Kapitel D

# Integrale und Grenzwerte

*Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me.*

(Richard Feynman, 1918–1988, *Surely You're Joking, Mr. Feynman!*)



## Inhalt dieses Kapitels





## Wann vertauschen Integral und Grenzwert?



Integration einer Reihe: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega f_k \quad ?$$

Stetigkeit des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \quad ?$$

Ableiten des Integrals: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad ?$$

🙂 Diese Rechentechniken sind häufig sehr nützlich.

⚠ Die Gleichungen gelten leider nicht immer, wie Beispiele zeigen.

🙂 Es gibt einfache Kriterien. Diese müssen wir kennen und beachten.

## Vorgehensweise



In Anwendung treten diese Umformungen häufig auf. Leider werden sie oft blind oder nach Gefühl angewendet, oder gar so getan, als gälten sie immer. Das ist nicht richtig, wie wir an Beispielen sehen.

Die Gleichungen gelten aber doch häufig genug, um nützlich zu sein, und zahlreiche Beispiele illustrieren die Kraft dieser Methoden. Zur korrekten Anwendung brauchen wir also geeignete Kriterien!

Wir wollen daher in diesem Kapitel die Voraussetzungen erläutern und die ersehnten Rechenregeln ableiten. Als Mahnung zur Sorgfalt illustrieren einfache Gegenbeispiele, wann die Formeln nicht gelten.

Wir beginnen mit einer Wiederholung von Summen und Reihen, die die Analogie zu Treppenfunktionen und Integralen hervorhebt. Vertauschung von Integral und Summe ist dann eine Folgerung wie der Satz von Fubini zur Vertauschung von Integralen.

# Beispiel: Integration von Potenzreihen



Zu integrieren sei $f : \,]-\rho, \rho[ \,\to \mathbb{R}$, gegeben als reelle Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Für die Integralfunktion gilt

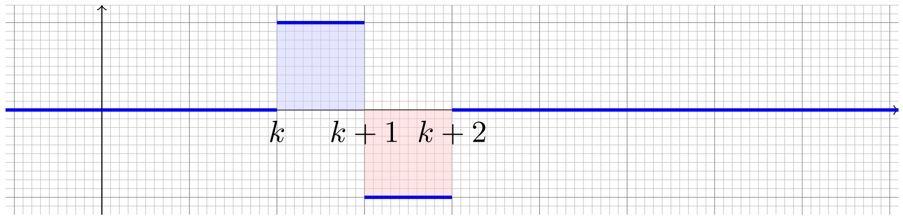
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^x a_k t^k \,\mathrm{d}t \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k} x^k \end{aligned}$$

🙂 Probe mit HDI: Wir dürfen Potenzreihen termweise ableiten.

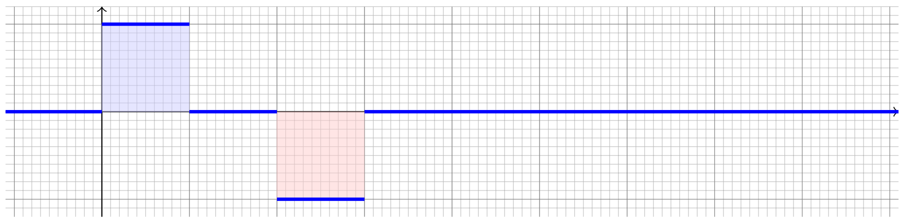
🙂 Die Vertauschung gilt hier dank absoluter Konvergenz der Reihe.
Dieses nützliche Kriterium wollen wir möglichst allgemein formulieren.

# Ein warnendes Gegenbeispiel






Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k = \mathbf{I}_{[k,k+1]} - \mathbf{I}_{[k+1,k+2]}$. Offenbar gilt $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

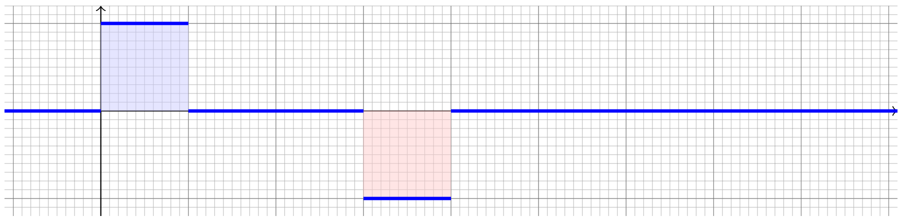


Auch für $f_0 + f_1$ ist das Integral Null.

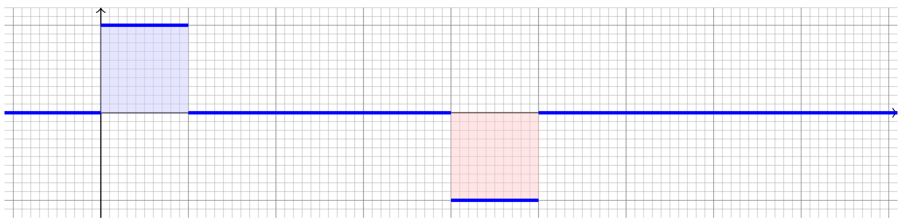
# Ein warnendes Gegenbeispiel



Graph zu $f_0 + f_1 + f_2$:

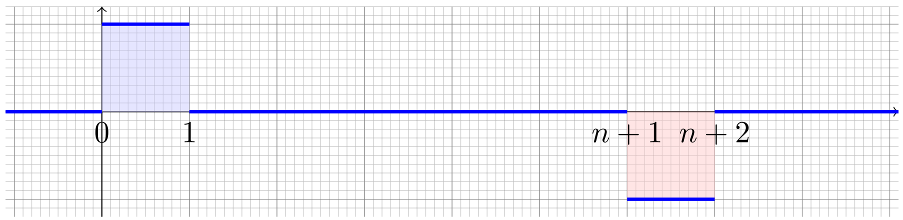


Graph zu $f_0 + f_1 + f_2 + f_3$:



# Ein warnendes Gegenbeispiel






Für $n \in \mathbb{N}$ haben wir die Teleskopsumme $\sum_{k=0}^{n} f_k = \mathbf{I}_{[0,1]} - \mathbf{I}_{[n+1,n+2]}$.
Für $n \to \infty$ erhalten wir deshalb punktweise Konvergenz gegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = \mathbf{I}_{[0,1]}, \quad \text{das heißt} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Hier vertauschen Reihe und Integral nicht:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x \right) = 0 \quad \neq \quad \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) \mathrm{d}x = 1.$$

Anschaulich: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

## Von endlichen zu unendlichen Summen



Um obigem Problem auf den Grund zu gehen, betrachten wir genauer den Übergang von endlichen Summen zu unendlichen Reihen.

📖 Zur Wiederholung siehe Kimmerle–Stroppel, Analysis, §1.8–1.9.

Sei $I$ eine Indexmenge, etwa $I = \{0, 1, \dots, n\}$ oder $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$.

Sei $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\mathbb{R}$, also eine Abbildung $a \colon I \to \mathbb{R}$.
Das heißt, jedem Index $i \in I$ wird eine reelle Zahl $a_i \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Ist $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ endlich, so definieren wir die Summe

$$\sum_{i \in I} a_i := a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n}.$$

Dank Assoziativität und Kommutativität ist diese Summe wohldefiniert, das heißt unabhängig von Klammerung und Reihenfolge der Addition.

**Ziel:** Wie kann man unendliche Summen definieren? Da hierbei auch unendliche Werte auftreten können, betrachten wir Summen in $[0, \infty]$.

## Rechenregeln in $[0, \infty]$



Wir betrachten die erweiterte Zahlengerade $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot, <)$.

Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ sind ein vollständiger angeordneter **Körper**. Die Erweiterung um $\pm\infty$ macht $+\infty$ zum größten und $-\infty$ zum kleinsten Element in $(\bar{\mathbb{R}}, <)$. Ein wesentlicher Vorteil ist:

Jede Teilmenge $M \subset \bar{\mathbb{R}}$ hat ein Supremum und ein Infimum in $\bar{\mathbb{R}}$.

Allerdings ist $(\bar{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ kein Körper; z.B. ist die Addition nicht assoziativ: $(+\infty + -\infty) + 1 \neq +\infty + (-\infty + 1)$. Man muss also aufpassen!

Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf $([0, \infty], +, \cdot, <)$.
Dies ist zwar kein Körper, aber immerhin ein **Halbring**:

Die Addition ist assoziativ und kommutativ. Neutrales Element für die Addition ist $0$. Die üblichen Rechenreglen gelten also bis auf Inverse!

Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ. Neutrales Element für die Multiplikation ist $1$. Die Multiplikation ist distributiv über die Addition.

## Summation einer Familie in $[0, \infty]$



Wir betrachten eine Famile $(a_i)_{i \in I}$ mit $a_i \in [0, \infty]$ für alle $i \in I$.

Ist $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ endlich, so definieren wir die Summe

$$\sum_{i \in I} a_i := a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_n}.$$

Dank Assoziativität und Kommutativität ist diese Summe wohldefiniert, das heißt, unabhängig von Klammerung und Reihenfolge der Addition.

