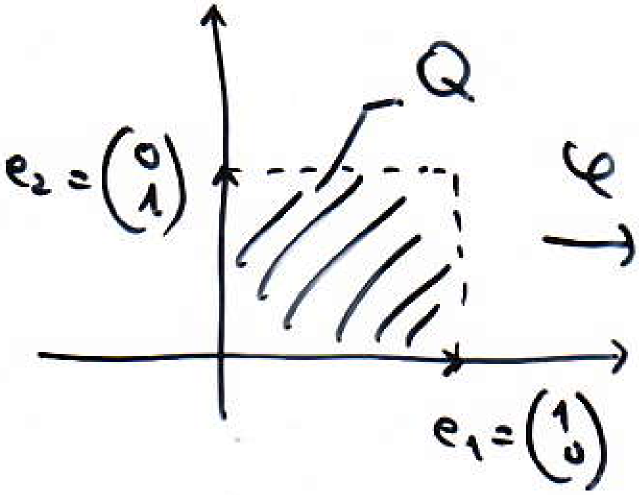
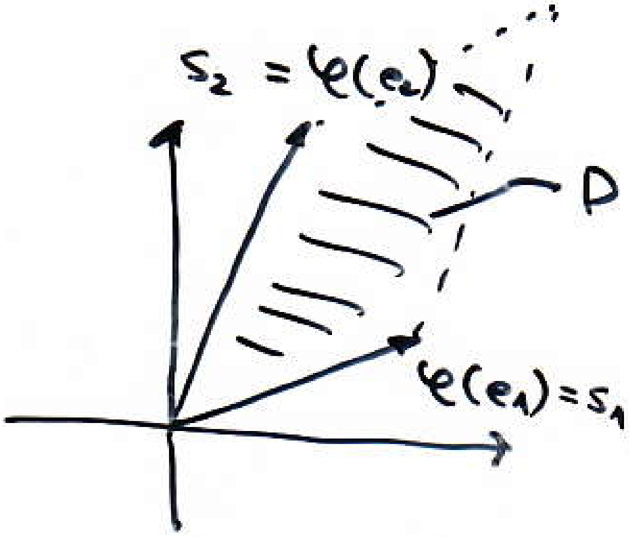
Abschnitt 4.3

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, $A \mathrel{\hat{=}} \varphi$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ s_1 & s_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$





$$\varphi(e_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ s_1 & s_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = s_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ s_1 & s_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\text{Fläche } P}{\text{Fläche } Q} = \frac{|\mathrm{Det}(A)|}{1} = \underline{\underline{|\mathrm{Det}(A)|}}$$

Weg ins $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} s_1 \\ \emptyset \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} s_2 \\ \emptyset \end{pmatrix}$ oder $\Rightarrow$

$\quad = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \emptyset \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \emptyset \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Fläche } P = \left| \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \emptyset \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \emptyset \end{pmatrix} \right|_{\text{Eukl.}}$$

$$= \left| \begin{matrix} \emptyset \\ \emptyset \\ a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \end{matrix} \right|_{\text{Eukl}} =$$

$$= \sqrt{\emptyset^2 + \emptyset^2 + (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})^2} =$$

$$= |a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}| = |\mathrm{Det}(A)|$$

Satz 4.9.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1l} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2l} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kl} & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nl} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \, \mathrm{Det}(A_{kj})$$

$$\mathrm{Det}(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} \, \mathrm{Det}(A_{il})$$

Beispiel 4.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) = (-1)(-1)\,\mathrm{Det}(A_{21}) + (1)(1)\,\mathrm{Det}(A_{24})$$

$$= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \left[4\,\mathrm{Det}(A_{13}) + 1\,\mathrm{Det}(A_{33}) \right] +$$

$$+ \left[-3\,\mathrm{Det}(A_{32}) + 2\,\mathrm{Det}(A_{33}) \right] =$$

$$= \left[4\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ \left[-3\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= 4(-2-12) + (8+3) - 3(4-9) + 2(-1-6)$$

$$= 4(-14) + 11 + 15 - 14 = -56 + 12 = \underline{\underline{-44}}$$

Beispiel 4.8

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Det}(A)}} = (-1)^{(n+n)} a_{nn} \, \mathrm{Det}(A_{nn}) =$$

$$= a_{nn} \, \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ & & & \\ & & & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix}$$

$$= a_{nn} (-1)^{(n-1+n-1)} a_{n-1\,n-1} \mathrm{Det}(A_{n-1\,n-1}) =$$

$$= \underbrace{a_{nn} \, a_{n-1\,n-1}}_{} \mathrm{Det} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-2} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-2} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-2\,n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = \underline{\underline{a_{nn} \, a_{n-1\,n-1} \cdots a_{11}}}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Det}(A)}} = (-1)^2 a_{11} \,\mathrm{Det}(A_{11}) + (-1)^3 a_{12} \,\mathrm{Det}(A_{12})$$

$$+ (-1)^4 a_{13} \,\mathrm{Det}(A_{13}) =$$

$$= a_{11} \,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$+ a_{13} \,\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{31} a_{23} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- (a_{11} a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33}) - a_{13} a_{31} a_{22}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} + a_{12} a_{31} a_{23}$$
$$- (a_{13} a_{31} a_{22} + a_{11} a_{32} a_{23} + a_{12} a_{21} a_{33})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \underbrace{\mathrm{Det}(A_{11})}_{= a_{22}}$$

