Beispiel 1.23

$V = \mathbb{R}^3$, $B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Wir überprüfen, ob B eine Basis für $\mathbb{R}^3$ ist, d.h., ob b_1, b_2 und b_3 lin. unabh. sind.

$$s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 b_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} s_1 + 0 + 0 \\ s_1 + s_2 + 0 \\ s_1 + s_2 + s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$s_1 = 0, \quad s_1 + s_2 = 0 \Rightarrow s_2 = 0, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0 \Downarrow s_3 = 0.$$

Also, b_1, b_2, b_3 sind lin. unabh. und damit B eine Basis für $\mathbb{R}^3$.

Finde $[v]_B$ für $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Es muß gelten $s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 b_3 = v \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_1 + s_2 \\ s_1 + s_2 + s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$s_1 = 3, \quad s_1 + s_2 = 1 \Rightarrow s_2 = -2, \quad s_1 + s_2 + s_3 = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_3 = -4 - s_1 - s_2 = -4 - 3 + 2 = -5.$$

$$\Rightarrow \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \neq v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Betrachte $E_3 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

E_3 ist auch eine Basis für $\mathbb{R}^3$.

Aus $s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3 = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

folgt, dass jetzt

$$[v]_{E_3} = v.$$

Lineare Abbildungen

V, W lin. VR. $\varphi : V \to W$ ist eine lineare Abbildung, falls

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in V$
2. $\varphi(sx) = s\varphi(x) \quad \forall s \in K, x \in V$.

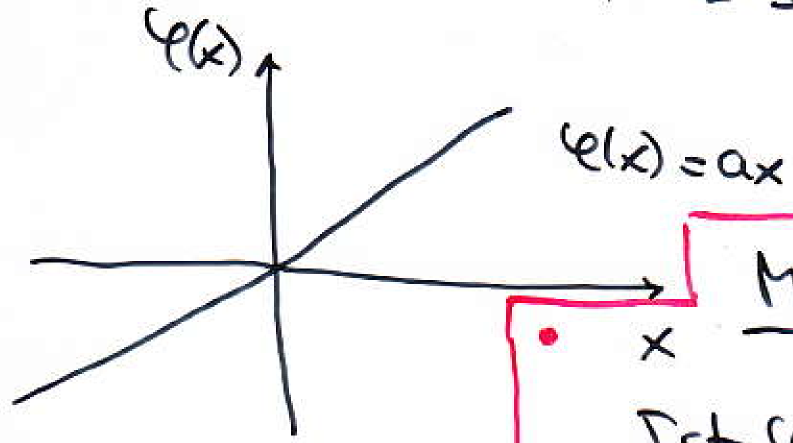
Beispiel: $V = W = \mathbb{R}, \ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) := ax, \ a \in \mathbb{R}, \ a \neq 0.$$

Beh. φ ist linear.

Beweis: 1. $\varphi(x+y) = a(x+y) = ax + ay = \varphi(x) + \varphi(y)$
$\forall x, y \in \mathbb{R}$.

2. $\varphi(sx) = asx = sax = s\varphi(x) \; \forall s \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$. $\square$



Merke:

Ist φ linear $\Rightarrow \varphi(0) = 0$.

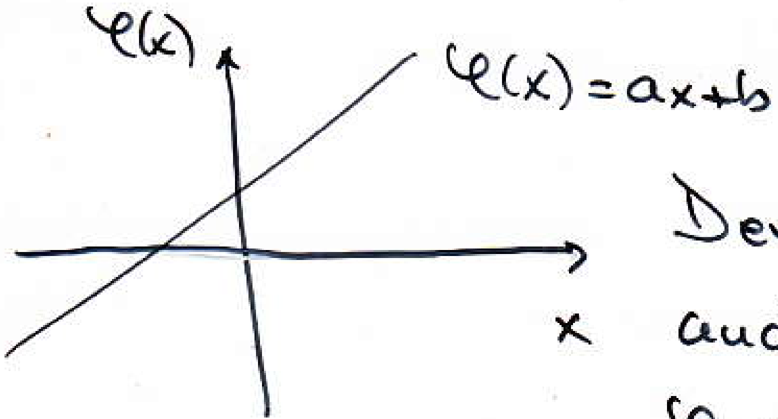
$\Rightarrow$ $\varphi(0) \neq 0 \Rightarrow \varphi$ ist nicht linear.

