Beispiel 5.10.

$V = \mathbb{R}^4$, $x \cdot y = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ ; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$, $y \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$

$$U = \mathcal{L}\Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Basis für } U} \Big\} = \mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3\}$$

OGB := $\{w_1, w_2, w_3\}$

- $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1$

- $w_2 := s_{21} w_1 + v_2$. Wähle $w_2$ bzw. $s_{21}$ so,

dass $w_2 \perp w_1 \iff \langle w_2, w_1 \rangle := w_2 \cdot w_1 = 0$

$$0 = w_2 \cdot w_1 = (s_{21} w_1 + v_2) \cdot w_1 = s_{21} w_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{s_{21} = \frac{-\,v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}}$$

$$\boxed{w_2 = -\frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + v_2}$$

$$w_2 = -\frac{-1}{3} \cdot w_1 + v_2 =$$

$$\begin{cases} v_2 \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1-2 = -1 \\ w_1 \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ok} \checkmark$$

$w_3 := s_{31} w_1 + s_{32} w_2 + v_3$, wobei die Konst. $s_{31}$ und $s_{32}$ so zu wählen sind, dass $w_3 \underset{(1)}{\perp} w_1$ und $w_3 \underset{(2)}{\perp} w_2$ gilt.

(1) $w_3 \cdot w_1 = \emptyset$ (2) $w_3 \cdot w_2 = \emptyset$

(1) $\Leftrightarrow$

$$0 = w_3 \cdot w_1 = (s_{31} w_1 + s_{32} w_2 + v_3) \cdot w_1 =$$

$$= s_{31}\, w_1 \cdot w_1 + s_{32} \underbrace{w_2 \cdot w_1}_{= \emptyset} + v_3 \cdot w_1$$

$$\Rightarrow \boxed{s_{31} = -\frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}}$$

(2) $\Leftrightarrow$

$$0 = w_3 \cdot w_2 = \left(s_{31} w_1 + s_{32} w_2 + v_3\right) \cdot w_2 =$$

$$= s_{31} \underbrace{w_1 \cdot w_2}_{= \emptyset} + s_{32}\, w_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_2$$

$$\Rightarrow \boxed{s_{32} = -\frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{w_3 = -\frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 + v_3}$$

- $v_3 \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3$
- $w_1 \cdot w_1 = 3$
- $v_3 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(4+2) = 2$

• $w_2 \cdot w_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\left(16+25+1\right)$

$$= \frac{1}{\cancel{9}_{3}} \cdot \cancel{42}^{14} = \frac{14}{3}$$

$\Longrightarrow$

$$w_3 = -\frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{\frac{\cancel{14}\,7}{3}}\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{3} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\cancel{3}}{7}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-\cancel{7}-4+\cancel{7}\\ -7+5+0\\ 0+0-7\\ -7-1+14\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-7\\6\end{pmatrix}.$$

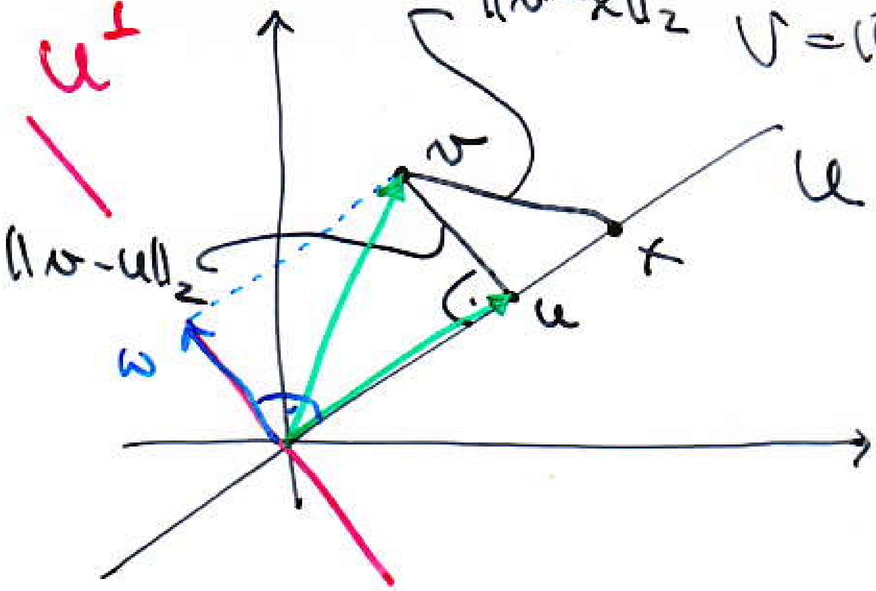
Also,

$$OGB = \{w_1, w_2, w_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \cancel{\tfrac{1}{3}}\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}, \cancel{\tfrac{1}{7}}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-7\\6\end{pmatrix}\right\}$$

$$ONB = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3\} = \left\{\frac{w_1}{\|w_1\|_2}, \frac{w_2}{\|w_2\|_2}, \frac{w_3}{\|w_3\|_2}\right\}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-7\\6\end{pmatrix}\right\}$$

## Bestapproximation im ER




$V = \mathbb{R}^2$, lin. UR $U \subseteq \mathbb{R}^2$

Suche $u \in U$ mit

$$\min_{x \in U} \|v - x\|_2 = \|v - u\|_2$$

---

Bemerkung zur Def. 8.15

$\underbrace{V}$ ... Eukl. VR, $V = \underbrace{U}_{\dim U = r} \oplus \underbrace{U^\perp}_{\dim U^\perp = n-r}$

