Beispiel 2.15

Wir versuchen die 3x4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

auf eine Gestalt zu bringen, aus der man leicht den Spalten- und den Zeilenrang ablesen kann.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} z_1 \longleftrightarrow z_3 \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tfrac{1}{2} z_1 \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & -2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} z_2 - 2z_1 \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} s_2 \longleftrightarrow s_4 \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} z_3 - z_2 \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} S_2 - S_1 \\ S_3 + S_1 \\ S_4 - S_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

Hier schon sieht man, dass der Spalten- und Zeilenrang gleich sind und zwar gleich 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 + 2S_2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

D.h. $r = 2$ und

$\text{Rang}(A) = \text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$

$= 2.$

Definition 2.14.

Matrix-Vektor-Produkt.

Es sei $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, d.h. $A \in K^{m \times n}$. Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \Rightarrow$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.16

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

D.h. $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow Ax \in \mathbb{R}^2$.

<u>Wichtige Bemerkung:</u>

Ax kann man wie folgt umschreiben:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Spalten von } A}$$

$$= x_1 \vec{s}_1 + x_2 \vec{s}_2 + \dots + x_n \vec{s}_m.$$

D.h. Matrix-Vektor-Produkt ist gleichbedeutend mit dem Bilden der obigen Linearkombination der Spalten von A.

Beispiel 2.17

Es seien $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$. Man soll überprüfen, ob b_i lin. unabh. sind. D.h. man setzt

$$s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 b_3 = \emptyset \quad (*)$$

und löst nach $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ nach, um zu sehen ob $s = 0$ gilt. $(*)$ ist ein lin. Gleichungssystem:

$$s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 b_3 = \emptyset \iff Ax = y,$$

wobei $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es seien $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ linear unabh. Dann bilden sie eine Basis für $\mathbb{R}^3$. Es sei $v \in \mathbb{R}^3$. Dann ist die Suche nach $[v]_B$ gleichbed. mit der Lösung eines lin. Gleichungssystems:

$$s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 b_3 = v \iff Ax = y,$$

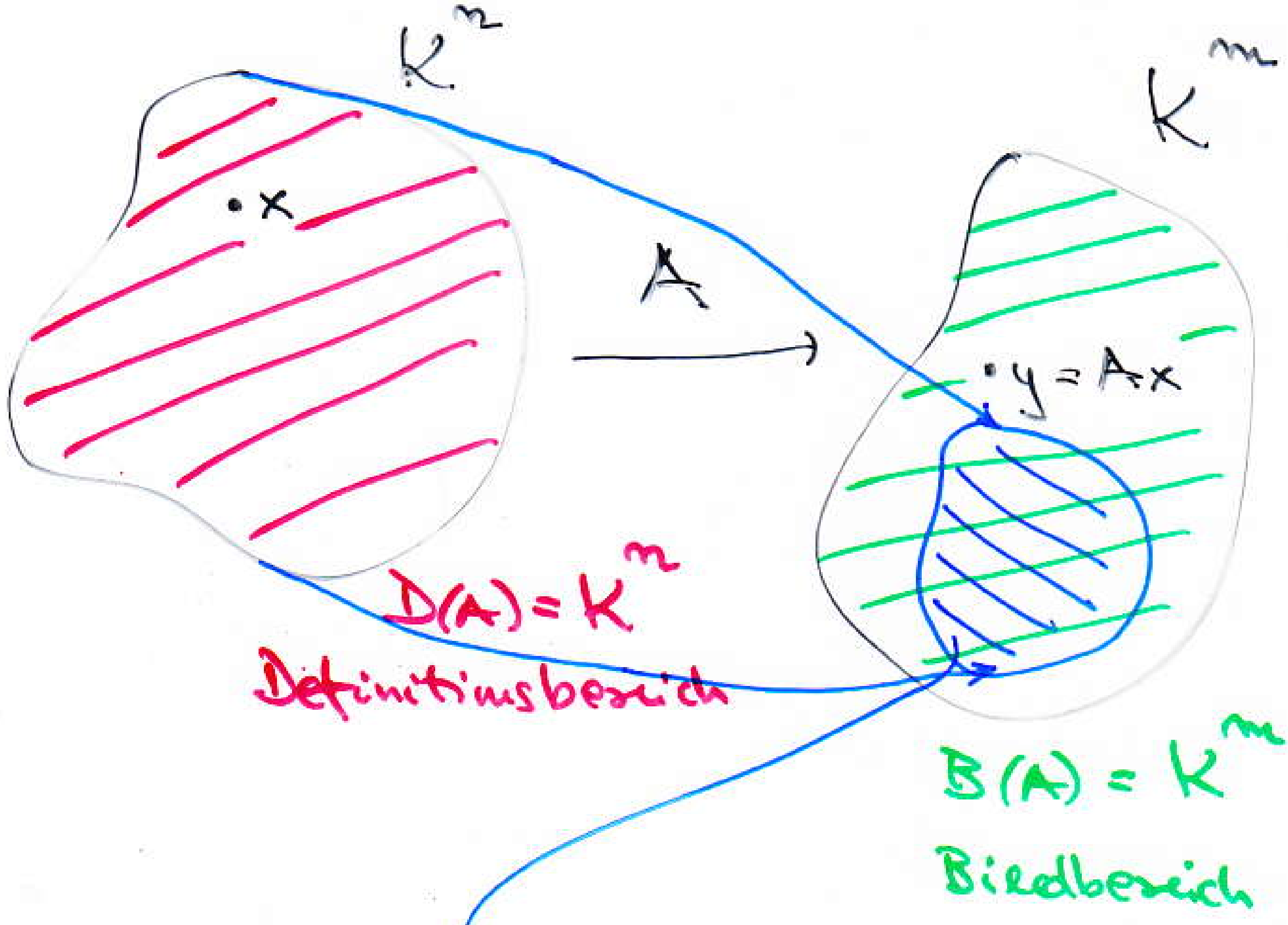
wobei $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v$.