Im allgemeinen Fall einer beliebigen Indexmenge definieren wir die Summe über $i \in I$ als Supremum aller endlichen Teilsummen:

$$\sum_{i \in I} a_i := \sup\left\{ \sum_{i \in J} a_i \;\middle|\; J \subset I \text{ endlich} \right\}$$

Eine besondere Summationsreihenfolge wird hier nicht benötigt!

Die Summe in $[0, \infty]$ verhält sich genauso wie ein Integral.

Normierung: Gilt $a_i = 0$ für alle $i \in I \setminus \{j\}$, so folgt $\sum_{i \in I} a_i = a_j$.

Ebenso gelten Linearität, Monotonie, Einschachtelung, Ausschöpfung.

## Eigenschaften der Summation in $[0, \infty]$



Fubini und Transformationssatz für Summen sind enthalten in:

**Satz D1A (Umordnungssatz)**

*Sei $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie in $[0, \infty]$. Für jede Zerlegung $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ gilt*

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i.$$

Hierbei bedeutet $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ eine Zerlegung der Indexmenge $I$ in disjunkte Teilmengen $I_j \subset I$, also $I_j \cap I_k = \emptyset$ für $j \neq k$ und $I = \bigcup_{j \in J} I_j$. Der Satz besagt, dass man bei der Summierung in $[0, \infty]$ auf diese Weise beliebig umgruppieren und umordnen darf.

Der Umordnungssatz folgt unmittelbar aus der geschickten Konstruktion: Dank Assoziativität und Kommutativität in $([0, \infty], +)$ gilt die Gleichung für endliche Summen in $[0, \infty]$.
Durch Übergang zum Supremum gilt die Gleichung dann auch für beliebige Familien in $[0, \infty]$.
(Die Ausformulierung des Beweises ist nicht schwer aber länglich. Wir lassen Sie hier aus.)

**Beispiel:** Für jede Familie $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i \in [0, \infty]$ gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} (a_{2j} + a_{2j+1}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_{2k} + a_{4k+1} + a_{4k+3}).$$

## Beispiel: geometrische Reihe in $[0,\infty]$



Sei $I=\mathbb{N}$. Für $0 \le q < 1$ und summieren wir $(q^i)_{i\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$q^0+q^1+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \nearrow \quad \frac{1}{1-q}.$$

Hieraus folgt die bekannte Summenformel

$$\boxed{\sum_{i\in\mathbb{N}} q^i = \frac{1}{1-q}}$$

Wir wollen als nächstes auch negative Summanden zulassen.

Wir summieren dann Positiv- und Negativteil getrennt.

## Absolut summierbare Familien in $\mathbb{R}$



Zu summieren sei eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$.

Wir zerlegen $a_i = a_i^+ - a_i^-$ mit $a_i^\pm = \max(0, \pm a_i)$.

Für den Absolutbetrag gilt dann $|a_i| = a_i^+ + a_i^-$.

### Definition D1B

Für jede Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{i\in I} a_i^+ + \sum_{i\in I} a_i^-.$$

Ist dieser Wert endlich, so nennen wir $(a_i)_{i\in I}$ **absolut summierbar**.

In diesem Falle können wir die Summe von $(a_i)_{i\in I}$ definieren durch

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i := \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-.}$$

## Absolut summierbare Familien in $\mathbb{C}$



Jede Familie $(c_i)_{i\in I}$ komplexer Zahlen $c_i \in \mathbb{C}$ können wir zerlegen in

**Realteil** $a_i = \operatorname{Re} c_i$ und **Imaginärteil** $b_i = \operatorname{Im} c_i$.

Hieraus lässt sich $c_i$ zusammensetzen gemäß $c_i = a_i + \mathrm{i} b_i$.

### Definition D1C

Wir nennen $(c_i)_{i\in I}$ **absolut summierbar**, wenn $\sum_{i\in I} |c_i| < \infty$ gilt.

In diesem Falle können wir die Summe definieren durch

$$\boxed{\sum_{i\in I} c_i := \sum_{i\in I} a_i + \mathrm{i} \sum_{i\in I} b_i.}$$

### Satz D1D (Majorantenkriterium)

*Aus $|c_i| \le q_i$ folgt $\sum_{i\in I} |c_i| \le \sum_{i\in I} q_i$ dank Monotonie. Ist die zweite Summe endlich, so auch die erste, und $(c_i)_{i\in I}$ ist absolut summierbar.*

## Anwendung: Potenzreihen



### Satz D1E (Majoration durch geometrische Reihe)

*Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Sei $M \in \mathbb{R}$ und $0 \le q < 1$. Gilt $|c_k| \le Mq^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar, und*

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\Big| \le \sum_{k\in\mathbb{N}} |c_k| \le M/(1-q).$$

### Satz D1F (Konvergenzradius einer Potenzreihe)

*Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ definieren wir den **Konvergenzradius***

$$\boxed{\rho := 1/\limsup \sqrt[k]{|a_k|}.}$$

*Für $|z| < \rho$ konvergiert die Reihe absolut, für $|z| > \rho$ divergiert sie.*

**Beweis:** Angenommen $0 \le \rho < \infty$. Es gilt $|a_k|\rho^k \le M$ für ein $M \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Für $|z| \le q\rho$ mit $0 \le q < 1$ folgt $|a_k z^k| = |a_k|\rho^k q^k \le Mq^k$, also $\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k z^k| \le M/(1-q)$.

**Beispiel:** $\exp(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k/k!$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

## Der Umordnungssatz

### Satz D1G (großer Umordnungssatz)

*Sei* $(a_i)_{i\in I}$ *eine Familie in* $\mathbb{C}$. *Für jede Zerlegung* $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$ *gilt*

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} |a_i|.$$

*Ist dieser Wert endlich, so ist* $(a_i)_{i\in I}$ *absolut summierbar, und es gilt*

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I_j} a_i.}$$

**Beweis:** Die erste Gleichung ist der obige Umordnungssatz für Familien in $[0,\infty]$. Für absolut summierbare Familien in $\mathbb{R}$ folgt die zweite Gleichung aus der ersten durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil. Für absolut summierbare Familien in $\mathbb{C}$ schließlich folgt die Gleichung durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil.



## Der Umordnungssatz

Analog zum Transformationssatz für Integrale erhalten wir:

### Satz D1H (kleiner Umordnungssatz)

*Sei* $(a_i)_{i\in I}$ *eine Familie in* $\mathbb{C}$. *Für jede Bijektion* $\varphi\colon J \to I$ *gilt*

$$\sum_{i\in I} |a_i| = \sum_{j\in J} |a_{\varphi(j)}|.$$

*Ist dieser Wert endlich, so ist* $(a_i)_{i\in I}$ *absolut summierbar, und es gilt*

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\varphi(j)}.}$$

**Beweis:** Der kleine Umordnungssatz folgt aus dem großen mittels $I_j = \{\varphi(j)\}$.



## Der Umordnungssatz

Eine Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{C}$.
Jedem Indexpaar $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wird eine Zahl $a_{ij}\in\mathbb{C}$ zugeordnet.
Analog zum Satz von Fubini für Integrale erhalten wir:

### Satz D1I (Cauchy–Umordnungssatz)

*Für jede Doppelfolge* $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *gilt*

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=k} |a_{ij}|$$

*Ist dieser Wert endlich, so ist* $(a_{ij})$ *absolut summierbar, und es gilt*

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=k} a_{ij}.}$$

**Beweis:** Der Cauchy–Umordnungssatz folgt aus dem großen Umordnungssatz mittels der offensichtlichen Zerlegungen der Indexmenge $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.



## Anwendung: komplexe Exponentialfunktion

Aus der Exponentialreihe folgt die **Funktionalgleichung**

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) \quad \text{für alle} \quad z,w\in\mathbb{C}.}$$

Dank binomischer Formel und Umordnungssatz gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^\ell}{\ell!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w).\end{aligned}$$

Dies entspricht dem **Potenzgesetz**, daher die Kurzschreibweise

$$\mathrm{e}^z := \exp(z).$$

Die Funktionalgleichung besagt $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^w$. Aus der Euler–Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \sin z$ erhält man die **Additionstheoreme** für $\sin$ und $\cos$.

## Summierbare Folgen



Die Indexmenge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ hat eine besondere Ordnung!
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren die **Partialsummen**

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k := a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ konvergiert, so definieren wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

**Beispiel:** Dank Leibniz–Kriterium konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots.$$

Diese Reihe konvergiert nicht absolut, denn $\sum_{k\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \frac{1}{k} = \infty$.
Das entspricht absoluter / uneigentlicher Integrierbarkeit [S.136].

## Summierbare und absolut summierbare Folgen



Wir haben zwei verschiedene Summationsverfahren, nämlich

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k := \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^+ - \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^-.$$

**Satz D1J**

*Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar, so konvergieren beide Summationsverfahren und stimmen überein. Das heißt, es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k.$$

Für $n \to \infty$ gilt nämlich $\sum_{k=0}^{n} a_k^\pm \nearrow \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^\pm$, also

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k^+ - \sum_{k=0}^{n} a_k^- \to \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^+ - \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^- = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k.$$

## Gegenbeispiel zur Umordnung



Absolut konvergente Reihen haben viele nützliche Eigenschaften.
Leider ist nicht jede konvergente Reihe auch absolut konvergent.
Man muss dann aufpassen, z.B. gilt der Umordnungssatz nicht mehr!

