.**Lösung 6.8:**

$$\text{a) } X_1[k] = \begin{cases} X\left[\frac{k}{2}\right] & k = 0, 2, 4, \dots, 2N - 2 \\ \sum_{l=0}^{N-1} X[l] G_N\left(e^{j\frac{\pi}{N}(k-2l)}\right) & k = 1, 3, 5, \dots, 2N - 1 \end{cases}$$

$$\text{mit } G_N(e^{j\theta}) = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\theta N}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} e^{-j\theta \frac{N-1}{2}}$$

$$\text{b) } X_2[k] = \begin{cases} 2X\left[\frac{k}{2}\right] & k = 0, 2, 4, \dots, 2N - 2 \\ 0 & k = 1, 3, 5, \dots, 2N - 1 \end{cases}$$

c) für k gerade (abgesehen vom Verstärkungsfaktor 2)d) 1. Fall ist besser, da Werte für ungerade k interpoliert werden (und nicht 0 sind, wie beim 2. Fall)**Lösung 6.9:** $X(e^{j\theta}) = 1 - e^{-j3\theta}$; Abtastung von $X(e^{j\theta})$ an den Stellen $\theta = \frac{\pi}{2}k$ liefert $X[k] = 1 - e^{-j\frac{3\pi}{2}k}$.Die Fourierreihenoeffizienten $c_k = \frac{1}{4}(1 - e^{-j\frac{3\pi}{2}k}) \rightarrow c_k = \frac{1}{N}X[k]$ Die periodische Fortsetzung von $x[n]$ wird mit $\tilde{x}[n]$ bezeichnet: $\tilde{x}[n] = \sum_k x[n - kN]$.Berechnung der Fourierreihenoeffizienten bleibt gleich und es gilt noch immer: $c_k = \frac{1}{N}X[k]$.

A.7 Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung

Lösung 7.1:

- a) Die gesuchte Beziehung ergibt sich aus der Darstellung von $y_a(t)$ als Faltung von $x_p(t)$ und $h_a(t)$ und anschließender Abtastung mit der Rate $\frac{1}{T'}$.
- b) Das System ist zeitvariant.
- c) **Taktratenenerhöhung:** Für ganzzahlige Werte von $L = \frac{T}{T'}$ erhält man

$$y[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h[m - nL]$$

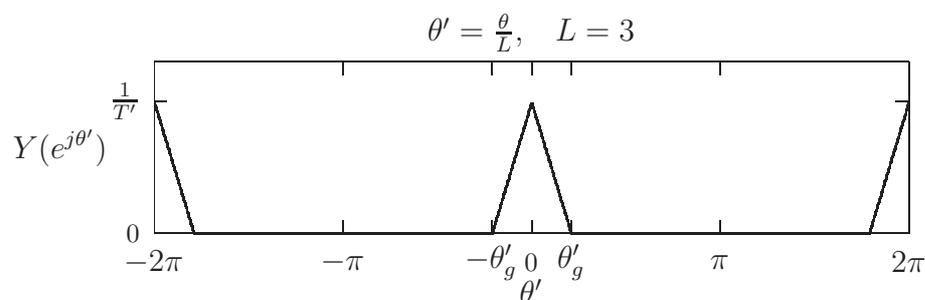
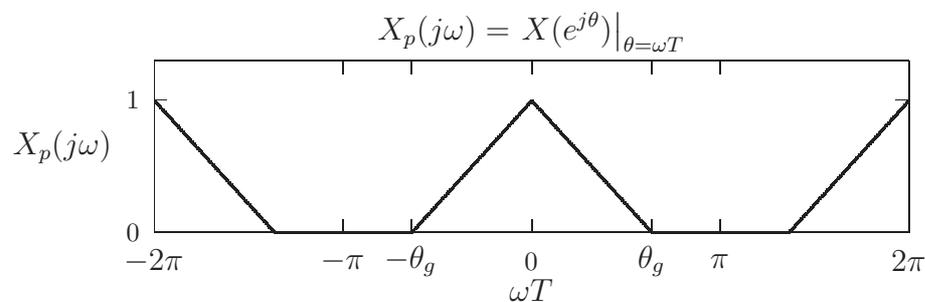
mit $h[m - nL] = h_a((m - nL)T')$.

