Bemerkungen

1. Übung

1.6 a)

$$V = \mathcal{P}_n = \{ \text{Polynome vom Grad} \leq n \}$$

$$= \{ p(x) = a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n, \ a_i \in \mathbb{R} \}$$

$$U := \{ p(x) \in \mathcal{P}_n, \ \text{grad } p(x) \geq 2 \} \cup$$

$$\{ p(x) = 0 \ \forall x \}$$

Frage: Ist U ein UR von V?

1. Fall $n = 2$ $\Rightarrow U = \{ p(x) \in \mathcal{P}_2, \text{grad}$

$$p(x) = 2 \} \cup \{ p(x) = 0 \forall x \}$$

$$\Rightarrow U = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \ a_2 \neq 0 \}$$

kein lin. UR

2. Fall $n > 2$ z.B. $n = 4$

$$\Rightarrow U = \{ \text{Polynome mit der Grad} \geq 2 \text{ und } \leq 4 \} \cup \{ p(x) = 0 \ \forall x \}$$

$$= \{ \text{Polynome vom Grad} = 2, 3 \text{ oder } 4 \} \cup$$

$\cup \{ p(x) = 0 \; \forall x \}$. Kein lin UR.

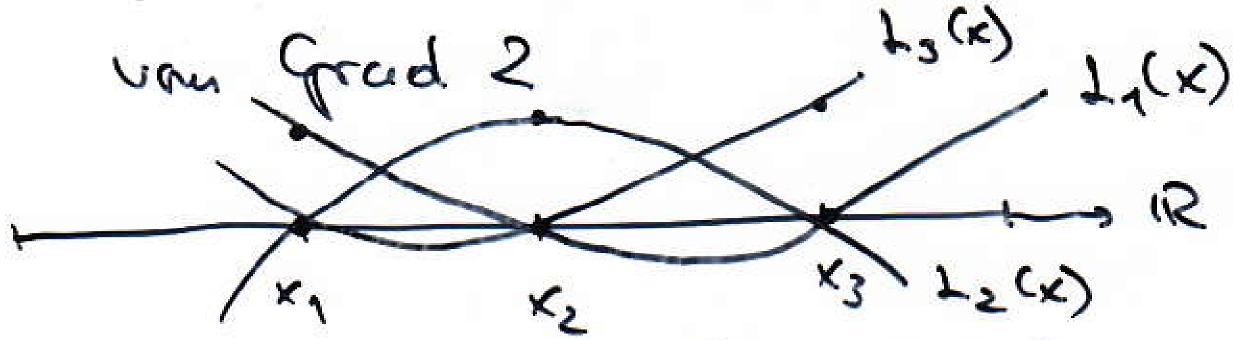
<u>Gegenbeispiel:</u>

$p_1(x) = 1 + x^5$, $p_2(x) = 1 - x^5$ beide in U.

Aber $p_1(x) + p_2(x) = 2 \notin U$.

1.15 Lagrange Basis

$B_L = \{ L_1(x), L_2(x), L_3(x) \}$ ... Polynome vom Grad 2



$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$M_B = \{ 1, x, x^2 \}$$

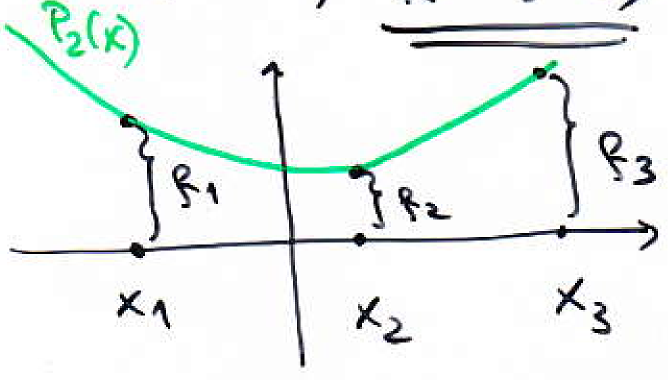
<u>Interpolationsaufgabe:</u> Gegeben $f(x)$!

Suche $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit

$$P(x_i) = f_i \quad i = 1,2,3 \quad ; \underline{\underline{f_i = f(x_i)}}$$

Gegeben:

x	x_1	x_2	x_3
f	f_1	f_2	f_3



M_B

$$\begin{cases} f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ f_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \\ f_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Um $a_0, a_1\, a_2$ zu berechnen muss man ein lin. GS lösen.

L_B

$$\begin{cases} P(x) = c_1 L_1(x) + c_2 L_2(x) + c_3 L_3(x) \\ P(x_i) = f_i \quad i = 1,2,3 \Rightarrow \\ c_1 = f_1 \,,\; c_2 = f_2 \,,\; c_3 = f_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)}$$

Hier sind die c_i sofort klar (ohne Rechnung).