**Übung:** Sei $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(i,i) = 1$ und $f(i,i+1) = -1$, sowie $f(i,j) = 0$ sonst. Skizze als Matrix:

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array}$$

Hier gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f(i,j) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} f(i,j) = 1$$

Nachrechnen und staunen! Es kommt noch toller…

## Gegenbeispiel zur Umordnung



**Satz D1K (Riemannscher Umordnungssatz)**

*Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent aber nicht absolut konvergent. Zu jeder Zahl $r \in \mathbb{R}$ existiert dann eine Umordnung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = r$.*

Als konkretes Beispiel betrachten wir

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots.$$

Umordnung nach dem Muster $\sum_{k=0}^{\infty} (a_{2k} + a_{4k+1}) + a_{4k+3}$ liefert

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Auch jeder andere Grenzwert lässt sich durch Umordnung herstellen.
Fazit: Absolute Konvergenz ist die beste Grundlage.

## Vertauschung von Summe und Integral



Dank Linearität gilt $\int_\Omega \sum_{k=0}^n f_k = \sum_{k=0}^n \int_\Omega f_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir zunächst $f_k : \Omega \to [0,\infty]$ an. Es gilt dann

$$\sum_{k=0}^n f_k \nearrow \sum_{k=0}^\infty f_k.$$

Hieraus folgt die monotone Konvergenz des Integrals

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^n f_k \nearrow \int_\Omega \sum_{k=0}^\infty f_k.$$

Aus $\int_\Omega f_k \ge 0$ folgt die monotone Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^n \int_\Omega f_k \nearrow \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega f_k.$$

Für jede Folge messbarer Funktionen $f_k : \Omega \to [0,\infty]$ gilt daher

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty f_k = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega f_k.$$

## Vertauschung von Summe und Integral



### Satz D1L (absolut konvergente Reihen in $L^1(\Omega)$)

*Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty |f_k| = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega |f_k|.$$

*Ist dieser Wert endlich, so ist $\sum_{k=0}^\infty f_k$ in fast allen Punkten $x \in \Omega$ absolut konvergent, zudem über $\Omega$ absolut integrierbar, und es gilt*

$$\boxed{\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty f_k = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega f_k.}$$

Die erste Gleichung haben wir zuvor gezeigt. Die Punkte $x \in \Omega$ mit $\sum_{k=0}^\infty |f_k(x)| = +\infty$ bilden eine Nullmenge $N$. Für alle $x \in \Omega \smallsetminus N$ gilt $\sum_{k=0}^\infty |f_k(x)| < +\infty$, und wir definieren $f(x) = \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ durch die absolut konvergente Reihe. Für $x \in N$ setzen wir $f(x) = 0$.

Die zweite Gleichung gilt für $f_k : \Omega \to [0,\infty]$. Sie folgt für reelle Funktionen durch Zerlegung $f = f^+ - f^-$, und sodann für komplexe Funktionen durch Zerlegung $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$.

## Beispiel: Die Wallis–Reihe für $\pi/2$



Wir wollen die Kreiszahl $\pi$ durch die **Wallis–Reihe** darstellen:

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1\cdot 2\cdots k}{3\cdot 5\cdots(2k+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \dots}$$

Zwei raffinierte Rechnungen: Einerseits gilt dank Substitution

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(t)}{2-\sin(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(t)}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \Big[-2\arctan(\cos t)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Andererseits gilt dank absoluter Konvergenz der geometrischen Reihe:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(t)}{2-\sin(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{1-\frac{1}{2}\sin(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^\infty 2^{-k}\sin(t)^{2k+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^{\pi/2} 2^{-k}\sin(t)^{2k+1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^\infty \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k+1)}$$

Letzteres berechnet man rekursiv durch partielle Integration [S.100].

## Fazit: Wann gilt Vertauschbarkeit?



Für $f = \sum_{k=0}^\infty f_k$ möchten wir Integral und Summe vertauschen:

$$\int_\Omega \Big(\sum_{k=0}^\infty f_k(x)\Big)\,\mathrm{d}x \quad \stackrel{?}{=} \quad \sum_{k=0}^\infty \Big(\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x\Big)$$

Hierfür haben wir folgende hinreichende Kriterien:

- Gleichheit gilt für $f_k \ge 0$ (monotone Konvergenz).
- Gleichheit gilt für $\int \sum |f_k| < \infty$ bzw. $\sum \int |f_k| < \infty$,
- z.B. für konvergente Potenzreihen, $f_k(x) = a_k x^k$.

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

Im folgenden warnenden Beispiel gilt $\sum \int f_k \ne \int \sum f_k$. Die Konvergenz ist nicht monoton, denn $f_k$ hat einen positiven und einen negativen Teil. Zudem gilt $\sum \int |f_k| = \int \sum |f_n| = \infty$. Unsere einfachen Kriterien lassen also für dieses Beispiel keinen Schluss zu. Wir müssen daher $\sum \int f_k$ und $\int \sum f_k$ getrennt ausrechnen, um sie dann vergleichen zu können.

⚠ Diese Kriterien sind hinreichend aber i.A. nicht notwendig [S.257].

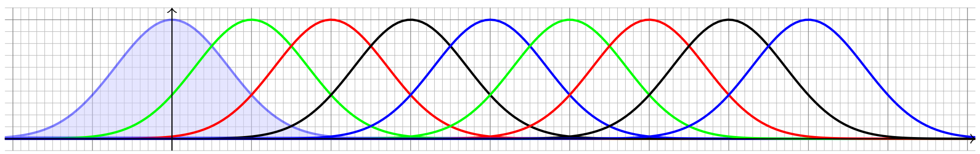
## Punktweise Konvergenz



### Definition D2A

Eine Funktionenfolge $f_k\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ **konvergiert punktweise** für $k \to \infty$ gegen eine Funktion $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, wenn $f_k(x) \to f(x)$ für jedes $x \in \Omega$ gilt

**Beispiel:** Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(x) = \mathrm{e}^{-(x-k)^2}$.



Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $k \to +\infty$ gilt $f_k(x) \to 0$. Aber für die Integrale gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \neq \qquad \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Die anschauliche Ursache: Die „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Gleiches gilt für jede integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$, zum Beispiel $f = \mathbf{I}_Q$ für einen endlichen Quader $Q$, und ihre Verschiebungen $f_k(x) = f(x - kv)$.

## Punktweise Konvergenz



In vielen Rechnungen stehen wie vor der Frage: Wie verhalten sich die Integrale $\int_\Omega f_k$ und $\int_\Omega f$ unter punktweiser Konvergenz $f_k \to f$?

🙂 Messbarkeit ist unkaputtbar! Sind alle $f_k$ messbar und konvergiert $f_k \to f$ punktweise, dann ist auch die Grenzfunktion $f$ messbar.

🙁 Stetigkeit und Integrierbarkeit hingegen können verloren gehen!

🙂 Monotone Konvergenz funktioniert! Aus $f_k \nearrow f$ folgt $\int_\Omega f_k \nearrow \int_\Omega f$.

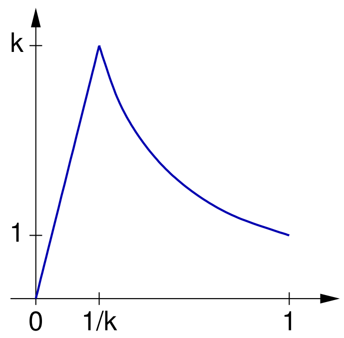
🙁 Im Allgemeinen folgt aus $f_k \to f$ jedoch nicht $\int_\Omega f_k \to \int_\Omega f$.
Typisches Problem: „Masse verschwindet nach Unendlich“.

Unter welchen Voraussetzungen können wir $\int_\Omega f_k \to \int_\Omega f$ schließen?

## Stetigkeit und Integrierbarkeit sind zerbrechlich!



⚠ Sind alle Funktionen $f_k$ stetig bzw. integrierbar, so kann man nicht auf die Stetigkeit bzw. Integrierbarkeit der Grenzfunktion $f$ schließen!




Für $k \ge 1$ sei $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{k}, \\ \frac{1}{x} & \text{für } \frac{1}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$

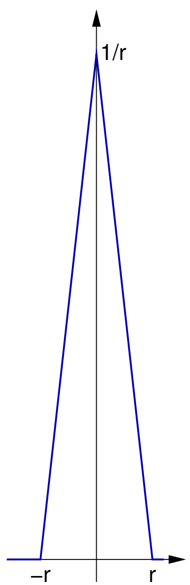
Für jedes $x \in \,]0,1]$ gilt $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \dfrac{1}{x}$.

Jede der Funktionen $f_k$ ist stetig und somit integrierbar.
Die Grenzfunktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht stetig und auch nicht integrierbar.