Taktratenreduktion: Für ganzzahliges $M = \frac{T'}{T}$ folgt

$$y[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h[mM - n]$$

mit $h[mM - n] = h_a((mM - n)T)$.

d)



Lösung 7.2:

a) Die angegebene Beziehung ergibt sich aus

$$w[m] = \begin{cases} x\left[\frac{m}{L}\right] & m = 0, \pm L, \pm 2L, \pm 3L, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$y[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[k] h[m - k].$$

b)

$$\text{b}_1) \quad y[m] = h[m - Ln_0] = \frac{\sin \frac{\pi}{L}(m - Ln_0)}{\pi(m - Ln_0)}$$

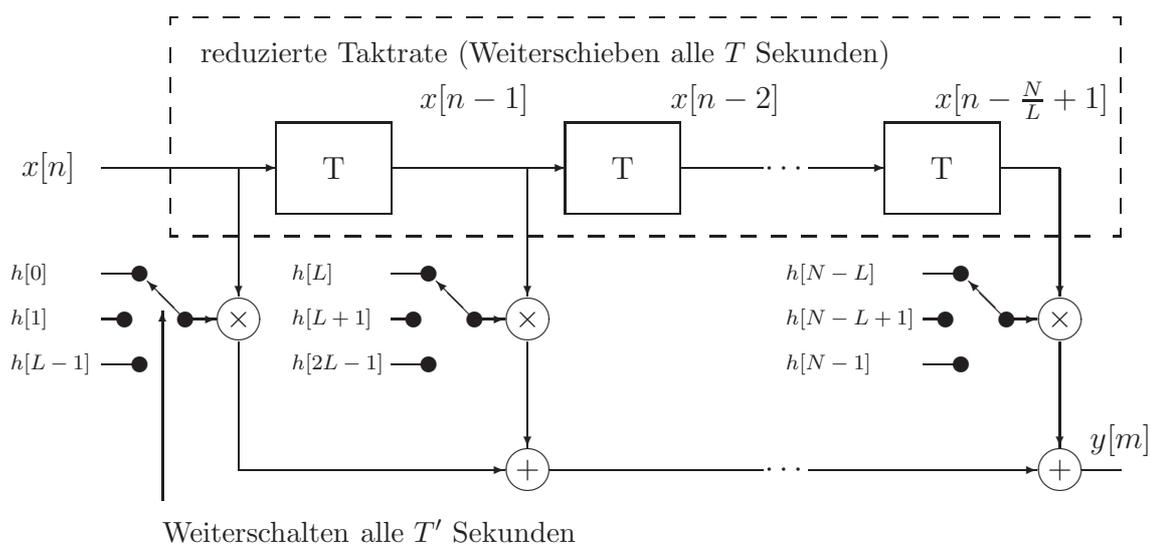
$$\text{b}_2) \quad y[m] = \frac{1}{L} \cos \frac{2\pi}{NL} m$$

c) Setzen Sie die angegebene Substitution ein und beachten Sie, dass $(m - L \lfloor \frac{m}{L} \rfloor)$ der Modulooperation $m \oplus L$ entspricht.