Definition 2.16: Vorbereitung zur Diskussion von lin. GS.

Matrix $A \in K^{m \times n}$ als eine Abbildung

$$A : K^n \to K^m.$$

Es sei $x \in K^n \Rightarrow Ax = y \in K^m$.



$B(A)$ = Bild von $A \subseteq K^m$

Definition vom $B(A)$:

$$B(A) := \{ y \in K^m : \exists x \in K^n \text{ mit } y = Ax \}.$$

Wichtige Bemerkung zum Bild von A.

Es folgt aus der Definition

$$\mathcal{B}(A) = \{ y \in K^m ;\ \exists x \in K^n : y = Ax \} \text{ mit}$$

A in Spaltenschreibweise

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} :$$

$$\mathcal{B}(A) = \{ y \in K^m ,\ y = Ax = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \dots + x_n s_n ,\ x_i \in K \}$$

$$= \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} | \\ s_1 \\ | \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} | \\ s_2 \\ | \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} | \\ s_n \\ | \end{pmatrix} \right\}.$$

D.h.

$$\boxed{\operatorname{Dim} \mathcal{B}(A) = \operatorname{Dim} \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} | \\ s_1 \\ | \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} | \\ s_n \\ | \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Rang}(A)}$$

Aus den Rechenregeln von Matrizen folgt, dass jede $m \times n$ Matrix eine lineare Abbildung von K^n nach K^m ist.

Achtung: $\mathcal{B}(A)$ kann eine echte Teilmenge von K^m sein!

Beispiel:

- $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Berechne $\mathcal{B}(A)$:

$$\mathcal{B}(A) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R}^3 : y = x_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