⚠ Selbst wenn alle $f_k$ und die Grenzfunktion $f$ integrierbar sind, gilt im Allgemeinen nicht die Konvergenz der Integralfolge!

## Grenzwert und Integral vertauschen nicht!






Für $r > 0$ definieren wir die **Dreiecksfunktion**

$$\Delta_r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad \Delta_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \ge r, \\ \frac{r-|x|}{r^2} & \text{für } |x| \le r. \end{cases}$$

Es gilt $\int_{\mathbb{R}} \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x = 1$ für alle $r > 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{r\to 0} \Delta_r(x) = \Delta_0(x) := \begin{cases} \infty & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

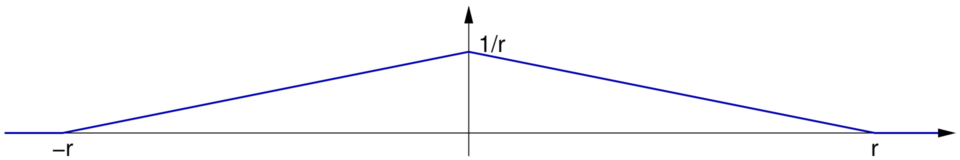
Für die Grenzfunktion gilt $\int_{\mathbb{R}} \Delta_0(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Also

$$\lim_{r\to 0} \int \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \neq \qquad \int \lim_{r\to 0} \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Die Ursache auch hier: „Die Masse verschwindet nach Unendlich“.

# Grenzwert und Integral vertauschen nicht!





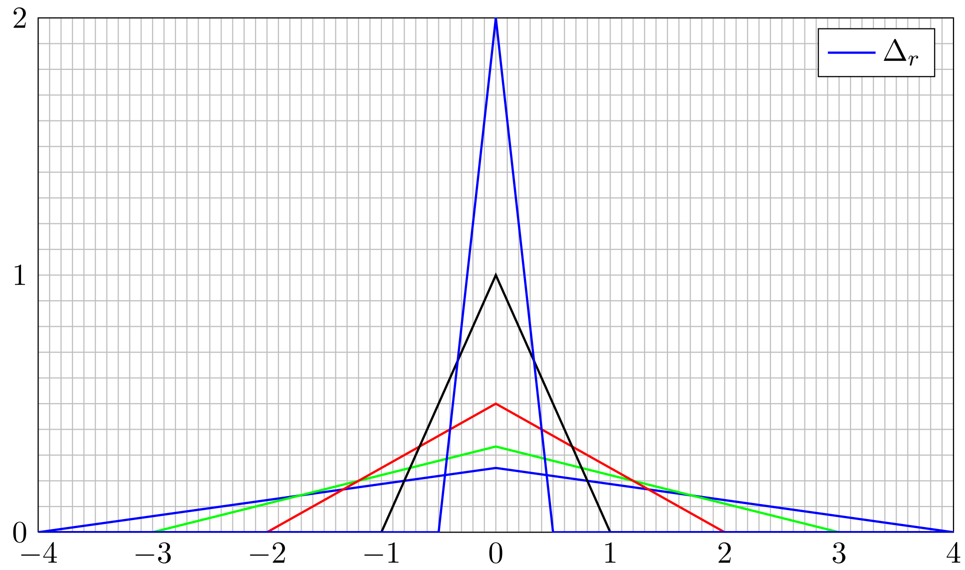

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{r\to\infty} \Delta_r(x) = 0.$$
Die Grenzfunktion hat daher Integral $0$. Also

$$\lim_{r\to\infty} \int \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \neq \quad \int \lim_{r\to\infty} \Delta_r(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Die Ursache auch hier: „Die Masse verschwindet nach Unendlich“.

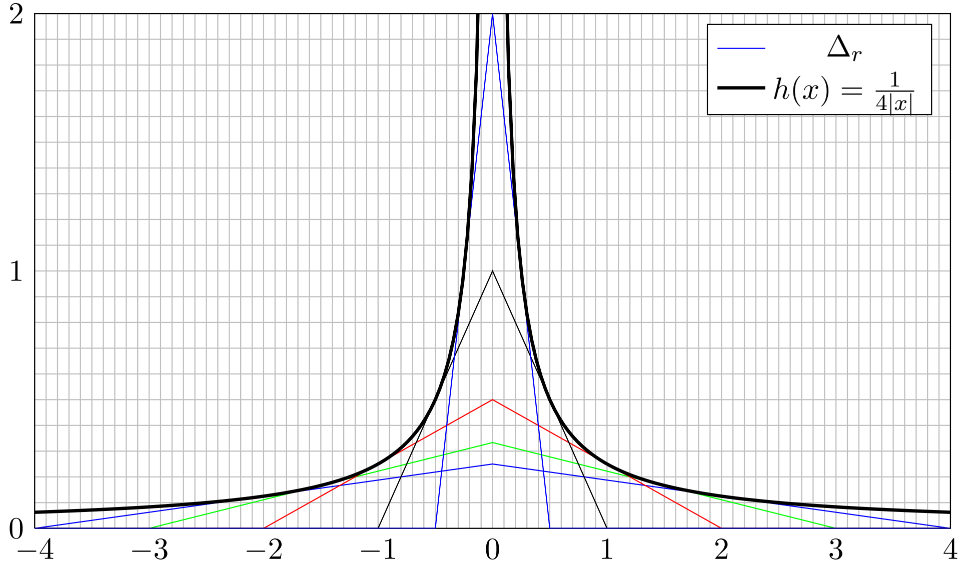
# Dreiecksfunktionen $(\Delta_r)_{r\in\mathbb{R}}$






# Hüllfunktion zu $(\Delta_r)_{r\in\mathbb{R}}$






# Majorisierte Integrierbarkeit: Definition



**Definition D2B (majorisiert integrierbare Familien)**

Sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie messbarer Funktionen $f_i\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.

Wir nennen $h\colon \Omega \to [0,\infty]$ **Majorante**, wenn $|f_i| \le h$ für alle $i \in I$ gilt.

Die Familie heißt **majorisiert integrierbar**, wenn eine integrierbare Majorante existiert, also $h\colon \Omega \to [0,\infty]$ mit $|f_i| \le h$ und $\int_\Omega h < \infty$.

**Bemerkung:** Dank $|f_i| \le h$ gilt $\int_\Omega |f_i| \le \int_\Omega h < \infty$, also ist jede Funktion $f_i$ integrierbar.

Die Funktion $h$ ist eine Majorante für die gesamte Familie $(f_i)_{i\in I}$: Ihre Integrierbarkeit garantiert anschaulich, dass keine Masse nach Unendlich verschwindet.

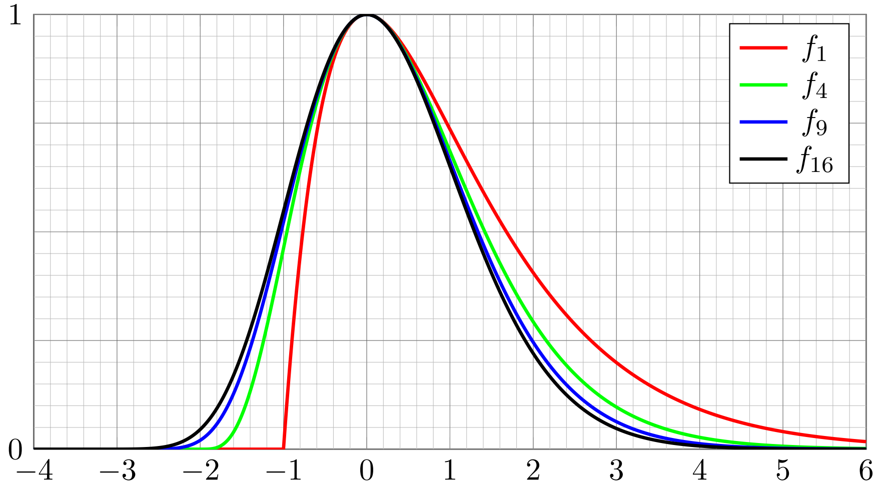
Angenommen, $g = \sup_{i\in I} |f_i|$ ist messbar. Das ist immer der Fall, wenn $I$ abzählbar ist und alle $f_i$ messbar sind. In diesem Fall ist $g$ die kleinste Majorante, auch Hüllfunktion genannt, und die Familie $(f_i)_{i\in I}$ ist genau dann majorisiert integrierbar, wenn $\int_\Omega g < \infty$ gilt.

**Beispiel:** Zu $(\Delta_r)_{r\in\mathbb{R}_{>0}}$ ist $h(x) = \frac{1}{4|x|}$ eine Majorante. Dies ist die kleinste Majorante, die sog. Hüllfunktion, denn $\Delta_{2|x|}(x) = h(x)$.

Die Familie $(\Delta_r)_{r\in\mathbb{R}_{>0}}$ ist nicht majorisiert integrierbar.

Ebensowenig die Familie $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der wandernden Glockenkurven.

## Majorisierte Integrierbarkeit: Beispiel




Wir untersuchen die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(t) = \exp\left(n\left(\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

für $t > -\sqrt{n}$, sowie $f_n(t) = 0$ für $t \le -\sqrt{n}$.