Für eine Impulsantwort $h[m]$ mit endlicher Dauer N folgt

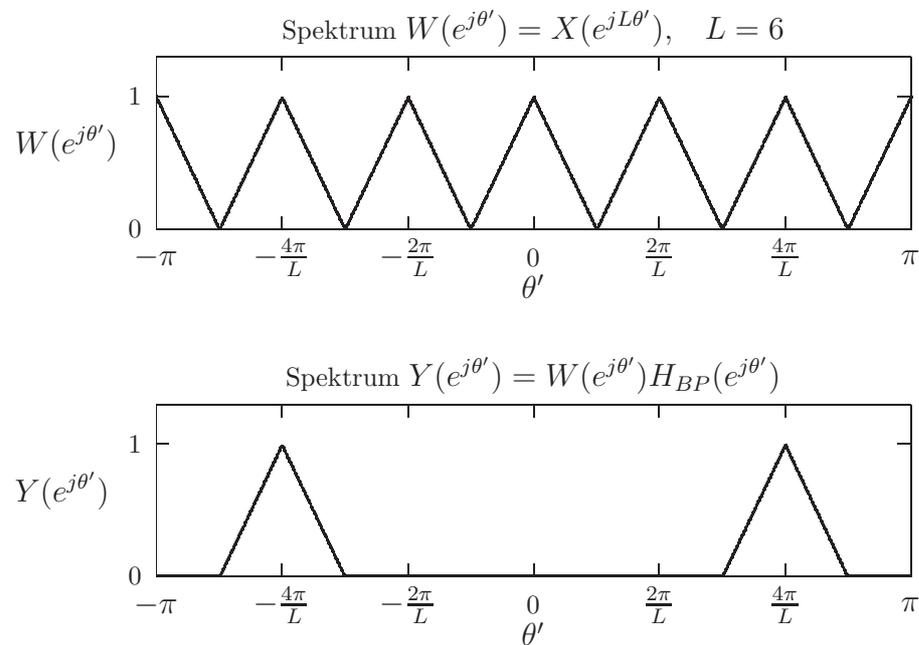
$$y[m] = \sum_{k=0}^{\frac{N}{L}-1} x\left[\left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor - k\right] h[m \oplus L + kL],$$

wobei N durch L teilbar sein muss.



Lösung 7.3:

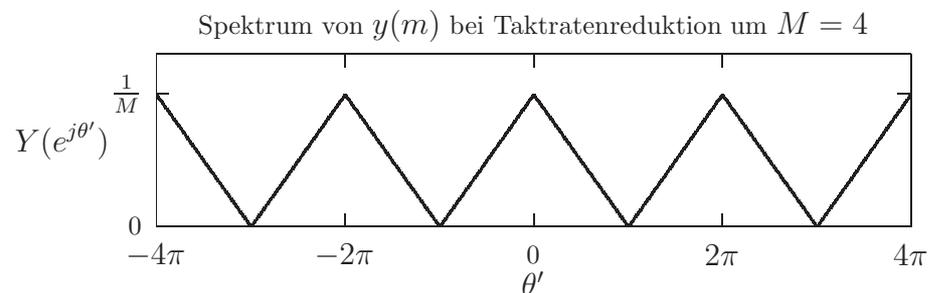
a)



b) $y[m] = 24 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{12} m}{\pi m} \right)^2 \cos \frac{2\pi}{3} m$

Lösung 7.4:

a) $Y(e^{j\theta'}) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X(e^{j\frac{\theta' - 2\pi k}{4}})$



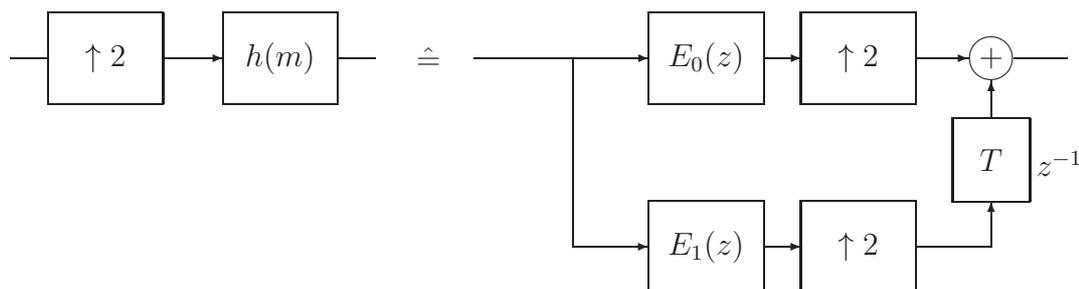
b) $y[m] = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} m}{\pi m} \right)^2$

Lösung 7.5:

a) Die Aufspaltung in Polyphasenfilter folgt aus

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[2n] z^{-2n}}_{E_0(z^2)} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[2n+1] z^{-2n-1}}_{z^{-1} E_1(z^2)}$$

- b) In der Polyphasenzerlegung treten Polynome in z^2 , bzw. z^{-2} auf, so dass bei einer Realisierung immer zwei Verzögerungselemente in Kette geschaltet sind. Dadurch kann eine Abtastratenreduktion um den Faktor 2 an den Eingang des Polyphasenfilters geschoben werden, wobei im Polyphasenfilter je zwei in Kette geschaltete Verzögerungselemente durch eines zu ersetzen sind (Übergang von z^{-2} auf z^{-1}).
- c) Wird das Verzögerungselement beim Polyphasenfilter E_1 an den Ausgang gelegt, so kann eine Taktratenerhöhung am Eingang der Polyphasenfilter an deren Ausgänge geschoben werden.

