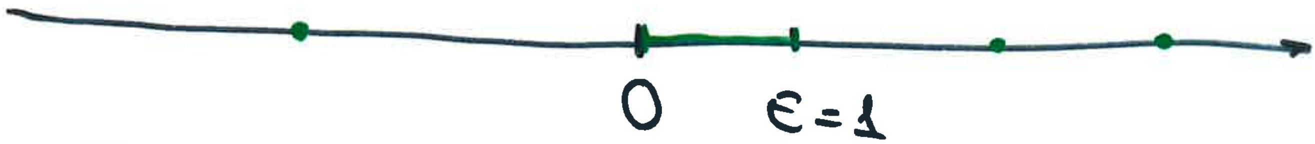
Lin. VR

$\mathbb{R}^1$

Lin. Alg. Vo 6.10.2014



$$\mathbb{C} = \{ z,\ z = \alpha + i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \}$$

$$\begin{cases} z_1 = \alpha_1 + i\beta_1, & \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R} \\ z_2 = \alpha_2 + i\beta_2, & \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- $z_1 + z_2 = \alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2 \\ \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2 \end{cases}$$

- $z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) =$

$$= \alpha_1\alpha_2 + i\alpha_1\beta_2 + i\beta_1\alpha_2 + \underbrace{i^2}_{=-1}\beta_1\beta_2 =$$

$$= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

<u>Beispiel:</u> $\mathcal{P}_5 = \{ p(x) : p(x) =$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_5 x^5 , \; a_i \in \mathbb{R} \}$

ist ein Spezialfall von $\mathcal{P}_n$, $n = 5$.

Sei $q(x) := b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_5 x^5$, $b_i \in \mathbb{R}$

Dann definieren wir die Vektoraddition als

$p(x) + q(x) =: (p+q)(x) =$

$$= a_0 + a_1 x + \dots + a_5 x^5 + b_0 + b_1 x + \dots + b_5 x^5 =$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_5 + b_5) x^5$$

$$= \sum_{i=0}^{5} (a_i + b_i) x^i$$

Skalarmultiplikation: $(s p)(x) := s p(x)$, $s \in K$.

<u>Beispiel:</u> $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{R})$; $X = \mathbb{R}$

$f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ z.B. $f(x) = \sin x$, $f(x) = e^x$,

$f(x) = \frac{1}{x}$, ...

Beispiel: $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ z. B. $\underbrace{\sin x + i\cos x}_{f(x)=}$,

$f(x) = \tan x - i\cot x$

$\vdots$

Nicht jede Teilmenge von V ist Unterraum!

Sei $V = \mathcal{P}_5 = \{p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5, \; a_i \in \mathbb{R}\}$

Grad ≤ 5

und $U = \{p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5, \; a_i \in \mathbb{R}, \; a_5 \neq 0!\}$

Gegenbeispiel:

$$\left.\begin{cases} p(x) = 2x - x^5 \in U \\ q(x) = 3 + 4x^2 + x^5 \in U \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$(p+q)(x) := p(x) + q(x) = 3 + 2x + 4x^2 \notin U$$

Also U ist kein Unterraum von V.

Beweis von 1.3

$V \dots$ lin. VR, $U, W \subseteq V \dots$ Unterräume.

$\Rightarrow U \cap W \dots$ Unterraum.

Beweis

(1) $u_1 \in U \cap W$, $u_2 \in U \cap W \overset{?}{\Longrightarrow} u_1 + u_2 \in U \cap W$

$u_1 \in U \wedge u_1 \in W$

$\underbrace{u_2 \in U}_{\Downarrow} \wedge \underbrace{u_2 \in W}_{\Downarrow}$

$u_1 + u_2 \in U \wedge u_1 + u_2 \in W \Rightarrow \underline{\underline{u_1 + u_2 \in U \cap W}}$

da U Unterr. da W Unterr.

$\square$

(2) $s \in K, u \in U \cap W \Longrightarrow su \in U \cap W$

Es gilt $\underline{\underline{s \in K}} \wedge u \in U \cap W$

$\Downarrow$

$\underline{u \in U} \wedge \underline{u \in W}$

$su \in U \wedge su \in W \Rightarrow \underline{\underline{su \in U \cap W}}$

weil U ein UR weil W ein UR

$\square$

Beispiel: (Nachtrag)

$$\mathrm{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

z.B. $x = \alpha + i\beta$ $\quad f(x) \in \mathbb{C}$

$$\boxed{f(\alpha + i\beta) = \alpha^2 + i(\alpha - \beta)}$$

oder

$$\boxed{f(\alpha + i\beta) = e^{\alpha} + i\sin\beta}$$