## Majorisierte Integrierbarkeit: Beispiel

Die Funktionen $f_n$ scheinen zu konvergieren... Wogegen?

**Aufgabe:** Für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $n \to \infty$ gilt $f_n(t) \to \mathrm{e}^{-t^2/2}$.
Genauer: $f_n(t) \searrow \mathrm{e}^{-t^2/2}$ für $t \ge 0$, und $f_n(t) \nearrow \mathrm{e}^{-t^2/2}$ für $t \le 0$.

Hieraus gewinnen wir die Hüllfunktion

$$h(t) := \sup_{n \ge 1} f_n(t) = \begin{cases} t\,\mathrm{e}^{1-t} & \text{für } t \ge 0, \\ \mathrm{e}^{-t^2/2} & \text{für } t \le 0. \end{cases}$$

Diese Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ ist absolut integrierbar.
Also ist die Familie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorisiert integrierbar.



## Majorisierte Integrierbarkeit: Beispiel

**Lösung:** Für $-1 < s < 1$ nutzen wir die Potenzreihenentwicklung

$$\ln(1+s) - s = -\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \dots$$

Für $s = t/\sqrt{n}$ mit $-\sqrt{n} < t < \sqrt{n}$ gilt also

$$n\left(\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3\sqrt{n}} - \frac{t^4}{4n} + \dots$$

Für $n \to \infty$ konvergiert dies gegen $-t^2/2$, also

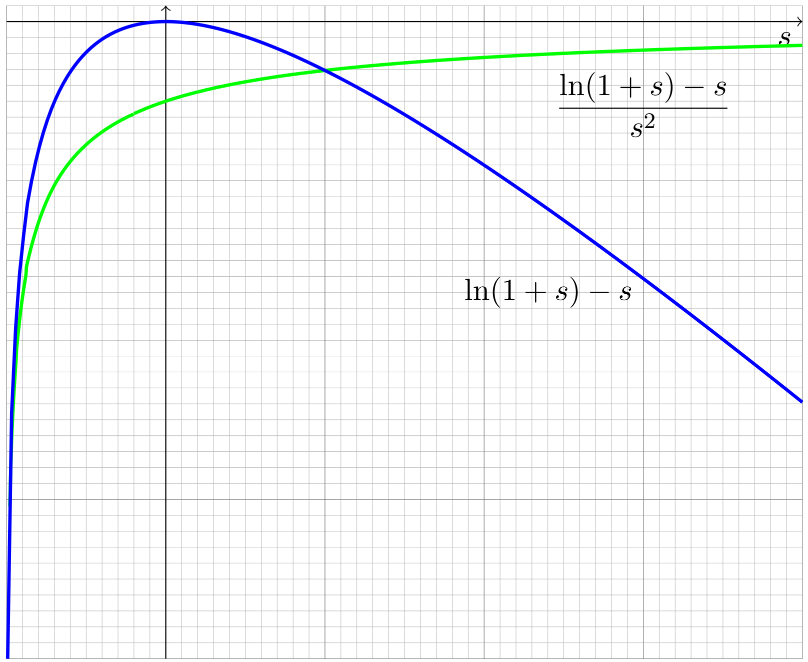
$$f_n(t) \to \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

Per Kurvendiskussion findet man genauer:

- Für $t \ge 0$ gilt $f_n(t) \searrow \mathrm{e}^{-t^2/2}$.
- Für $t \le 0$ gilt $f_n(t) \nearrow \mathrm{e}^{-t^2/2}$.



## Majorisierte Integrierbarkeit: Beispiel



# Der Satz von der majorisierten Konvergenz



## Satz D2c (majorisierte Konvergenz)

*Sei $f_0, f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Folge messbarer Funktionen.*

1. *Angenommen $f_n$ konvergiert punktweise gegen $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$.*
2. *Es existiert eine Majorante $h\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $|f_n| \le h$ und $\int_\Omega h < \infty$.*

*Dann ist $f$ integrierbar und $\int_\Omega |f_n - f| \to 0$, somit $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$.*

Die integrierbare Mojarante verhindert, dass die Funktionenfolge $f_n$ nach Unendlich entkommt. In den obigen Gegenbeispielen war genau das die Ursache des Problems!

Unter dieser Vorsichtsmaßnahme gilt also die schöne Formel

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals! Sei $h\colon \Omega \to [0,\infty]$ integrierbar. Auf der Menge aller messbaren Funktion $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $|f| \le h$ ist die Abbildung $f \mapsto \int_\Omega f$ stetig, in dem Sinne, dass aus $f_n \to f$ stets $\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$ folgt.

⚠ Die majorisierte Integrierbarkeit ist hier wesentlich.

# Beweis der majorisierten Konvergenz



Wir beginnen wir folgender Betragsabschätzung:

$$0 \le \left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int f_n - f \right| \le \int |f_n - f|$$

Wir zeigen nun, dass die rechte Seite $\int |f_n - f|$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt.
Die folgende Rechnung ist etwas technisch, aber jeder einzelne Schritt ist leicht.

**Lemma von Fatou:** Sind $f_n\colon \Omega \to [0,\infty]$ messbar, dann gilt $\int \liminf f_n \le \liminf \int f_n$.

**Beweis des Lemmas:** Für $g_n := \inf_{k\ge n} f_k$ gilt $g_n \le f_n$ und $g_n \nearrow g = \liminf f_n$, also

$$\int \liminf f_n = \int \lim g_n \overset{\text{MK!}}{=} \lim \int g_n = \liminf \int g_n \le \liminf \int f_n.$$

**Beweis des Satzes der majorisierten Konvergenz:**

Aus $|f_n| \le h$ folgt $|f| \le h$ (fast überall), somit $|f - f_n| \le |f| + |f_n| \le 2h$. Mit Fatou folgt:

$$\begin{aligned}\int 2h &= \int \liminf\Bigl(2h - |f_n - f|\Bigr) \le \liminf \int \Bigl(2h - |f_n - f|\Bigr) \\ &= \liminf\Bigl(\int 2h - \int |f_n - f|\Bigr) = \int 2h - \limsup \int |f_n - f|\end{aligned}$$

Da der Wert $\int 2h$ endlich ist, können wir ihn auf beiden Seiten subtrahieren.
Wir erhalten $\limsup \int |f_n - f| \le 0$. Mit $\int |f_n - f| \ge 0$ folgt $\lim \int |f_n - f| = 0$.

# Nochmal Integral und Summe



Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $g_k\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ mit

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty |g_k| = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega |g_k| < \infty.$$

Dank majorisierter Konvergenz erhalten wir erneut

$$\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty g_k = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega g_k.$$

Für $n \to \infty$ gilt (fast überall) punktweise Konvergenz

$$f_n = \sum_{k=0}^n g_k \quad\to\quad f = \sum_{k=0}^\infty g_k.$$

Zudem ist $h = \sum_{k=0}^\infty |g_k|$ eine Majorante für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und somit

$$\int_\Omega f_n = \int_\Omega \sum_{k=0}^n g_k \quad\to\quad \int_\Omega f = \int_\Omega \sum_{k=0}^\infty g_k.$$

# Nochmal Integral und Summe



Die absolute Konvergenz $\sum_{k=0}^\infty \int_\Omega |g_k| < \infty$ ist hinreichend aber nicht notwendig für die Gleichung $\int_\Omega \sum_{k=0}^\infty g_k = \sum_{k=0}^\infty \int_\Omega g_k$.
Als einfaches und erhellendes Beispiel berechnen wir:

$$\sum_{k=0}^\infty \left( \int_{x=0}^\infty (-1)^k \mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x \right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$$

$$\int_{x=0}^\infty \left( \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \mathrm{e}^{-(k+1)x} \right) \mathrm{d}x = \int_{x=0}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \ln(2)$$

Absolute Konvergenz gilt hier nicht:

$$\sum_{k=0}^\infty \left( \int_{x=0}^\infty \mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x \right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k+1} = +\infty$$

$$\int_{x=0}^\infty \left( \sum_{k=0}^\infty \mathrm{e}^{-(k+1)x} \right) \mathrm{d}x = \int_{x=0}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = +\infty$$

Doch gilt majorisierte Konvergenz, denn $\left|\sum_{k=0}^n (-1)^k \mathrm{e}^{-(k+1)x}\right| \le \mathrm{e}^{-x}$.

## Fazit: Wann gilt Vertauschbarkeit?



Für $f_n \to f$ möchten wir Integral und Limes vertauschen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \overset{?}{=} \quad \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Dies ist eine starke und nützliche Stetigkeitseigenschaft des Integrals!