**Lösung 7.6:**

a)

$$Y(z) = X(z) \left[\frac{1}{2} (F_1(z)G_1(z) + F_2(z)G_2(z)) \right] + X(-z) \left[\frac{1}{2} (F_1(-z)G_1(z) + F_2(-z)G_2(z)) \right]$$

b) $F_1(-z)G_1(z) + F_2(-z)G_2(z) \equiv 0$

$$H(z) = \frac{1}{2} (F_1(z)G_1(z) + F_2(z)G_2(z))$$

c) $G_1(z) = \frac{2F_2(-z)}{F_1(z)F_2(-z) - F_1(-z)F_2(z)}$

$$G_2(z) = \frac{2F_1(-z)}{F_1(z)F_2(-z) - F_1(-z)F_2(z)}$$

B Formeln für Fourier- und Z-Transformation

B.1 Fourierreihen zeitdiskreter periodischer Signale

$x[n] = x[n + N] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$	\iff	$c_k = c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$
$x[n - N_0]$	\iff	$e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} c_k$
$e^{j\frac{2\pi m}{N}n} x[n]$	\iff	c_{k-m}
$x^*[n]$	\iff	c_{-k}^*
$x[-n]$	\iff	c_{-k}
$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n - m]$	\iff	$Nc_k d_k, \quad x, y \text{ gleiche Periode}$
$x[n]y[n]$	\iff	$\sum_{l=0}^{N-1} c_l d_{k-l}, \quad x, y \text{ gleiche Periode}$
$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	\iff	$\Re\{c_k\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	\iff	$j\Im\{c_k\}$
$\Re\{x[n]\}$	\iff	$\frac{1}{2}(c_k + c_{-k}^*)$
$j\Im\{x[n]\}$	\iff	$\frac{1}{2}(c_k - c_{-k}^*)$
$x[n] - x[n - 1]$	\iff	$\left(1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right) c_k$
$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \text{ mit } c_0 = 0$	\iff	$\frac{1}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} c_k$

Einige Fourierreihen²

$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}$	\iff	$\delta[k - m]$
$\cos \frac{2\pi m}{N}n$	\iff	$\frac{1}{2}\delta[k - m] + \frac{1}{2}\delta[k + m]$
$\sin \frac{2\pi m}{N}n$	\iff	$\frac{1}{2j}\delta[k - m] - \frac{1}{2j}\delta[k + m]$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN]$	\iff	$\frac{1}{N} \quad \forall k$
$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1 & N - N_1 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	\iff	$\frac{1}{N} \frac{\sin\left((2N_1 + 1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin \frac{\pi k}{N}}$

²Bei den Beziehungen ist die Periodizität von c_k mit der Periode N zu berücksichtigen.

B.2 Fouriertransformation zeitdiskreter Signale

$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$	\iff	$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\theta n}$
$x[n - N_0]$	\iff	$e^{-j\theta N_0} X(e^{j\theta})$
$e^{j\theta_0 n} x[n]$	\iff	$X(e^{j(\theta - \theta_0)})$
$x^*[n]$	\iff	$X^*(e^{-j\theta})$
$x[-n]$	\iff	$X(e^{-j\theta})$
$(x * y)[n]$	\iff	$X(e^{j\theta}) Y(e^{j\theta})$
$x[n]y[n]$	\iff	$\frac{1}{2\pi} (X * Y)(e^{j\theta})$
$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	\iff	$\Re\{X(e^{j\theta})\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	\iff	$j\Im\{X(e^{j\theta})\}$
$\Re\{x[n]\}$	\iff	$X_e(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\theta}) + X^*(e^{-j\theta}))$
$j\Im\{x[n]\}$	\iff	$X_o(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\theta}) - X^*(e^{-j\theta}))$
$nx[n]$	\iff	$j \frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta}$
$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	\iff	$\frac{1}{1 - e^{-j\theta}} X(e^{j\theta}) + \pi X(e^{j0}) \delta_{2\pi}(\theta)$

