Beispiel 1.10

Beh. $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ mit

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : u = s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{u \in \mathbb{R}^3 : u = \begin{pmatrix}s\\t\\0\end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R}\right\} \text{ und}$$

$$W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{w \in \mathbb{R}^3 : w = r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{w \in \mathbb{R}^3 : w = \begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}\right\}.$$

Um die Behauptung zu zeigen, muß man für jedes $v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $u \in U$ und $w \in W$ eindeutig finden mit $v = u + w \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\t\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\t\\r\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} s &= v_1 \\ t &= v_2 \\ r &= v_3 \end{aligned}$$

Diese Wahl ist eindeutig;

Mit $u = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\0\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}0\\0\\v_3\end{pmatrix}$ gilt $v = u + w$.

$\square$

Beispiel 1.11

Beh. $\mathbb{R}^3 = U + W$ (aber $\mathbb{R}^3 \neq U \oplus W$) mit

$$U = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{u \in \mathbb{R}^3, u = \begin{pmatrix}s\\t\\0\end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R}\right\}$$

und

$$W = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{w \in \mathbb{R}^3, w = \begin{pmatrix}0\\r\\\rho\end{pmatrix}, r,\rho \in \mathbb{R}\right\}.$$

Um die Behauptung zu zeigen, muß man für jedes $v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $u \in U$ und $w \in W$ finden mit $v = u + w$ und zeigen, daß u und w nicht eindeutig sind.

$$v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\t\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\r\\\rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\t+r\\\rho\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underbrace{s = v_1, \ \rho = v_3}_{\text{eindeutig}} \quad \text{und} \quad \underbrace{t + r = v_2}_{\text{nicht eindeutig}}.$$

Mit

$$u = \begin{pmatrix}v_1\\v_2 - r\\0\end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix}0\\r\\v_3\end{pmatrix} \text{ gilt } v = u + w$$

für jedes $r \in \mathbb{R}$.

Bemerkung zum Satz 1.6.

Beispiel 1.10

Es gilt $\mathbb{R}^3 = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$, also ist $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Beispiel 1.11

Es gilt $\mathbb{R}^3 = U + W$ aber $U \cap W \neq \{0\}$, da $U \cap W = \{(x_2 \text{ Achse})\}$. D.h. $\mathbb{R}^3 \neq U \oplus W$

Bemerkung zur Definition 1.9

Man muß ausschließen, dass einer der Vektoren $v_1, \dots, v_k$ ein Nullvektor ist, da ein Satz von Vektoren, der den Nullvektor enthällt immer lin. abh. ist.

Es sei z.B. $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, \dots, v_{k-1} \neq 0$ und

$v_k = 0 \Rightarrow$

Die Beziehung kann man immer erfüllen

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 + \dots + s_k v_k = 0$$

mit der Wahl $s_1 = s_2 = \dots = s_{k-1} = 0$ und $s_k = 1$. Damit gibt es einen Satz von Skalaren $(s_1, s_2, \dots, s_k) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Beispiel 1.14

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind lin. unabh.

Beweis:

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2s_2 \\ 3s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2s_2 \\ s_1 + 3s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2s_2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{s_2 = 0}} \\ s_1 + 3s_2 = 0 \Rightarrow \end{cases} \Downarrow \; \underline{\underline{s_1 = 0}}$$

$\square$

Beispiel 1.15

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 = \emptyset \iff$$

$$\begin{pmatrix} 2s_1 + s_2 \\ 3s_1 + 2s_2 - s_3 \\ s_1 + 3s_2 + \alpha s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} 2s_1 + s_2 = 0 & \Rightarrow \underline{s_2 = -2s_1} \\ 3s_1 + 2s_2 - s_3 = 0 \\ s_1 + 3s_2 + \alpha s_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3s_1 - 4s_1 - s_3 = 0 \\ s_1 - 6s_1 + \alpha s_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -s_1 - s_3 = 0 \Rightarrow s_1 = -s_3 \\ -5s_1 + \alpha s_3 = 0 \Rightarrow 5s_3 + \alpha s_3 = 0 \iff \end{cases}$$

$$\boxed{(5 + \alpha) s_3 = 0.}$$

Fall 1. $\alpha \neq -5 \Rightarrow \alpha + 5 \neq 0$. D.h.

$$(\alpha+5)s_3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{s_3 = 0}} \Rightarrow \underline{\underline{s_1}} = -s_3 = \underline{\underline{0}} \Rightarrow$$
$$\underline{\underline{s_2}} = -2s_1 = \underline{\underline{0}}.$$

D.h. die Beziehg $\underline{s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 = 0}$ kann für alle $\alpha \neq -5$ __nur__ durch die Wahl $\underline{s_1 = s_2 = s_3 = 0}$ erfüllt werden.

Damit sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq -5,$ lin. unabh.

Fall 2. $\alpha = -5 \Rightarrow \alpha + 5 = 0$. D.h. $(\alpha+5)s_3 = 0$ gilt für alle s_3. Wähle $s_3 = t \Rightarrow s_1 = -t$,
$\Rightarrow s_2 = 2t, \; t \in \mathbb{R}$.

D.h. die Beziehg $s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 = 0$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, kann mit $s_1 = -t$, $s_2 = 2t$ und $s_3 = t \neq$ erfüllt werden. z.B. $t = 1$ führt auf

$$-1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2+0 \\ -3+4-1 \\ -1+6-5 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

D.h. die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind für $\alpha = -5$ lin. abhängig.

Satz 1.8. Beweis (indirekt).

Nehmen wir an, dass die Aussage falsch ist und man kann v auf zwei verschiedene Arten darstellen,

$$v = \sum_{i=1}^{k} s_i' v_i \quad \text{und} \quad v = \sum_{i=1}^{k} s_i v_i ,$$

wo $(s_1', s_2', s_3', \dots, s_k') \neq (s_1, s_2, s_3, \dots s_k)$.

$$\Rightarrow \; 0 = \sum_{i=1}^{k} s_i' v_i - \sum_{i=1}^{k} s_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(s_i' - s_i)}_{\sigma_i :=} v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sigma_i v_i , \quad \sigma_i \in K, \text{ d.h.}$$

Es gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i v_i \quad \text{mit } \sigma_i \in K.$$

Da $v_1, v_2 \dots, v_k$ lin. unabh. sind folgt

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_k = 0 \iff$$

$$s_1' - s_1 = s_2' - s_2 = \dots = s_k' - s_k = 0, \text{ d.h.}$$

$$s_1' = s_1,\ s_2' = s_2, \dots, s_k' = s_k. \quad \lightning \qquad \square$$

Beispiel 1.20 $K = \mathbb{R}$:

$$P_n = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, a_i \in \mathbb{R} \}$$

der Raum aller Polynome vom Grad $\leq n$.

Basis $= \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ besteht aus $n+1$ Basisvektoren $\Rightarrow \dim P_n = n+1$.

Beispiel 1.19

$$\mathbb{C}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{C} \right\}, K = \mathbb{C}.$$

$$\text{Basis} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$\dim \mathbb{C}^n = n$.

Beachten Sie: die kanonischen Basen für $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind identisch.