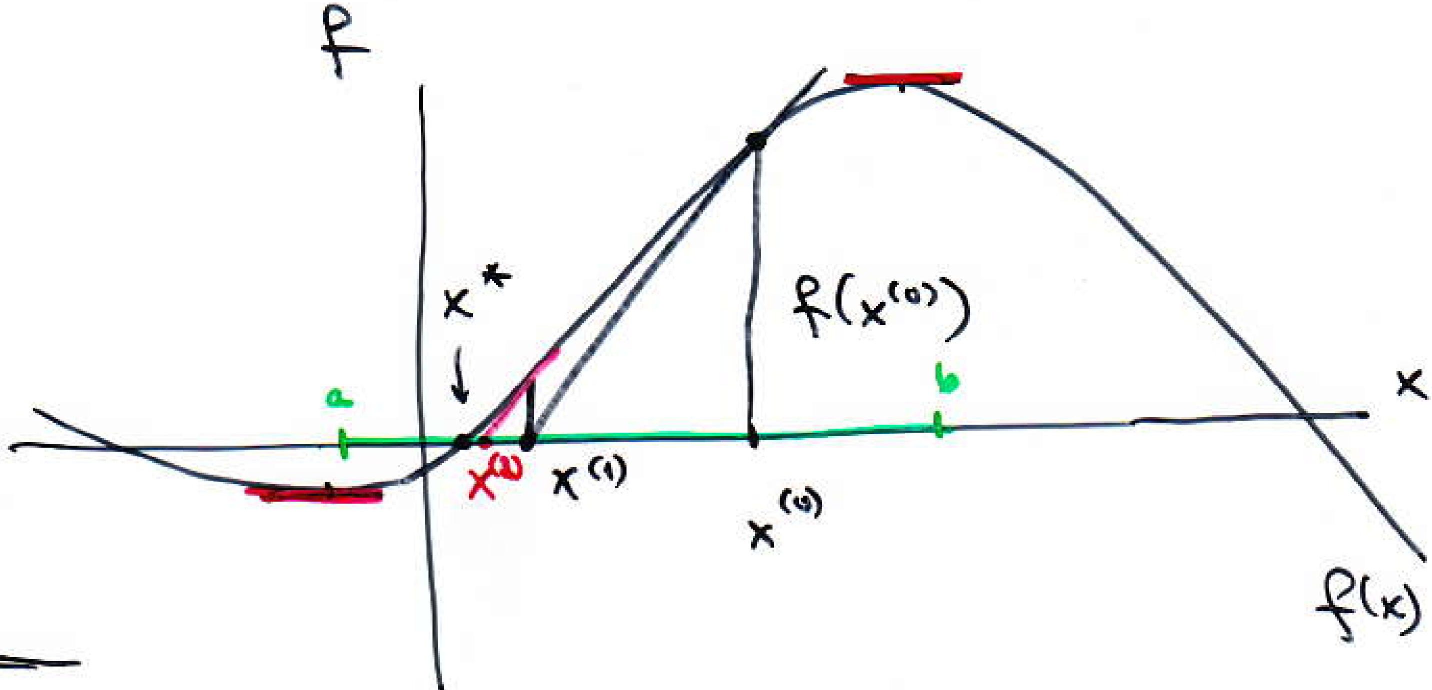
Das Newton Verfahren (wird in Ana2 studiert)

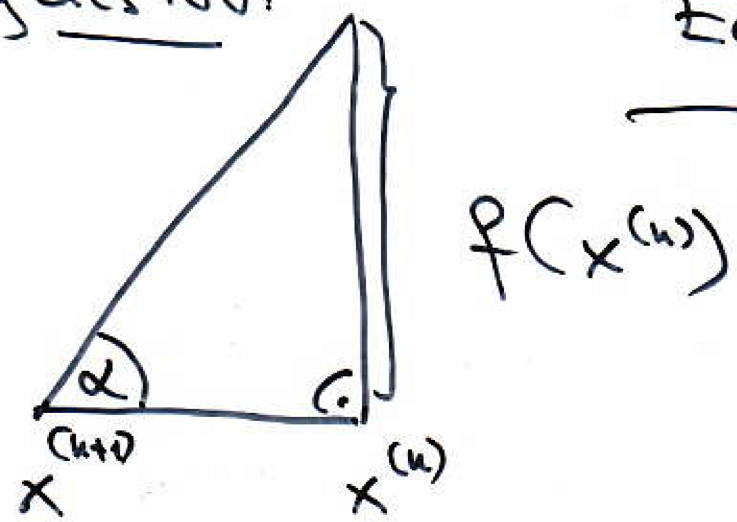
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Aufgabe: Finde $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = 0$!



Vorauss. $f'(x^*) \neq 0$ und auch $f'(x) \neq 0$ in einer Umgebg von x^*. lt. Zeichnung gilt diese Annahme in $[a,b]$ mit $x^* \in [a,b]$.