Einige Fouriertransformationspaare³

$\delta[n - N_0]$	\iff	$e^{-j\theta N_0}$
$e^{j\theta_0 n}$	\iff	$2\pi \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0)$
$\cos \theta_0 n$	\iff	$\pi \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) + \pi \delta_{2\pi}(\theta + \theta_0)$
$\sin \theta_0 n$	\iff	$\frac{\pi}{j} \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) - \frac{\pi}{j} \delta_{2\pi}(\theta + \theta_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$	\iff	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)$
$\sigma[n]$	\iff	$\frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \pi \delta_{2\pi}(\theta)$

³Bei den Beziehungen ist die 2π -Periodizität im Frequenzbereich zu berücksichtigen. $\delta_{2\pi}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k)$.

$a^n \sigma[n], \quad a < 1$	\iff	$\frac{1}{1 - ae^{-j\theta}}$
$\frac{\sin \alpha n}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi$	\iff	$X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq \alpha \\ 0 & \alpha < \theta < \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1 & n \leq N_1 \\ 0 & n > N_1 \end{cases}$	\iff	$\frac{\sin((2N_1 + 1)\frac{\theta}{2})}{\sin \frac{\theta}{2}}$

Parsevalsche Beziehung für aperiodische zeitdiskrete Signale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

Parsevalsche Beziehung für periodische zeitdiskrete Signale:⁴

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

B.3 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

In den Beziehungen sind $x[n]$ und $y[n]$ N -Punkte Signale, d.h. sie haben nur N von Null verschiedene Werte. Die Notation $x[(n)_N] = x[n \text{ modulo } N]$ ist die periodische Fortsetzung des N -Punkte Signals $x[n]$. Mit der Rechteckfunktion

$$\mathcal{R}_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt

$$x[n] = x[(n)_N] \mathcal{R}_N[n].$$

Merkregel: In den DFT-Formeln ist ein N -Punkte Signal stets als eine Periode eines periodischen zeitdiskreten Signals zu betrachten.

⁴Mit $x[n] = x[n + N]$ und den Fourierreihenkoeffizienten $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$.

$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$	\iff	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$
$x[(n - N_0)_N] \mathcal{R}_N[n]$	\iff	$e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} X[k]$
$e^{j\frac{2\pi m}{N}n} x[n]$	\iff	$X[(k - m)_N] \mathcal{R}_N[k]$
$x^*[n]$	\iff	$X^*[(-k)_N] \mathcal{R}_N[k]$
$x^*[(-n)_N] \mathcal{R}_N[n]$	\iff	$X^*[k]$
$\left(\sum_{m=0}^{N-1} x[(m)_N] y[(n - m)_N] \right) \mathcal{R}_N[n]$	\iff	$X[k] Y[k]$
$x[n] y[n]$	\iff	$\left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[(m)_N] Y[(k - m)_N] \right) \mathcal{R}_N[k]$
$\frac{1}{2} [x[(n)_N] + x^*[(-n)_N]] \mathcal{R}_N[n]$	\iff	$\Re\{X[k]\}$
$\frac{1}{2} [x[(n)_N] - x^*[(-n)_N]] \mathcal{R}_N[n]$	\iff	$j\Im\{X[k]\}$
$\Re\{x[n]\}$	\iff	$\frac{1}{2} [X[(k)_N] + X^*[(-k)_N]] \mathcal{R}_N[k]$
$j\Im\{x[n]\}$	\iff	$\frac{1}{2} [X[(k)_N] - X^*[(-k)_N]] \mathcal{R}_N[k]$

Einige DFT Beispiele⁵

$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}$	\iff	$N\delta[k - m]$
$\cos \frac{2\pi m}{N}n$	\iff	$\frac{N}{2}\delta[k - m] + \frac{N}{2}\delta[k + m - N]$
$\sin \frac{2\pi m}{N}n$	\iff	$\frac{N}{2j}\delta[k - m] - \frac{N}{2j}\delta[k + m - N]$
$\delta[n]$	\iff	1
$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1 & N - N_1 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	\iff	$\frac{\sin((2N_1 + 1)\frac{\pi k}{N})}{\sin \frac{\pi k}{N}}$

⁵In den Formeln gilt $0 \leq n \leq N - 1$, $0 \leq k \leq N - 1$ und $0 \leq m \leq N - 1$.