Hierfür haben wir folgende Kriterien:

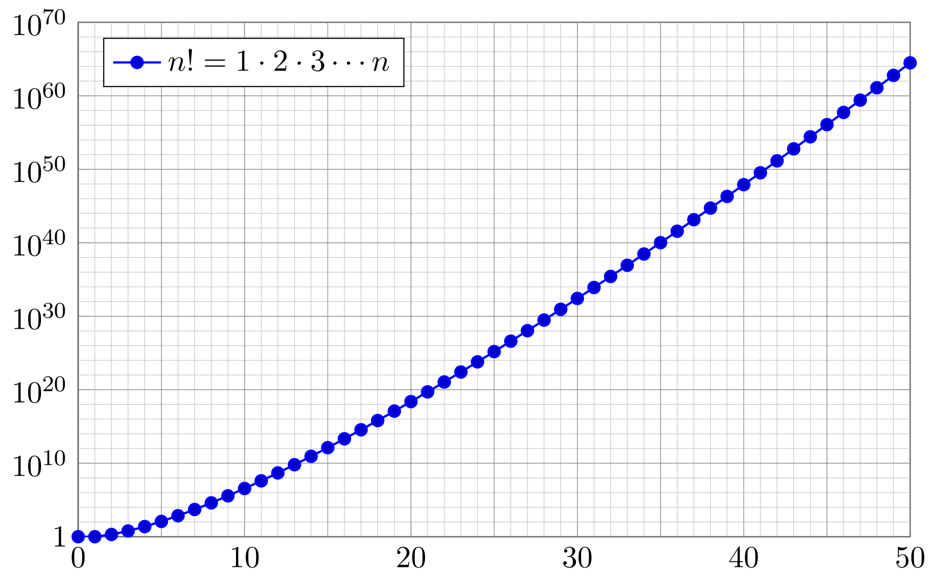
- Gleichheit gilt bei monotoner Konvergenz $0 \le f_n \nearrow f$,
- bei majorisierter Konvergenz $f_n \to f$ mit $|f_n| \le h$ und $\int_\Omega h < \infty$,
- insbesondere, wenn $\mathrm{vol}(\Omega) < \infty$ und $|f_n| \le M \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

☺ Dies verhindert, dass Masse nach Unendlich verschwindet.

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!

## Anwendung: Stirling–Formel






## Anwendung: Stirling–Formel



**Aufgabe:** Man berechne $n!/\sqrt{n}(n/\mathrm{e})^n$ für $n \to \infty$.
**Lösung:** Wir wissen bereits

$$n! = \int_0^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Im Vergleich zu $\sqrt{n}\big(\frac{n}{\mathrm{e}}\big)^n$ erhalten wir

$$\frac{n!}{\sqrt{n}(n/\mathrm{e})^n} = \int_0^\infty \exp\Big(n\Big(\ln\Big(\frac{x}{n}\Big) + 1 - \frac{x}{n}\Big)\Big)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n}}$$

Substitution $x = \sqrt{n}\,t + n$ bedeutet $\mathrm{d}x = \sqrt{n}\,\mathrm{d}t$ und $\frac{x}{n} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}}$, also

$$\frac{n!}{\sqrt{n}(n/\mathrm{e})^n} = \int_{-\sqrt{n}}^\infty \exp\Big(n\Big(\ln\Big(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Big) - \frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\,\mathrm{d}t$$

Zu integrieren ist hier die Funktion

$$f_n(t) = \exp\Big(n\Big(\ln\Big(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\Big) - \frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big) \cdot \mathbf{I}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(t).$$

Uns interessiert das Verhalten für $n \to \infty$.

## Anwendung: Stirling–Formel



Wir haben oben die punktweise Konvergenz gefunden:

$$f_n(t) \to \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

Zudem ist die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorisiert integrierbar.
Wir dürfen also Limes und Integral vertauschen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\mathbb{R} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

**Satz D2D (Stirling–Formel)**

*Für $n \to \infty$ gilt*

$$\frac{n!}{\sqrt{n}(n/\mathrm{e})^n} = \int_\mathbb{R} f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \to \quad \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

Damit haben wir schließlich das Wachstumsverhalten der Fakultät $n \mapsto n!$ durch die Stirling–Formel als asymptotische Näherungsformel ausdrücken können [S.111].

## Parameterabhängige Integrale



Ein **parameterabhängiges Integral** ist von der Form

$$F\colon X \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Beispiele: Wir kennen bereits die **Gamma–Funktion**

$$\Gamma\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} \quad \text{mit} \quad \Gamma(x) = \int_{y=0}^{\infty} y^{x-1}\,\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y.$$

Die **Fourier–Transformierte** einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist

$$\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y.$$

Das **Newton–Potential** einer Massenverteilung $\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y.$$

Ist $F$ stetig? differenzierbar? Wann gilt „Ableitung unter dem Integral“?

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{?}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

## Ableitung von Parameterintegralen (Rechtecke)



Für Integrale über Rechtecken erhalten wir folgenden Spezialfall:

**Satz D3A (Ableitungsregel für Integrale über Rechtecken)**

*Sei $f\colon [x_0,x_1] \times [y_0,y_1] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion*

$$F\colon [x_0,x_1] \to \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad F(x) := \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

*stetig. Ist zudem $f$ stetig diff'bar bezüglich $x$, so auch $F$, und es gilt*

$$F'(x) = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

*Kurzum:*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

Statt $[x_0,x_1]$ können wir offene Mengen $X \subset \mathbb{R}^p$ betrachten.
Statt $[y_0,y_1]$ können wir über kompakte $Y \subset \mathbb{R}^q$ integrieren.

## Ableitung von Parameterintegralen (kompakt)



Wann dürfen wir unter dem Integral ableiten? Wir brauchen praktische Kriterien! Der folgende Satz gibt ein besonders einfaches Kriterium für den wichtigen Spezialfall, dass der Integrationsbereich kompakt ist. Wir heben diesen besonders schönen Fall hervor.

**Satz D3B (Ableitungsregel für Integrale über Kompakta)**

*Sei $X \subset \mathbb{R}^p$ offen, $Y \subset \mathbb{R}^q$ kompakt, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist*

$$F\colon X \to \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

*stetig. Ist zudem $f$ stetig diff'bar bezüglich $x_j$, so auch $F$, und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

*Kurzum:*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

Kompaktheit von $Y$ und Stetigkeit von $f$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sind wesentlich!

## Ableitung von Parameterintegralen (kompakt)



**Beweis:** Stetigkeit gilt dank majorisierter Konvergenz.
Sei $p=1$ und $x \in [a,b] \subset X$. Dank HDI und Fubini berechnen wir

$$\begin{aligned}
F(x) - F(a) &\overset{\text{lin}}{=} \int_Y f(x,y) - f(a,y)\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{HDI}}{=} \int_Y \int_{t=a}^{x} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[a,x]\times Y} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}(t,y) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{t=a}^{x} \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Nochmals dank HDI und Stetigkeit folgt hieraus

$$F'(x) \overset{\text{HDI}}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

**Erläuterung:** Die Vertauschung von Ableitung und Integral führen wir dank HDI zurück auf die Vertauschung von zwei Integralen. Der Satz von Fubini lässt sich anwenden, da $f$ stetig ist und somit absolut integrierbar auf $[a,b] \times Y$. Der HDI lässt sich anwenden dank Stetigkeit.

# Anwendung: Newton–Potential



Das **Newton–Potential** einer Masse $m \ge 0$ im Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ ist

$$F\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{y\} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \frac{m}{|y-x|}$$

(bis auf Konstanten&Vorzeichen). Das zugehörige **Gravitationsfeld** ist

$$f\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{y\} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(x) = \operatorname{grad} F(x) = m\frac{y-x}{|y-x|^3}.$$

Für $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt und Dichte $\rho\colon K \to \mathbb{R}$ haben wir entsprechend

$$F\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus K \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_K \frac{\rho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y.$$

Das zugehörige Gravitationsfeld ist dann

$$f\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus K \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(x) = \operatorname{grad} F(x) = \int_K \frac{y-x}{|y-x|^3}\,\rho(y)\,\mathrm{d}y.$$

**Übung:** Man prüfe die Rechnung für $\operatorname{grad} F$ sorgfältig nach.

# Anwendung: Newton–Potential



Aus $f = \operatorname{grad} F$ folgt für die **Divergenz**

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \\ &= \Delta F. \end{aligned}$$

Man nennt $\Delta = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ den **Laplace–Operator**.
Eine Funktion $F$ mit der Eigenschaft $\Delta F = 0$ heißt **harmonisch**.

**Übung:** Das Newton–Potential $F\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{y\} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \frac{m}{|y-x|}$$

ist harmonisch, ebenso $F\colon \mathbb{R}^3 \smallsetminus K \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_K \frac{\rho(y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y.$$

# Leibniz–Regel für Integrale über Normalbereiche



**Satz D3C (Leibniz–Regel für Integrale über Normalbereiche)**

*Sei $X \subset \mathbb{R}^p$ offen und $g, h\colon X \to \mathbb{R}$ stetig mit $g \le h$ sowie*

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{p+1} \;\middle|\; x \in X,\ g(x) \le y \le h(x) \right\}.$$

*Sei $f\colon B \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion*

$$F\colon X \to \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad F(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

*stetig. Sind zudem $f, g, h$ stetig diff'bar bezüglich $x$, so auch $F$, und*

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,\mathrm{d}y - f(x,g(x))\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + f(x,h(x))\frac{\partial h}{\partial x_j}(x).}$$

Der HDI ist ein Spezialfall: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y = f(x)$.