Herleitung des NV.



$$\tan\alpha = f'(x^{(n)})$$

$$\Downarrow$$

$$\tan\alpha = f'(x^{(n)}) = \frac{f(x^{(n)})}{x^{(n)} - x^{(n+1)}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^{(n)} - x^{(n+1)} = \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{x^{(n+1)} := x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}}$$

$x^{(0)}$ ... bekannt $\qquad$ $\underline{\underline{n \geq 0}}$

<u>Annahme:</u> $\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = x^*$, d.h. das Verfahren konvergiert gegen ein x^* $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \quad x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

$$\Longrightarrow \quad x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{f(x^*) = 0}$$

Beispiel 2.20: Kern einer Matrix

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Berechne den Kern.

$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

1. Zuerst (als zusätzliche Aufgabe) berechnen wir $\mathcal{B}(A)$.

$$\mathcal{B}(A) := \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y = (c_1 + c_2 - c_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Also $\text{Rang}(A) = 1$.

2. Jetzt berechnen wir den $\text{Kern}(A) =$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0 \}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{z_2 - z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

D.h. $\text{Rang}(A) = 1 \Rightarrow \text{Dim Kern}(A) = n - \text{Rang}(A)$
$= 3 - 1 = 2. \Rightarrow$ Kern (A) ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Es gilt $\quad x_1 + x_2 - x_3 = 0 \iff$

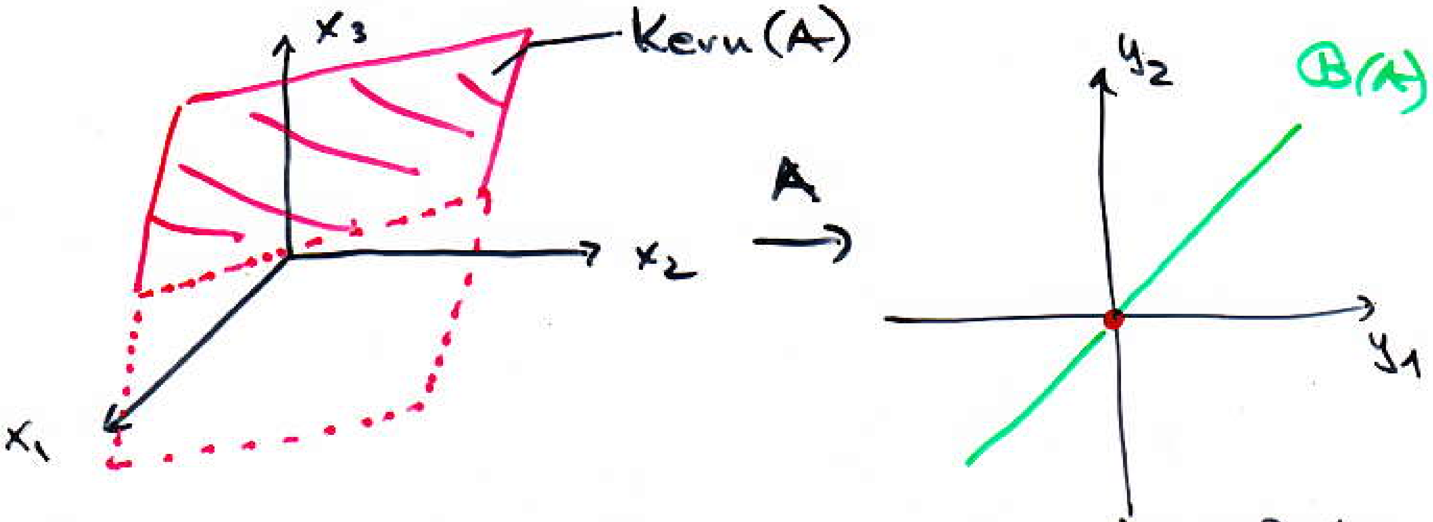
$$x_1 = -x_2 + x_3 .$$

Wähle $\boxed{x_2 = t_1,\ x_3 = t_2 \Rightarrow \quad x_1 = -t_1 + t_2}$

$$\Rightarrow \quad x \in \mathrm{Kern}(A) \iff \quad x = \begin{pmatrix} -t_1 + t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \mathrm{Kern}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3,\ x = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \iff \mathrm{Dim}\, \mathrm{Kern}(A) = 2.$$



- Die Ebene Kern(A) wird unter A auf den Nullpunkt im $\mathbb{R}^2$ abgebildet.
- Der Raum $\mathbb{R}^3$ wird unter A auf die Gerade im $\mathbb{R}^2$ abgebildet.