$\dim V = n$

Sei

$ONB_U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$, $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$,

$ONB_{U^\perp} = \{w_{r+1}, w_{r+2}, \dots, w_n\}$, $\langle w_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$

$\Rightarrow$

$ONB_V = \{u_1, u_2, \dots, u_r, w_{r+1}, w_{r+2}, \dots, w_n\}$

$v \in V: \; v = \underbrace{\sum_{k=1}^{r} c_k u_k}_{\in U} + \underbrace{\sum_{k=r+1}^{n} \tilde{c}_k w_k}_{\in U^\perp}$

$\Leftrightarrow \tilde{c}_k, c_k$ sind FK $\Leftrightarrow$

$c_k = \langle v, u_k \rangle, \quad k = 1, \dots, r$ und

$\tilde{c}_k = \langle v, w_k \rangle, \quad k = r+1, \dots, n.$

$\Rightarrow$ die OP von $v$ auf $U := u = \sum_{k=1}^{r} \langle v, u_k \rangle u_k$

$\square$

Bemerkung zur Definition S.16

$u, v \in V, s \in \mathbb{C}$

$\langle u, sv \rangle =$

$\overset{(2)}{=} \overline{\langle sv, u \rangle} = \overline{s \langle v, u \rangle} = \bar{s}\, \overline{\langle v, u \rangle} =$

$= \bar{s} \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V \ \forall s \in \mathbb{C}$

Beispiel S.17

$q(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} =$

$= x_1^2 - x_2^2 = \begin{cases} -1, & x = \binom{0}{1}, \\ 1, & x = \binom{1}{0}; \end{cases}$ indefinit.

## Beispiel 5.19

$$q(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} x = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 =$$

$$= x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 \geq \emptyset$$

d.h. semi-positiv-definit

## Satz 5.17

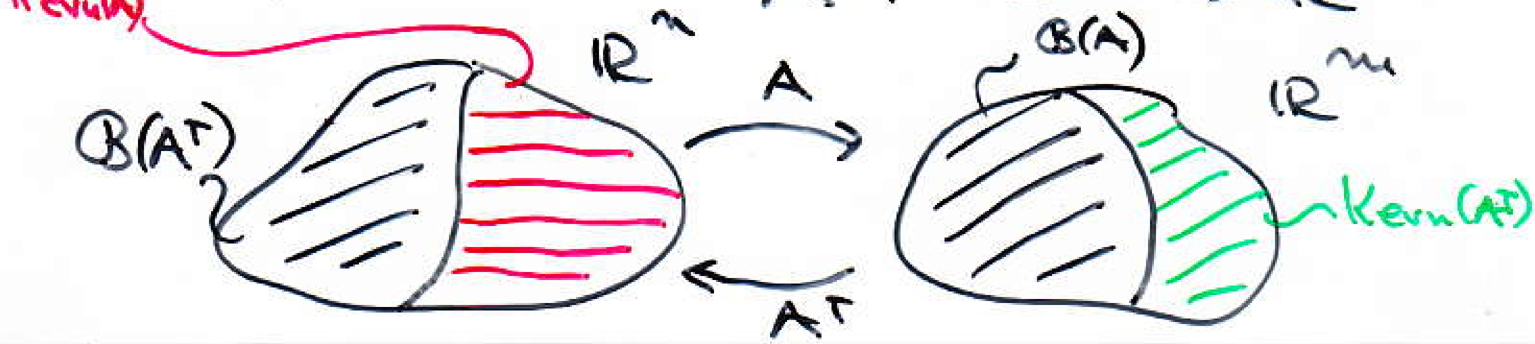
$$x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{x \cdot y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{x^T y}; \text{ d.h. } \boxed{x \cdot A^T y = Ax \cdot y}$$

## Zum Satz 5.18

$$\begin{cases} A \in \mathbb{R}^{m \times n} & A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ A^T \in \mathbb{R}^{n \times m} & A^T: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$$



Es gilt

1. $\mathbb{R}^n = \mathcal{B}(A^T) \oplus \mathrm{Kern}(A)$ und $\mathcal{B}(A^T) = \mathrm{Kern}(A)^\perp$
2. $\mathbb{R}^m = \mathcal{B}(A) \oplus \mathrm{Kern}(A^T)$ und $\mathcal{B}(A) = \mathrm{Kern}(A^T)^\perp$.

D.h. Ein lin. Gl. System $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist lösbar genau dann, wenn $b \perp \mathrm{Kern}(A^T) \Leftrightarrow$

$$b \perp x \ \forall x \in \mathrm{Kern}(A^T) \Leftrightarrow \quad b \cdot x = 0 \ \forall x \in \mathrm{Kern}(A^T).$$

## Orthogonale Matrizen

Es gilt eine reelle $n \times n$ Matrix $A^T A = A A^T = I_n$ so ist $A$ orthogonal.

Davon folgt für die Spalten von $A$, $s_i, i = 1, \dots, n$

$$A^T A = \begin{pmatrix} - & s_1 & - \\ - & s_2 & - \\ & \vdots & \\ - & s_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s_1 \cdot s_1 & s_1 \cdot s_2 & \cdots & s_1 \cdot s_n \\ s_2 \cdot s_1 & s_2 \cdot s_2 & \cdots & s_2 \cdot s_n \\ \vdots & & & \\ s_n \cdot s_1 & s_n \cdot s_2 & \cdots & s_n \cdot s_n \end{pmatrix} = I_n \Leftrightarrow$$

$$s_i \cdot s_j = \delta_{ij}.$$

D.h. die Spalten von $A$ bilden eine ONB für $\mathbb{R}^n$.