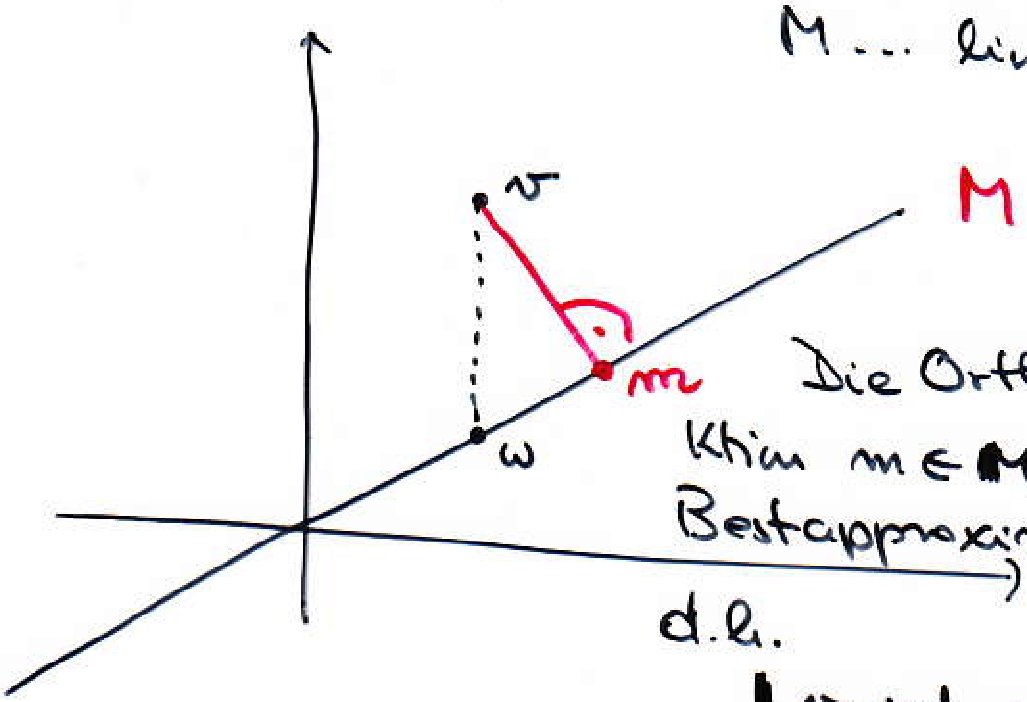
$$+ (-1)^{3} a_{21} \underbrace{\mathrm{Det}(A_{21})}_{= a_{12}} -$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad \checkmark$$

Kapitel 5

$V = \mathbb{R}^2$ lin. VR über $\mathbb{R}$

$M \ldots$ lin UR von V



Die Orthogonalprojektion $m \in M$ ist die Bestapproximation für v, d.h.

$$|v-m|_{\text{Eukl}} = \min_{w \in M} |v-w|$$

Bemerkung nach Def 5.2

z.z.:

① $\langle u, v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle \quad \forall u,v,w \in V$

② $\langle u, sv \rangle = s \langle u,v \rangle \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall u,v \in V$

① $$\langle u, v+w \rangle \underset{\uparrow \text{ Symm.}}{=} \langle v+w, u \rangle \underset{\uparrow \text{ linear.}}{=}$$

$$= \langle v,u \rangle + \langle w,u \rangle \underset{\uparrow \text{ Symm.}}{=} \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$$

✓

② $$\langle u, sv \rangle \underset{\uparrow \text{ Symm.}}{=} \langle sv, u \rangle \underset{\uparrow \text{ linear.}}{=} s\langle v,u \rangle \underset{\uparrow \text{ Symm.}}{=} s\langle u,v \rangle$$

□

Beispiel 5.1

$$\langle x,y\rangle_A := x^T A y = (x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$= (x_1,x_2)\begin{pmatrix}y_1+y_2\\y_1+5y_2\end{pmatrix} = x_1(y_1+y_2)+x_2(y_1+5y_2)$$

$$= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2$$

$$x\cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 \Rightarrow \langle x,y\rangle_{I_2} = x\cdot y$$

Pos. Def. Es gilt $\langle x,x\rangle_A \geq 0 \;\forall x\in\mathbb{R}^2$ und $\langle x,x\rangle_A = 0 \Leftrightarrow x=0$.

Beweis:

- $$\langle x,x\rangle_A = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + 5x_2^2 =$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 =$$

$$= \underbrace{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2} + 4x_2^2 =$$

$$= (x_1+x_2)^2 + 4x_2^2 \geq 0 \;\forall x\in\mathbb{R}^2$$

- $\langle x,x\rangle_A = 0 \iff (x_1+x_2)^2 = 0 \wedge \underline{\underline{x_2^2 = 0}}$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0}}$$

$\iff x = 0.$

<u>Skalarpr.</u>

- $\mathbb{R}^n$, $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (kanonisch)

- $\mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle_A$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so wie im Beispiel S.1

- $C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

$\underline{\underline{SP}}$

→ Achtung: Nicht jede Matrix erzeugt ein IP. z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ führt auf kein IP.

In diesem Fall ist

$$\langle x,y\rangle_A := x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} y = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - 5y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 5x_2y_2 .$$

$$\Rightarrow \langle x,x\rangle_A = x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_2^2 .$$

Wähle $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle x,x\rangle_A = -5 < 0$!↯

D.h. Kein IP.