Probe:

- $$A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= -1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \checkmark$$

- $$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \checkmark$$

Beispiel 2.21

$$Ax = b,\quad A = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

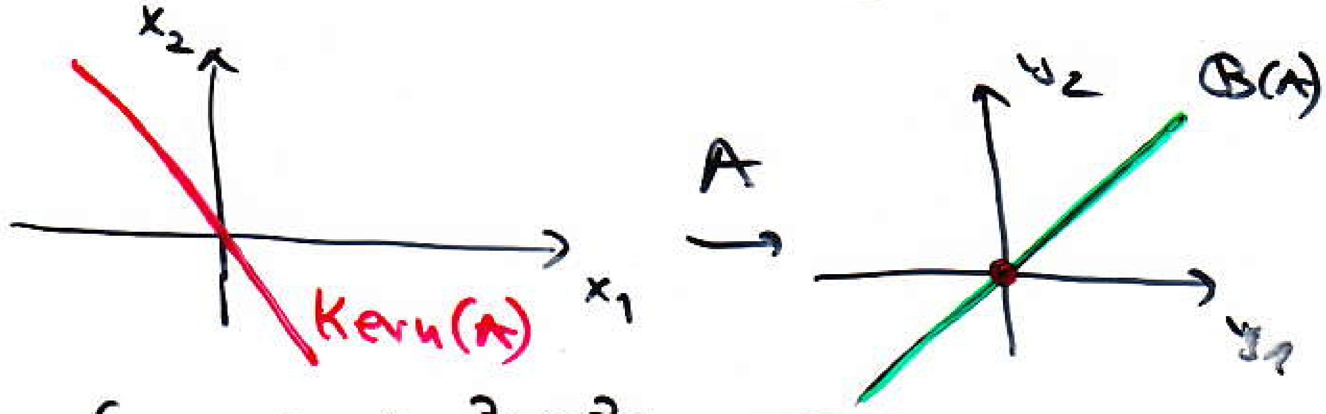
- $$\mathcal{B}(A) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2,\ y = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y \in \mathbb{R}^2,\ y = s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \right\}$$

Rang$(A) = 1$

- $$\text{Kern}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2,\ Ax = 0 \right\}$$

$$\operatorname{Dim} \operatorname{Kern}(A) = n - \operatorname{Rang}(A) = 2 - 1 = 1$$



$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 - z_1} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

$$x_2 = t_1 \Rightarrow x_1 = -t_1$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = +t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Kern} A = \{ x \in \mathbb{R}^2, Ax = 0 \} = \{ x \in \mathbb{R}^2, x = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \}.$$

Inverse von A

Definition $A \in K^{n \times n}$ heißt regulär falls eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ existiert mit

$$AB = I_n.$$

B heißt Inverse von A, $B := A^{-1}$.
Andernfalls heißt A singulär.

Lemma 2.1

Sei A regulär, $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt

$$AX = 0 \implies X = 0.$$

Beweis: Sei $X \in K^{n \times \ell}$, dann kann man AX bilden und $\underbrace{\underset{n \times n}{A}\,\underset{n \times \ell}{X}}_{n \times \ell} \in K^{n \times \ell}$.

Wir schreiben X in Spaltenschreibweise mit ℓ Spalten s_i, $i = 1, \dots, \ell$ und erhalten

$$AX = A\begin{pmatrix} | & | & & | \\ s_1 & s_2 & \dots & s_\ell \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ As_1 & As_2 & \dots & As_\ell \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Machen wir zuerst ein Beispiel:

$A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und

$X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

Definition der Matrixmult.

<u>Merke:</u> Mit $s_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt

auch

$$AX = \begin{pmatrix} | & | \\ As_1 & As_2 \\ | & | \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \;\vdots\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c:c} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right)$$

Also, allgemein, ist die Voraussetzung

$$AX = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ As_1 & As_2 & \cdots & As_l \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{l \text{ Spalten von } AX} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{l \text{ Mal}}$$

gleichbedeutend mit

$$As_i = 0 \quad i = 1, \dots, l.$$

Das sind l lin. GS. mit einer Matrix

$A \in K^{n\times n}$, Rang von $A = n \underset{\text{Satz 2.10}}{\Rightarrow} s_i = 0 \ \forall i$

$\Leftrightarrow X = 0.$ $\square$

Satz 2.15

Sei A^{-1} die Inverse von A, d.h. $AA^{-1} = I_n$. Dann gilt auch $A^{-1}A = I_n$, d.h. A und A^{-1} kommutieren.

Beweis:

Wir berechnen zuerst $A(I_n - A^{-1}A)$:

$$A(I_n - A^{-1}A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Assoziativges.}}}{=} AI_n - \underbrace{AA^{-1}}_{I_n}A = A - A = \emptyset$$

D.h. $A \in K^{n \times n}$ ist regulär (da A^{-1} existiert)

und mit $X := (I_n - A^{-1}A)$ gilt

$$AX = 0 \underset{\text{Lemma 2.1.}}{\Rightarrow} X = 0 \Leftrightarrow I_n - A^{-1}A = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{A^{-1}A = I_n}}$$

$\square$