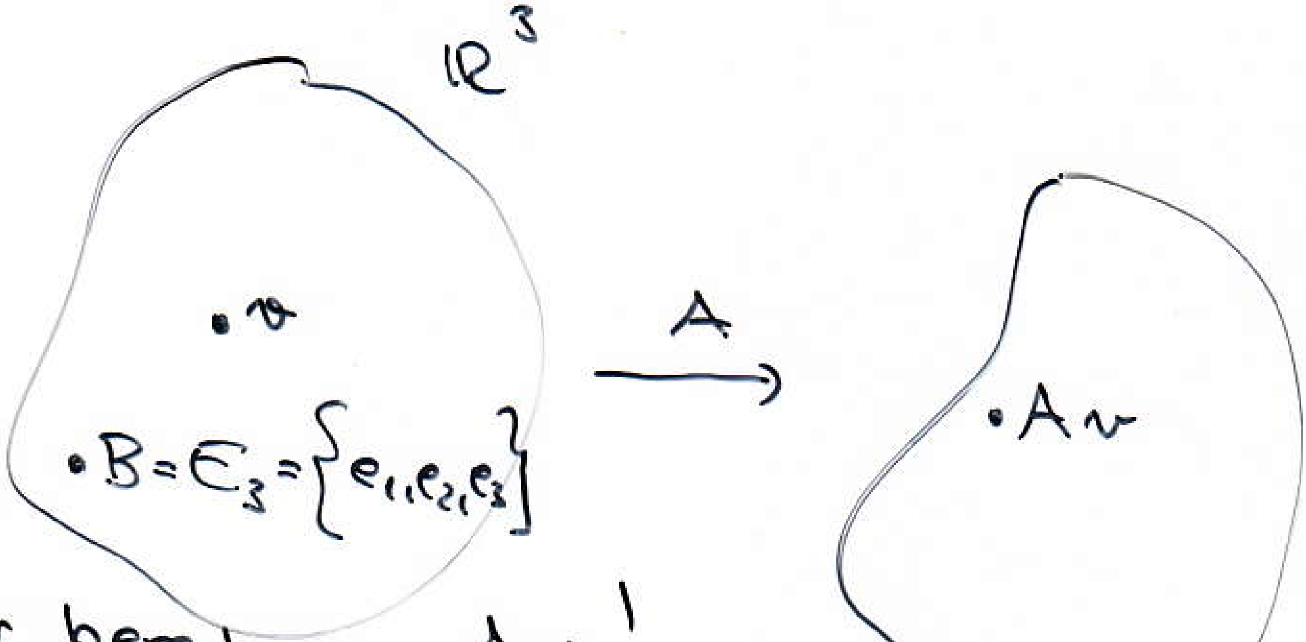
$$V = W = \mathbb{R}^3, \quad n = 3$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad Av := \begin{pmatrix} v_1 + 2v_3 \\ -2v_1 + 2v_2 \\ 3v_1 - v_2 \end{pmatrix}$$



Wir berechnen Av!

1. Einsetzen in die Definition.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -2+2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

2. $$Ae_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Ae_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Ae_3 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3 \Rightarrow s_1 = s_2 = s_3 = 1$$

$$Av = s_1 Ae_1 + s_2 Ae_2 + s_3 Ae_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Av = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 2} \\ \boxed{-2 \quad 2 \quad 0} \\ \boxed{3 \quad -1 \quad 0} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= [v]_{E_3} \text{ im } \mathbb{R}^3 \text{ Definitionsber.}} = \begin{pmatrix} 3 \\ \emptyset \\ 2 \end{pmatrix} = [Av]_{E_3} \text{ im } \mathbb{R}^3 \text{ Bildbereich}$$

<u>Beispiel:</u> $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 + 4v_2 + 6v_3 \\ 2v_1 + 3v_2 + 5v_3 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2}$$

Beispiel: Notation für ein $m \times n$ Matrix

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \iff A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 18 & 21 & 24 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow 3A - 2B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Definition 2.8

$A = (a_{ij})$, $i = 1,\dots,m$, $\boxed{j = 1,\dots,n}$ $\quad m \times n$

$B = (b_{jk})$, $\boxed{j = 1,\dots,n,}$ $k = 1, \ell$ $\quad n \times \ell$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \boxed{a_{i1}} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & & b_{2k} & & b_{2l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nk} & & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$$AB = (c_{ik}), \quad i = 1, \dots, m, \; k = 1, \dots, l$$

$$\underbrace{\underset{m \times n}{A}\;\underset{n \times l}{B}}_{m \times l}$$

D.h. $AB \in K^{m \times l}$.

Das Element c_{ik} steht in der i-ten Zeile und k-ten Spalte von AB. D.h.

$$c_{ik} = z_i(A) \cdot s_k(B) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},$$

für $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, l$.

<u>Beispiel</u>: $A \in K^{n \times n}$ ist symmetrisch, falls $A = A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} = A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$B \in K^{n \times n}$ ist schief-symmetrisch, falls $B^T = -B$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{pmatrix} = -B^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$