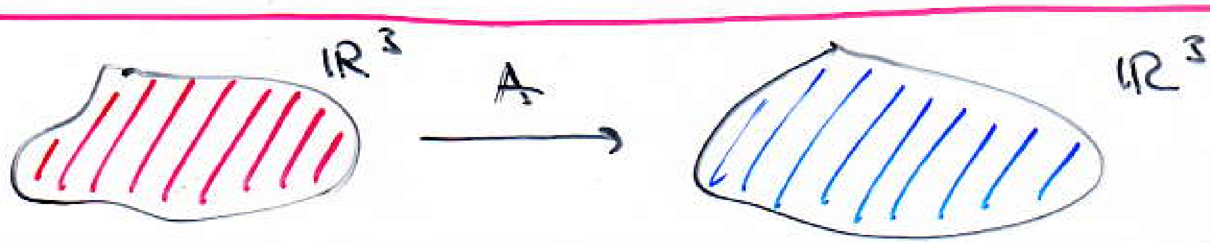
$$= \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Da diese drei Vektoren lin. unabh. sind folgt

$$\operatorname{Dim} \mathcal{B}(A) = \operatorname{Dim} \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = 3, \text{ also}$$

$$\mathcal{B}(A) = \mathbb{R}^3$$

In diesem Fall gibt es $\forall y \in \mathbb{R}^3$ ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = y$.



Sei

- $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Bezeichne $\mathcal{B}(A)$:

$$\mathcal{B}(A) = \{y \in \mathbb{R}^3, y = Ax, x \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R}^3, y = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R}^3, y = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R}^3, y = \bar{x}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{x}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$ Also,

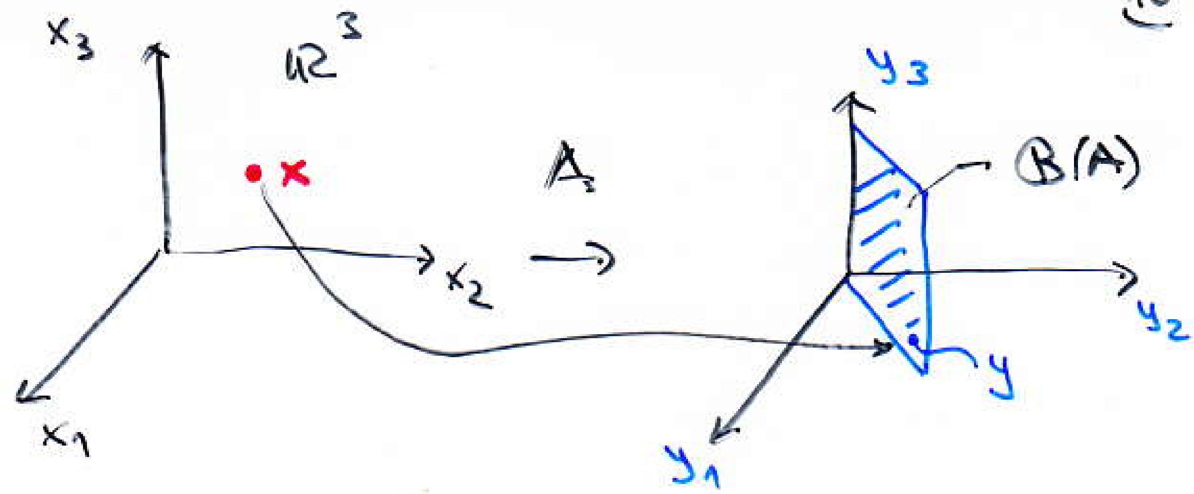
$\operatorname{Dim} \mathcal{B}(A) = 2 = \operatorname{Rang}(A)$.

Hier ist $\mathcal{B}(A)$ eine Ebene im $\mathbb{R}^2$, also eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

Bezeichnen wir diese Ebene:

$$y = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s,t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$y_1 = s, \; y_2 = s, \; y_3 = s+t \Leftrightarrow y_1 = y_2, \; y_3 \in \mathbb{R}$$



In diesem Fall wird $\mathbb{R}^3$ zur Gänze auf die blaue Ebene abgebildet. Nur für die Punkte $y \in \mathcal{B}(A)$ gibt es $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = y$.