Ebene im $\mathbb{R}^3$

Ebene E: $ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow$

Ein Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ liegt in der Ebene E, falls

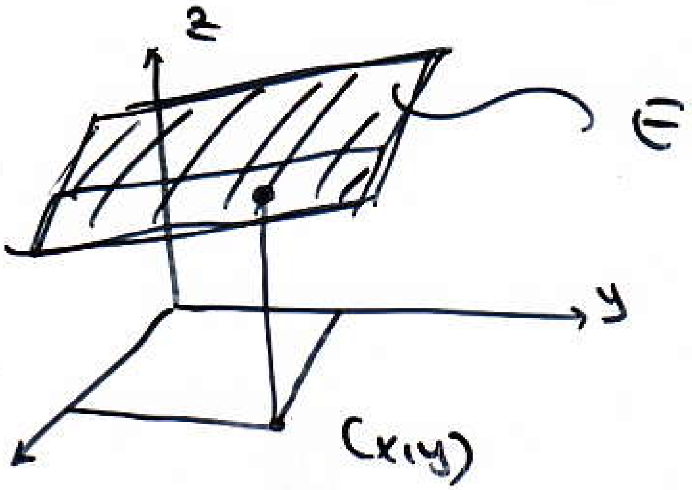
gilt $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$

- **Annahme $c \neq 0$**

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{a}{c}}^{\alpha} x + \overbrace{\frac{b}{c}}^{\beta} y + z + \overbrace{\frac{d}{c}}^{\delta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha x + \beta y + z + \delta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -\alpha x - \beta y - \delta}$$



Es gilt

$$\begin{cases} d = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow \delta = 0 \Rightarrow z\Big|_{x=y=0} = 0 \\ d \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin E \Leftrightarrow \delta \neq 0 \Rightarrow z\Big|_{x=y=0} \neq 0 \end{cases}$$

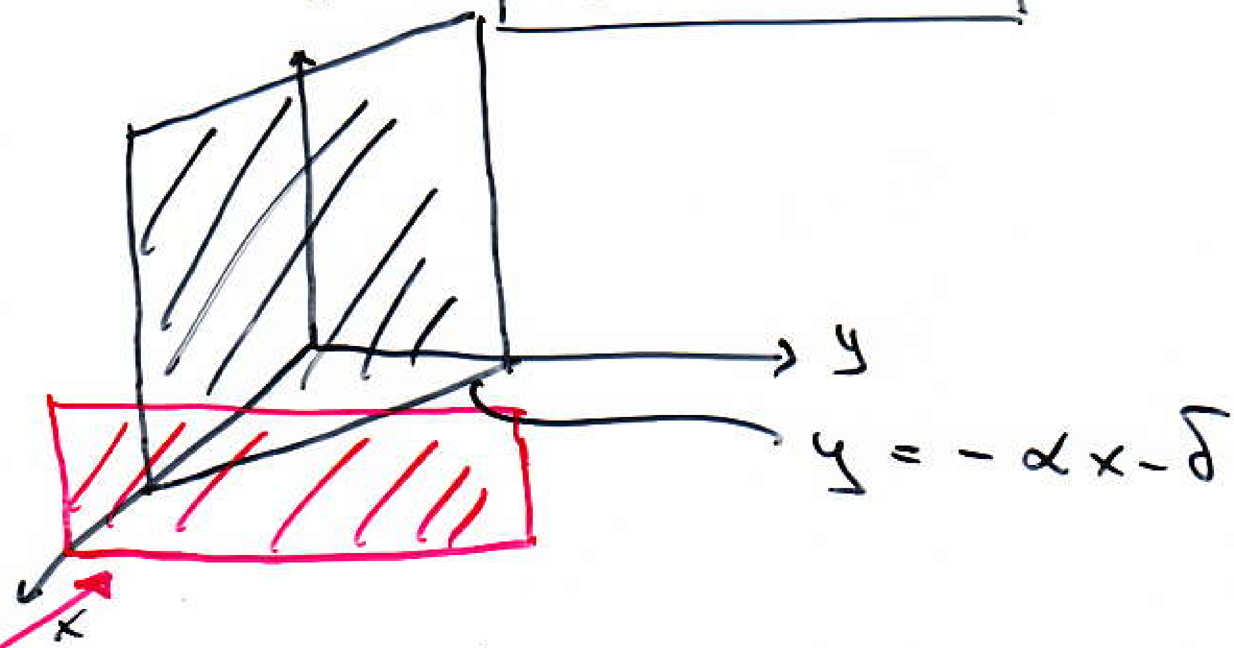
• <u>Annahme $c = 0$</u>

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{ax + by + d = 0, \ z \in \mathbb{R}}$$