B.4 \mathcal{Z} -Transformation

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{n-1} dz \quad \Leftrightarrow \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Die in der Tabelle angegebenen Bereiche sind die Konvergenzringe der zweiseitigen \mathcal{Z} -Transformation und können in einzelnen Fällen auch größer sein.

$x[n]$	$\Leftrightarrow X(z)$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$y[n]$	$\Leftrightarrow Y(z)$	$R_{y_-} < z < R_{y_+}$
$ax[n] + by[n]$	$\Leftrightarrow aX(z) + bY(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < z < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
$x[n + n_0]$	$\Leftrightarrow z^{n_0} X(z)$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$z_0^n x[n]$	$\Leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$ z_0 R_{x_-} < z < z_0 R_{x_+}$
$nx[n]$	$\Leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$x^*[n]$	$\Leftrightarrow X^*(z^*)$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$x[-n]$	$\Leftrightarrow X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_{x_+}} < z < \frac{1}{R_{x_-}}$
$\Re\{x[n]\}$	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(X(z) + X^*(z^*))$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$j\Im\{x[n]\}$	$\Leftrightarrow \frac{1}{2j}(X(z) - X^*(z^*))$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$(x * y)[n]$	$\Leftrightarrow X(z)Y(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < z < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
$x[n]y[n]$	$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \frac{X(v)}{v} Y\left(\frac{z}{v}\right) dv$	$R_{x_-} R_{y_-} < z < R_{x_+} R_{y_+}$
$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\Leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$	$\max(R_{x_-}, 1) < z < R_{x_+}$

Zeitverschiebung für die einseitige \mathcal{Z} -Transformation:

$$x[n + n_0] \Leftrightarrow z^{n_0} \left(X(z) - \sum_{n=0}^{n_0-1} x[n] z^{-n} \right), \quad n_0 > 0$$

$$x[n - n_0] \Leftrightarrow z^{-n_0} \left(X(z) + \sum_{n=1}^{n_0} x[-n] z^n \right), \quad n_0 > 0$$

Residuensatz für die inverse \mathcal{Z} -Transformation:

Rechtsseitiges Signal ($x[n] = 0$ für $n < 0$):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z)z^{n-1} dz = \sum_{|z_k| < R_x} \text{Res}_k \{X(z)z^{n-1}\} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Alle Residuen im Gebiet innerhalb von \mathcal{C} werden aufsummiert, wobei der Radius von \mathcal{C} größer als der Konvergenzradius R_x sein muss.

Linksseitiges Signal ($x[n] = 0$ für $n > 0$):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}'} X\left(\frac{1}{z}\right) z^{-n-1} dz = \sum_{|z'_k| < \frac{1}{R_x}} \text{Res}_k \left\{ X\left(\frac{1}{z}\right) z^{-n-1} \right\} \quad n = 0, -1, \dots$$

Alle Residuen im Gebiet innerhalb von \mathcal{C}' werden aufsummiert, wobei der Radius von \mathcal{C}' größer als $\frac{1}{R_x}$ sein muss.

Achtung: Durch $z^{\pm n-1}$ kann für $n = 0$ ein zusätzlicher Pol bei $z = 0$ auftreten. Daher sollte bei der inversen \mathcal{Z} -Transformation der Fall $n = 0$ getrennt behandelt werden!