Sei

- $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Berechne $\mathcal{B}(A)$:

$$\mathcal{B}(A) = \{y \in \mathbb{R}^3,\ y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R}^3,\ y = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},\ x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

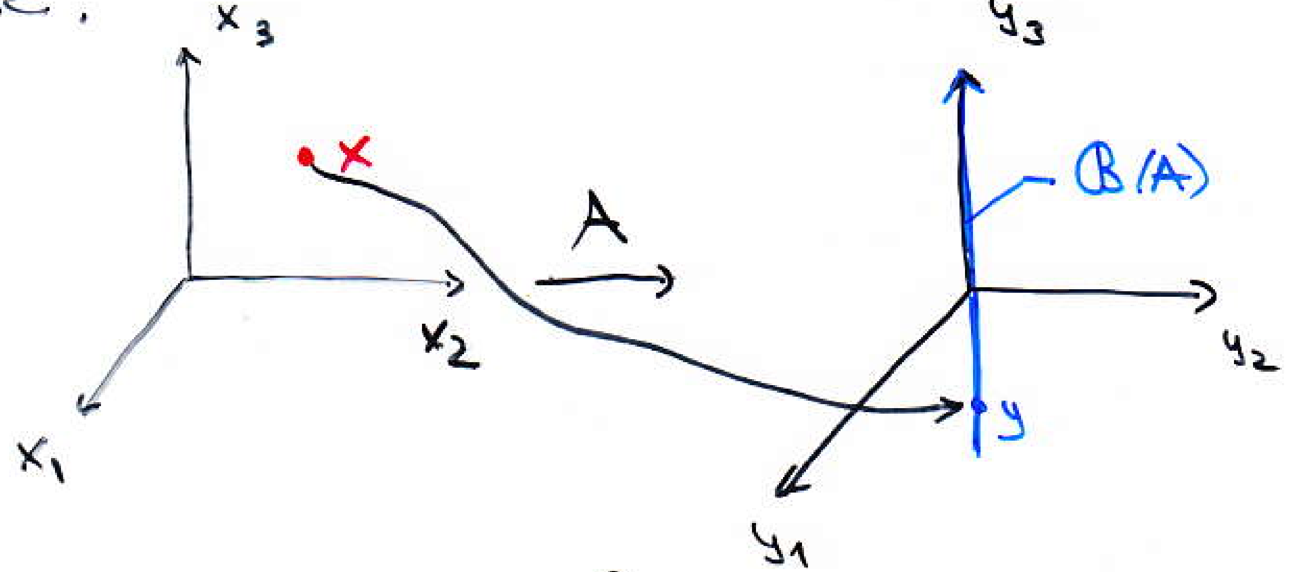
$$= \left\{y \in \mathbb{R}^3,\ y = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 4x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_i \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R}^3,\ y = \bar{x}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{x}_1 \in \mathbb{R}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Also, $\operatorname{Dim} \mathcal{B}(A) = 1 = \operatorname{Rang}(A)$.

Hier ist $\mathcal{B}(A)$ eine Gerade im $\mathbb{R}^3$, die z-Achse.

und wieder ist $\mathcal{B}(A)$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.



In diesem Fall wird $\mathbb{R}^3$ zur Gänze auf die blaue Gerade abgebildet. Nur für die Punkte $y \in \mathcal{B}(A)$ gibt es $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = b$.

Betrachten wir nochmals ein lin. GS.
Es sei $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$ und $x \in K^n$, mit $Ax = b$. Schreiben wir A als

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$Ax = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_n s_n = b.$$

D.h. Das Lösen eines lin. Gl. Systems ist die

Suche nach jener Linearkombination der Spalten von A, die b ergibt.

Damit ist klar:

$\boxed{\text{Das lin. GS } Ax=b \text{ mit } A\in K^{m\times n}, b\in K^m \text{ und } x\in K^n \text{ hat genau dann eine Lösung, wenn } b\in \mathcal{B}(A) \text{ ist.}}$

So eine Lösung muss nicht eindeutig sein.

Nach der Definition von $\mathcal{B}(A)$: Sei $b\in K^m$,

$$\Rightarrow \quad b\in \mathcal{B}(A) \Leftrightarrow \exists x\in K^n \text{ mit } Ax=b$$

$\square$

<u>Beispiel</u>. $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\Rightarrow \mathcal{B}(A)=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Ist $b=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow b\notin \mathcal{B}(A)$.

Damit ist das GS $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ nicht lösbar und der Widerspruch offensichtlich:

$$x_1+x_2=1 \wedge x_1+x_2=0$$

nicht möglich.