Beispiel: $V = W = \mathbb{R}$, $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = ax + b, \quad b \neq 0.$$

Beh. φ ist nicht linear.

Beweis: $\varphi(0) = b \neq 0$ $\square$



Der Graph von φ ist auch eine Gerade, doch φ ist nicht linear.

Beispiel: $V = W = \mathbb{R}^2$, $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Durch φ wird jedem Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein

Vektor $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ zugeordnet.

Bch. φ ist linear.

Beweis:

1. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\varphi(x+y) = \varphi\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) \\ x_1 + y_1 - x_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2 \\ x_1 - x_2 + y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

2. $s \in \mathbb{R}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\varphi(sx) = \varphi\begin{pmatrix} sx_1 \\ sx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_1 + 2sx_2 \\ sx_1 - sx_2 \end{pmatrix}$$

$$= s\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = s\varphi(x) \quad \forall s \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^2$$

$\square$

<u>Beispiel</u>: $V = \mathbb{R}^5$, $W = \mathbb{R}$; $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} := x_1 ;$$ φ ist linear.

<u>Beispiel</u>: $V = \mathbb{R}^5$, $W = \mathbb{R}$; $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} := x_1^3 ;$$ φ ist nicht linear.

<u>Gegenbeispiel</u>:

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\varphi(x) = x_1^3 = 1^3 = 1, \quad \varphi(y) = y_1^3 = 1^3 = 1$$

d.h. $\varphi(x) + \varphi(y) = 2$. Aber $\varphi(x+y) =$

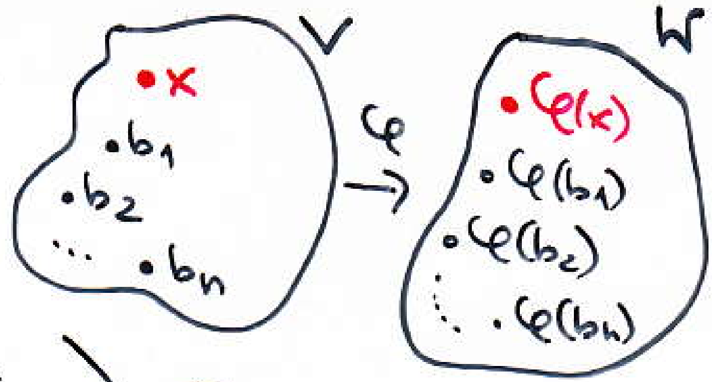
$$= \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} = 2^3 = 8.$$ Also $\varphi(x+y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)$.

<u>Wichtige Bemerkung</u>:

Sei V ein n-dim. lin. VR über K und sei W ein endlichdimensionaler VR. Sei $\varphi : V \to W$ eine lin. Abbildung.

Weiters sei $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ eine Basis in V.

Sei $\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} s_k b_k}$



$$\Downarrow$$

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} s_k b_k\right) =$$

$$= \varphi(\underbrace{s_1 b_1}_{y} + \underbrace{s_2 b_2 + \dots + s_n b_n}_{z}) =$$

φ linear

$$\overset{\downarrow}{=} \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(s_1 b_1) + \varphi(\underbrace{s_2 b_2}_{y} + \underbrace{\dots + s_n b_n}_{z})$$

$\downarrow$ φ linear

$$= \vdots$$

$\downarrow$ φ linear

$$= \varphi(s_1 b_1) + \varphi(s_2 b_2) + \dots + \varphi(s_n b_n) =$$

φ linear

$$\overset{\downarrow}{=} s_1 \varphi(b_1) + s_2 \varphi(b_2) + \dots + s_n \varphi(b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_k \varphi(b_k) \qquad \square \quad ☺$$

D.h. Linearkombinationen $\sum_k s_k b_k \in V$ gehen unter lin. Abbildung φ in Linearkombinationen $\sum_k s_k \varphi(b_k) \in W$ über.