# Leibniz–Regel für Integrale über Normalbereiche



Wie zuvor dürfen wir „unter dem Integral ableiten“, jetzt aber kommen zusätzlich die Ableitungen der Intervallgrenzen hinzu. Der Einfachheit halber denken wir uns $f$ fortgesetzt zu einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Beweis:** Für $x \in X$ und $u, v \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$G(x,u,v) = \int_u^v f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

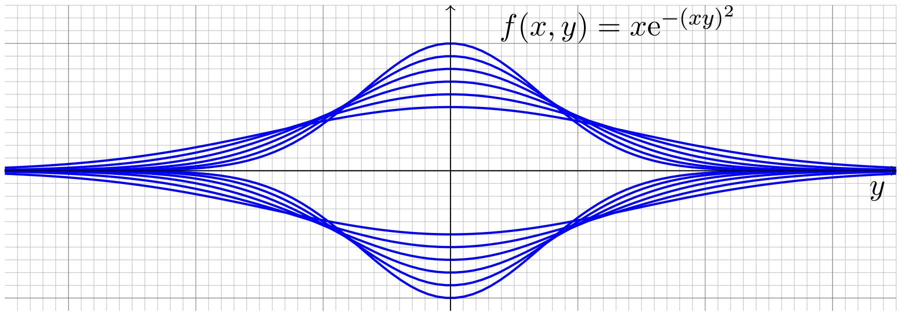
Diese ist stetig in $x, u, v$. Also ist $F(x) = G(x, g(x), h(x))$ stetig in $x$.
Für die Ableitung finden wir dank Kettenregel und HDI:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x) + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) \\ &= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,\mathrm{d}y - f(x,g(x))\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + (x,h(x))\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) f \end{aligned}$$

## Gegenbeispiel zur Stetigkeit des Integrals



Für $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ haben wir $\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ gezeigt.
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x\,g(xy)$ ist stetig.




Das parameterabhängige Integral $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ ist nicht stetig:

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -\sqrt{\pi} & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

## Nachrechnen des Gegenbeispiels



Die Funktion $g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ dient als schönes und konkretes Beispiel.
Das Phänomen besteht jedoch für jede stetige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$.
Das Integral $a := \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t$ erfülle für das Folgende $0 < a < \infty$.
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x\,g(xy)$ ist stetig.
Dennoch ist das Parameterintegral $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ unstetig:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} x\,g(xy)\,\mathrm{d}y \\ &= \operatorname{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} g(xy)\,|x|\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Substitution $t = xy$ und $\mathrm{d}t = |x|\,\mathrm{d}y$:

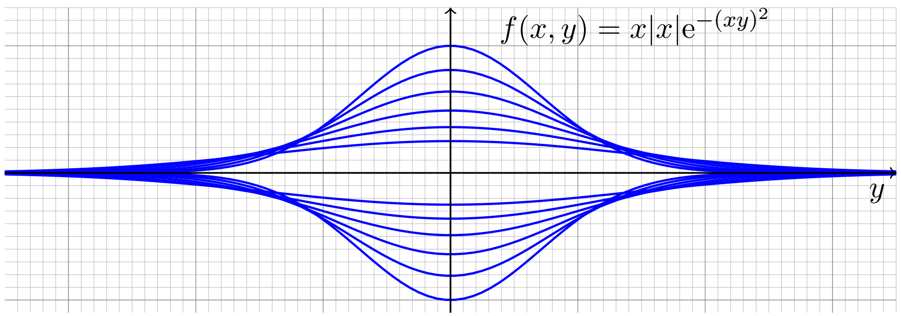
$$\begin{aligned} &= \operatorname{sign}(x) \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sign}(x)\,a \end{aligned}$$

Das Umklappen des Vorzeichens ist in der Skizze gut zu erkennen.

## Gegenbeispiel zur Ableitung unter dem Integral



Für $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ haben wir $\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ gezeigt.
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x|x|\,g(xy)$ ist stetig diff'bar.




Wir finden $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = x\sqrt{\pi}$, also $F'(x) = \sqrt{\pi}$, aber

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{für } x \ne 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

**Aufgabe:** Man prüfe diese Rechnung sorgfältig nach.

## Nachrechnen des Gegenbeispiels



**Lösung:** Dank Substitution $t = xy$ und $\mathrm{d}t = |x|\,\mathrm{d}y$ gilt

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} x|x|\,g(xy)\,\mathrm{d}y = x \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = x\sqrt{\pi}.$$

Also $F'(x) = \sqrt{\pi}$. Ableiten unter dem Integral liefert

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} 2|x|\,g(xy) + xy|x|\,g'(xy)\,\mathrm{d}y.$$

Das verschwindet für $x = 0$. Für $x \ne 0$ substituieren wir erneut:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} 2|x|\,g(xy) + xy|x|\,g'(xy)\,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_{\mathbb{R}} t^2 g(t)\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{\pi} - \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

(Siehe unten, Momente der Normalverteilung.) In $x = 0$ gilt also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \pi \quad \ne \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

## Ableitung von Parameterintegralen (allgemein)



Im den vorangegangenen Sätzen war der Integrationsbereich $Y$ kompakt. Was tun, wenn über einen nicht-kompakten Bereich integriert wird, etwa $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$? Wie zuvor müssen wir verhindern, dass Masse nach Unendlich verschwindet. Das gelingt am besten wie folgt:

### Satz D3D (Ableitung von Parameterintegralen)

*Sei $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^p$ offen und $Y \subset \mathbb{R}^q$. Ist für jedes $x \in X$ die Abbildung $y \mapsto f(x,y)$ über $Y$ integrierbar, so erhalten wir*

$$F\colon X \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

1. *Ist $f$ bezüglich $x$ stetig und majorisiert int'bar über $Y$, also $|f(x,y)| \le h(y)$ mit $\int_Y h(y)\,\mathrm{d}y < \infty$, so ist $F$ stetig.*
2. *Ist $\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon X \to Y$ stetig bezüglich $x_j$ und majorisiert int'bar über $Y$, so ist auch $F$ stetig diff'bar bezüglich $x_j$, und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

## Stetigkeit von Parameterintegralen (allgemein)



Wir rechnen als erstes die Stetigkeit von $F$ nach: Für $x \to a$ in $X$ gilt

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{(1)}{=} \int_Y \lim_{x\to a} f(x,y)\,\mathrm{d}y \overset{(2)}{=} \int_Y f(a,y)\,\mathrm{d}y = F(a)$$

**Erläuterung:** Man sieht hieraus, dass für die Stetigkeit von $F$ im Punkt $a \in X$ genügen:

(1) Für alle $x \in X$, oder zumindest alle $x$ in einer Umgebung von $a$, ist die Abbildung $f(x,-)\colon Y \to \mathbb{R}\colon y \mapsto f(x,y)$ majorisiert integrierbar.

(2) Für jedes $y \in Y$ ist die Abbildung $f(-,y)\colon X \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f(x,y)$ in $a$ stetig. Das bedeutet $\lim_{x\to a} f(x,y) = f(a,y)$ für alle $x \to a$ und $y \in Y$.

Diese Bedingungen sind automatisch erfüllt, wenn $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ stetig und $Y$ kompakt ist: Als Majorante wählen wir die Konstante $M = \sup\{\, |f(x,y)| \mid x \in \overline{B}(a,r),\ y \in Y \,\}$. Hier ist $\overline{B}(a,r) \subset X$ der kompakte Ball mit Mittelpunkt $a$ und Radius $0 < r < \infty$.

Im zweiten Teil leiten wir bezüglich $x_j$ ab und halten dabei $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p$ fest. Wir fordern dann die Bedingungen (1) und (2) für die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon X \times Y \to \mathbb{R}$. Zur einfacheren Schreibweise reicht es, den Fall einer Variablen zu betrachten, also $p = 1$.

## Ableitung von Parameterintegralen (allgemein)



Sei $p = 1$ und $x \in [a,b] \subset X$.

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &\overset{\text{lin}}{=} \int_Y f(x,y) - f(a,y)\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{HDI}}{=} \int_Y \int_{t=a}^{x} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[a,x]\times Y} \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}(t,y) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{t=a}^{x} \int_Y \frac{\partial}{\partial t} f(t,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Nochmals dank HDI und Stetigkeit folgt hieraus

$$F'(x) \overset{\text{HDI}}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

**Erläuterung:** Die Vertauschung von Ableitung und Integral führen wir dank HDI zurück auf die Vertauschung von zwei Integralen. Der Satz von Fubini lässt sich hier anwenden, da $f$ majorisiert integrierbar ist und somit absolut integrierbar auf $[a,b] \times Y$. Die Stetigkeit wird im letzten Schritt für den HDI gebraucht!