Einfacher Pol $z_{\infty k}$ von $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$:

$$\text{Res}_k \{X(z)z^{n-1}\} = \lim_{z \rightarrow z_{\infty k}} \left((z - z_{\infty k}) \frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-1} \right)$$

M -facher Pol $z_{\infty k}$ von $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$:

$$\text{Res}_k \{X(z)z^{n-1}\} = \frac{1}{(M-1)!} \frac{d^{M-1}}{dz^{M-1}} \left((z - z_{\infty k})^M \frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-1} \right) \Big|_{z \rightarrow z_{\infty k}}$$

Residuum im Unendlichen:

$$\text{Res}_{z=\infty} \{X(z)z^{n-1}\} = -\text{Res}_{z=0} \left\{ X\left(\frac{1}{z}\right) z^{-n-1} \right\}$$

Anfangswertsatz der einseitigen \mathcal{Z} -Transformation:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Endwertsatz der einseitigen \mathcal{Z} -Transformation:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

Eingeschaltetes periodisches Signal:

$$x[n] = x_p[n]\sigma[n] \iff X(z) = \frac{z^N}{z^N - 1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_p[n]z^{-n} \right)$$

mit $x_p[n] = x_p[n + N]$

Einige Z-Transformationspaare

$\delta[n]$	\iff	1	$\forall z$
$\sigma[n]$	\iff	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$-\sigma[-n-1]$	\iff	$\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
$\alpha^n \sigma[n]$	\iff	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ z > \alpha $
$-\alpha^n \sigma[-n-1]$	\iff	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ z < \alpha $
$n\sigma[n]$	\iff	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$-n\sigma[-n-1]$	\iff	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z < 1$
$\sin \alpha n \sigma[n]$	\iff	$\frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$	$ z > 1$
$\cos \alpha n \sigma[n]$	\iff	$\frac{z(z - \cos \alpha)}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$	$ z > 1$
$\rho^n \sin \alpha n \sigma[n]$	\iff	$\frac{\rho z \sin \alpha}{z^2 - 2\rho z \cos \alpha + \rho^2}$	$ z > \rho$
$\rho^n \cos \alpha n \sigma[n]$	\iff	$\frac{z(z - \rho \cos \alpha)}{z^2 - 2\rho z \cos \alpha + \rho^2}$	$ z > \rho$
$\sin(\alpha n + \varphi) \sigma[n]$	\iff	$\frac{z^2 \sin \varphi + z \sin(\alpha - \varphi)}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$	$ z > 1$
$\frac{1}{n}, \quad n > 0$	\iff	$\log_e \frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$\frac{1 - e^{-\alpha n}}{n} \sigma[n]$	\iff	$\alpha + \log_e \frac{z - e^{-\alpha}}{z-1}$	$ z > 1, \alpha > 0$
$\frac{\sin \alpha n}{n} \sigma[n]$	\iff	$\alpha + \arctan \left(\frac{\sin \alpha}{z - \cos \alpha} \right)$	$ z > \cos \alpha$ $\alpha > 0$

Normierte Form der bilinearen Z-Transformation

Mit $s = \frac{1}{v} \frac{z-1}{z+1}$, $v = \tan \pi \frac{f_g}{f_s}$, $H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1}{v} \frac{z-1}{z+1}}$

wird ein analoges Filter mit der Übertragungsfunktion $H_a(s)$ (dabei ist $s/2\pi$ normiert auf die analoge Bezugsfrequenz f_{ag}) in ein digitales Filter mit der Übertragungsfunktion $H(z)$ und der Bezugsfrequenz f_g übergeführt (f_s ist die Abtastfrequenz).

B.5 Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung

In den angegebenen Formeln sind der Unterabtastfaktor M und der Überabtastfaktor L ganzzahlig.

$$\begin{aligned}
 x[n] & \iff X(e^{j\theta}) \\
 & \iff X(z) \\
 y[m] = x[Mm] & \iff Y(e^{j\theta'}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\theta' - 2\pi k)/M}) \\
 & \iff Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{-j2\pi k/M} z^{1/M}) \\
 y[m] = \begin{cases} x[\frac{m}{L}] & m = 0, \pm L, \pm 2L \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} & \iff Y(e^{j\theta'}) = X(e^{j\theta' L}) \\
 & \iff Y(z) = X(z^L)
 \end{aligned}$$

Polyphasenzerlegung:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} X_k(z^M)$$

mit

$$X_k(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_k[m]z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[Mm + k]z^{-m}, \quad k = 0, 1, \dots, M - 1$$

Fall $M = 2$:

$$X(z) = X_0(z^2) + z^{-1} X_1(z^2)$$

$$X_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[2m]z^{-m}$$

$$X_1(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[2m + 1]z^{-m}$$

Elementare Vertauschungsoperationen