Sei $b \neq 0 \Rightarrow \overset{\alpha}{\frac{a}{b}}\, x + y + \overset{\delta}{\frac{d}{b}} = 0$

$$\alpha x + y + \delta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\alpha x - \delta}$$



$b = 0 \Rightarrow ax + d = 0$

$a \neq 0 \Longrightarrow x = -\frac{d}{a} = -\delta, \ y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$

Auch hier gilt $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in E \Longleftrightarrow d = 0.$

Beispiel 2.19: Löse das lin. GS $Ax=b$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{A\in\mathbb{R}^{3\times 5}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{x\in\mathbb{R}^5} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix}}_{b\in\mathbb{R}^3}.$$

Gauß Elimination

$$\Rightarrow (A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 6 & 19 \end{array}\right),$$

$z_1 \leftrightarrow z_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 6 & 19 \end{array}\right)$$

$\frac{z_1}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \overset{3}{1} & \overset{1}{\frac{1}{3}} & \overset{2}{\frac{2}{3}} & \overset{1}{\frac{1}{3}} & \overset{2}{\frac{2}{3}} & \overset{9}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 6 & 19 \end{array}\right)$$

$z_3 - 3z_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ \boxed{0} & 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ \boxed{0} & 0 & 4 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

$S_2 \leftrightarrow S_3$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right) \end{array}$$

$\frac{z_2}{2}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ 0^{0} & 1^{4} & 0^{0} & \frac{1}{2}^{2} & 1^{4} & \frac{5}{2}^{10} \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right) \end{array}$$

$z_3 - 4z_2$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_{\text{"A"}} & & & & & \underbrace{0}_{\text{"b"}} \end{array}\right) \end{array}$$

$$\text{Rang}(A) = 2 \overset{?}{=} \text{Rang}(A:b)$$

$\Rightarrow \exists$ Lösung

$\hat{=}$ (I)

$$\begin{cases} \boxed{x_1 + \frac{2}{3}x_3} + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 = 3 \\ \boxed{x_3} + \frac{1}{2}x_4 + x_5 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 = 3 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \\ x_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - x_5 \end{cases}$$

1. Mögl.

Wähle $\underline{x_2 = x_4 = x_5 = 0} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 = 3 \\ \boxed{x_3 = \frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x_1}} = 3 - \frac{2}{3}x_3 = 3 - \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x_p := \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x_p ist die Partikulärlösung von $Ax = b$ und erfüllt somit $Ax_p = b$. Wir berechnen jetzt die Lösungsschar!

2. Mögl. Wähle $x_2 = t_1,\ x_4 = t_2,\ x_5 = t_3$

$t_i \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_3 = 3 - \frac{1}{3}t_1 - \frac{1}{3}t_2 - \frac{2}{3}t_3 \\ \boxed{x_3 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}t_2 - t_3} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x_1} = 3 - \frac{1}{3}t_1 - \frac{1}{3}t_2 - \frac{2}{3}t_3 - \frac{2}{3}x_3 =$$

$$= 3 - \frac{1}{3}t_1 - \frac{1}{3}t_2 - \frac{2}{3}t_3 - \frac{2}{3}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t_2 - t_3\right)$$

$$= 3 - \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{5}{\cancel{2}} + t_1\left(-\frac{1}{3}\right) + t_2\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\underbrace{-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{3}}\right)}_{=0}$$

$$+ t_3\underbrace{\left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)}_{=0}$$

$$= \boxed{3 - \frac{5}{3} - \frac{1}{3}t_1} = \boxed{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}t_1}$$

D.h. die allgemeine Lösung x ist:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t_1 \\ t_1 \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2}t_2 - t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\ 0 + 1t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\ \frac{5}{2} + 0t_1 - \frac{1}{2}t_2 - t_3 \\ 0 + 0t_1 + 1t_2 + 0t_3 \\ 0 + 0t_1 + 0t_2 + 1t_3 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_p} + t_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + t_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + t_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} .$$

$t_i \in \mathbb{R}$

Dh: $x = x_p + x_a$ und x erfüllt

$\boxed{Ax = b}$ mit $\boxed{Ax_p = b}$. Probe: $Ax =$

$= A(x_p + t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3) =$

Linearität von A

$$\overset{\downarrow}{=} \underbrace{Ax_p}_{=b} + \underbrace{t_1 A v_1 + t_2 A v_2 + t_3 A v_3}_{Ax_a = 0 \; ?} = b \;(\Leftarrow)$$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Also, es gilt $x = x_p + x_a$ mit

$$Ax_p = b, \; Ax_a = \emptyset \Rightarrow Ax = b$$

Beachten Sie:

Wählt man in der allg. Lösung $t_1 = t_2 = t_3 = \emptyset$ $(\Rightarrow x_2 = x_4 = x_5 = 0)$, so erhält man

$$x = x_p.$$