## Ableitung von Parameterintegralen (allgemein)



Als alternativen Beweis der Ableitungsformel weisen wir folgende Gleichungen nach:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} F(x) &\overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{F(x+he_j) - F(x)}{h} \\ &\overset{(2)}{=} \lim_{h\to 0} \int_Y \frac{f(x+he_j,y) - f(x,y)}{h}\,\mathrm{d}y \\ &\overset{(3)}{=} \int_Y \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_j,y) - f(x,y)}{h}\,\mathrm{d}y \overset{(4)}{=} \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Gleichung (1) und (4) ist die Definition der partiellen Ableitung, (2) gilt dank Linearität des Integrals, also bleibt (3) zu zeigen. Dank der vorausgesetzten majorisierten Integrierbarkeit existiert eine Funktion $h\colon Y \to [0,\infty]$ mit $\int_Y h < \infty$ und $|\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)| \le h(y)$.

Nach dem (eindimensionalen) Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$\frac{f(x+he_j,y) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\eta e_j, y) \qquad \text{für ein } \eta \in [0,h].$$

Durch Übergang zum Betrag folgt hieraus

$$\left|\frac{f(x+he_j,y) - f(x,y)}{h}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\eta e_j, y)\right| \le h(y).$$

Somit gilt (3) dank majorisierter Konvergenz.

## Anwendung: Gamma–Funktion

**Aufgabe:** Durch Ableiten unter dem Integral berechne man (erneut)

$$\boxed{\int_{x=0}^{\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = n!}$$

Diese Gleichung haben wir bereits durch partielle Integration gewonnen [S.124]. Das war auch nicht wirklich schwierig, aber doch etwas mühsamer. Differenzieren ist leichter.

**Lösung:** Für $t > 0$ betrachten wir das Integral

$$\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x.$$

Integriert wird hier über $x$, wobei $t$ ein fester Parameter ist:

$$\int_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{t}\Big]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{t}.$$

Die Ableitung unter dem Integral $-x\mathrm{e}^{-tx}$ ist majorisiert integrierbar:
Für $0 < t_0 < t$ gilt $|-x\mathrm{e}^{-tx}| \le x\mathrm{e}^{-t_0 x}$, und letzteres ist integrierbar.



## Anwendung: Gamma–Funktion

Wir dürfen daher unter dem Integral nach $t$ ableiten:

$$\int_{x=0}^{\infty} -x\mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}, \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2}.$$

Nochmaliges Ableiten nach $t$ liefert

$$\int_{x=0}^{\infty} -x^2\mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t^3}, \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{t^3}.$$

Nochmaliges Ableiten nach $t$ liefert

$$\int_{x=0}^{\infty} -x^3\mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = -\frac{3!}{t^4}, \quad \text{also} \quad \int_{x=0}^{\infty} x^3\mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = \frac{3!}{t^4}.$$

Per Induktion erhalten wir:

$$\boxed{\int_{x=0}^{\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = \frac{n!}{t^{n+1}}}$$



## Anwendung: Momente der Normalverteilung

**Aufgabe:** Durch Ableiten unter dem Integral berechne man

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} x^n \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}}$$

Die Funktion $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ ist die Dichte der Standardnormalverteilung, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine zentrale Rolle spielt. Das Integral über $x\varphi(x)$ ist ihr Mittelwert (Schwerpunkt), hier $= 0$ aus Symmetriegründen. Das Integral über $x^2\varphi(x)$ ist ihre Varianz (Trägheitsmoment). Allgemein nennt man das Integral über $x^n\varphi(x)$ das $n$–te Moment.

**Lösung:** Wir wissen bereits

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2} \,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}.$$

Substitution $y = x\sqrt{t/2}$ mit $t > 0$ und $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\sqrt{t/2}$ ergibt

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx^2/2} \,\mathrm{d}x = t^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}.$$



## Anwendung: Momente der Normalverteilung

Wir dürfen unter dem Integral nach $t$ ableiten und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}} -\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-tx^2/2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi},$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\mathrm{e}^{-tx^2/2} \,\mathrm{d}x = t^{-\frac{3}{2}}\sqrt{2\pi}.$$

Nochmaliges Ableiten nach $t$ liefert

$$\int_{\mathbb{R}} -\frac{x^4}{2}\mathrm{e}^{-tx^2/2} \,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}t^{-\frac{5}{2}}\sqrt{2\pi},$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} x^4\mathrm{e}^{-tx^2/2} \,\mathrm{d}x = 3 \cdot t^{-\frac{5}{2}}\sqrt{2\pi}.$$

Nochmaliges Ableiten nach $t$ liefert

$$\int_{\mathbb{R}} x^6\mathrm{e}^{-tx^2/2} \,\mathrm{d}x = 3 \cdot 5 \cdot t^{-\frac{7}{2}}\sqrt{2\pi}.$$

Dieses Muster setzt sich fort. Per Induktion erhalten wir

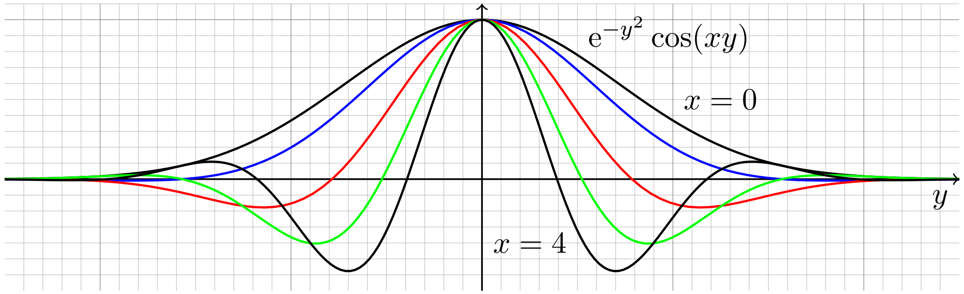
$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} x^{2k}\mathrm{e}^{-tx^2/2} \,\mathrm{d}x = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \cdot t^{-\frac{2k+1}{2}}\sqrt{2\pi}.}$$

## Anwendung: Ein erstes Fourier–Integral



**Aufgabe:** Man berechne das parameterabhängige Integral

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2} \cos(xy) \, \mathrm{d}y.$$




Existiert das Integral für jedes $x \in \mathbb{R}$? Ja, denn $|\mathrm{e}^{-y^2}\cos(xy)| \le \mathrm{e}^{-y^2}$.
Ist $F$ stetig? Ja, denn $\mathrm{e}^{-y^2}\cos(xy)$ ist bzgl. $y$ majorisiert integrierbar.
Ist $F$ differenzierbar? Ja, dank majorisierter Int'barkeit der Ableitung:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\mathrm{e}^{-y^2} \cdot (-y)\sin(xy)\right| \le |y|\mathrm{e}^{-y^2}.$$

## Anwendung: Ein erstes Fourier–Integral



**Lösung:** Ableiten unter dem Integral und partielle Integration:

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2} \cos(xy) \, \mathrm{d}y = \int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2} (-y) \sin(xy) \, \mathrm{d}y$$
$$= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2} \sin(xy)\right]_{y=-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{y=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2} x\cos(xy) \, \mathrm{d}y = -\frac{x}{2}F(x).$$

Wir kommen so auf die Differentialgleichung

$$\boxed{F'(x) = -\frac{1}{2}x\,F(x).}$$

Diese wird gelöst durch $F(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-x^2/4}$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Wir kennen zudem den Anfangswert $F(0) = \sqrt{\pi}$. Daraus folgt

$$\boxed{F(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2/4}.}$$

Man rechnet leicht nach, dass $u(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-x^2/4}$ die Gleichung $u'(x) = \frac{x}{2}u(x)$ erfüllt.
Wir werden später sehen, dass dies wirklich alle Lösungen der Differentialgleichung sind.
Anders gesagt, der Anfangswert $u(0)$ legt die Lösung eindeutig fest, hier $u(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

## Fazit: Wann gilt Vertauschbarkeit?



Sei $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^p$ offen und $Y \subset \mathbb{R}^q$. Ist für jedes $x \in X$ die Abbildung $y \mapsto f(x,y)$ über $Y$ integrierbar, so erhalten wir

$$F\colon X \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(x) := \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}y.$$

Für die Stetigkeit von $F$ haben wir folgende Kriterien:

- Stetigkeit gilt, wenn $f$ stetig und $Y$ kompakt ist, oder allgemeiner,
- wenn $f$ bezüglich $x$ stetig ist und majorisiert integrierbar über $Y$.

In diesem Fall gilt die schöne Formel

$$\lim_{x\to x_0} \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}y = \int_Y \lim_{x\to x_0} f(x,y) \, \mathrm{d}y = \int_Y f(x_0,y) \, \mathrm{d}y.$$

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Stetigkeit gilt nicht immer!

## Fazit: Wann gilt Vertauschbarkeit?



Wir wollen unter dem Integral ableiten gemäß

$$F(x) = \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}y \quad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad F'(x) = \int_Y f'(x,y) \, \mathrm{d}y$$

Für die Gültigkeit dieser Gleichung haben wir folgende Kriterien:

- Sie gilt, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ stetig und $Y$ kompakt ist, oder allgemeiner,
- wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ bezüglich $x_j$ stetig ist und majorisiert int'bar über $Y$.

In diesem Fall gilt die schöne Formel

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}y \quad = \quad \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,y) \, \mathrm{d}y.$$

⚠ Andernfalls ist Vorsicht geboten: Vertauschbarkeit gilt nicht immer!