$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. Fall Für alle EW λ_i gilt
$n_i = g_i \Rightarrow$

A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists X$ regulär

$$A = XDX^{-1} \Leftrightarrow \boxed{AX = XD}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

D.h. $Av_i = \lambda_i v_i \ \forall i$

---

2. Fall Das obige gilt nicht, d.h. $n_i \neq g_i$ mindestens für ein $i \Rightarrow$

A ist nicht diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists X$ regulär

mit $A = XJX^{-1} \Leftrightarrow \boxed{AX = XJ}$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}, \quad J_e = \begin{pmatrix} \lambda_e & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_e \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.12

$$A \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Schritt: Berechnung der Eigenwerte

$$p(\lambda) = \operatorname{Det}(A - \lambda I) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} + (-1)^2 \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = 0$$

Setzt man die ersten Teiler von 16, ± 1, ± 2 ein so ergibt sich $\lambda_1 = 2$, denn

$$p(2) = 2^4 - 8\cdot 2^3 + 24\cdot 2^2 - 32\cdot 2 + 16 = 16 - 64 + 96 - 64 + 16 = 128 - 128 = 0.$$

Also, $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 : \lambda - 2 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$

$$
\begin{array}{l}
\underline{\lambda^4 - 2\lambda^3} \\
\quad -6\lambda^3 + 24\lambda^2 \\
\quad \underline{-6\lambda^3 + 12\lambda^2} \\
\qquad\qquad 12\lambda^2 - 32\lambda \\
\qquad\qquad \underline{12\lambda^2 - 24\lambda} \\
\qquad\qquad\qquad -8\lambda + 16 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-8\lambda + 16}
\end{array}
$$

$\Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8)$

Es folgt wieder $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \big|_{\lambda = 2} =$

$= \cancel{8} - 6 \cdot 4 + 12 \cdot 2 - \cancel{8} = -24 + 24 = 0$

Also, $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 : \lambda - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

$$
\begin{array}{l}
\underline{\lambda^3 - 2\lambda^2} \\
\quad -4\lambda^2 + 12\lambda \\
\quad \underline{-4\lambda^2 + 8\lambda} \\
\qquad\qquad 4\lambda - 8 \\
\qquad\qquad \underline{4\lambda - 8}
\end{array}
$$

$\Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^4 \Rightarrow$

$\lambda_1 = 2$ und $n_1 = 4$.

<u>2. Schritt</u> : Eigenvektoren

$$(A - 2I)\, v^{(1)} = \varnothing$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} v^{(1)} = \varnothing \quad \begin{cases} z_2 - z_1 \\ z_3 - 2z_1 \\ z_4 - z_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \varnothing & 1 & -1 & 1 \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} v^{(1)} = \varnothing \quad \{ z_4 + z_3 \quad \Rightarrow$$

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v^{(1)} = \varnothing$$

$\Rightarrow$ Rang $(A - 2I) = 2 \Rightarrow$ Dim Kern $(A - 2I)$ $= 2 \Rightarrow \exists\, 2$ l.u. <u>EV zu $\lambda_1 = 2$</u>

$g_1 = 2 < 4$ also A nicht diagonal.

Mögliche Jordan'sche Normalformen sind:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

---

3. Schritt: Hauptvektoren

Wir berechnen zuerst die EV aus (*):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) v^{(1)} = \emptyset$$

$$\begin{cases} v_1 - v_4 = \emptyset \\ v_2 - v_3 + v_4 = \emptyset \end{cases} \qquad v_4 := s,\ v_3 := t$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = v_4 = s, \quad v_2 = v_3 - v_4 = t - s$$

$$(1) \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} s \\ t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t^2 + s^2 \neq 0$$

$$E(\lambda=2) = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

1. HV: Berechnung von $h^{(1)}$:

$$(A-2I)\,h^{(1)} = v^{(1)} \iff$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & -2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 2s \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} h^{(1)} \overset{!!!}{=} \begin{pmatrix} s \\ t-s \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

wichtig

$$\Downarrow \quad \begin{cases} z_2 - z_1 \\ z_3 - 2z_1 \\ z_4 - z_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} h^{(1)} = \begin{pmatrix} s \\ t-2s \\ t-2s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \quad \{ z_4 + z_2$$

$$(**) \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} h^{(1)} \overset{!!!}{=} \begin{pmatrix} s \\ t-2s \\ t-2s \\ t-2s \end{pmatrix}$$

wichtig

$\exists$ eine Lösg genau dann, wenn $t = 2s$

$\boxed{\text{Wähle } s=1,\ t=2.}$

Mit $s=1$ und $t=2$ ergibt sich der EV

$$v^{(1)} = s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{s=1\\t=2}} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

und die rechte Seite in $(**)$ $= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Damit können wir $h^{(1)}$ aus $(**)$ ausrechnen:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} h^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} h_1 \qquad\qquad + h_4 = 1 \\ \qquad h_2 - h_3 + h_4 = 0 \end{cases}$$

Wähle $h_4 = \sigma$, $h_3 = \rho \Rightarrow h_1 = 1+\sigma$, $h_2 = \rho - \sigma$

$$\underset{(2)}{\Rightarrow} h^{(1)} = \begin{pmatrix}1+\sigma\\ \rho-\sigma\\ \rho\\ \sigma\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{Part. Lösung von } (**)} + \underbrace{\rho\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{Kern v. } (A-2I)}$$

Also, aus

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow h^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2. HV: Berechnung von $h^{(2)}$

$$(A-2I)\,h^{(2)} = h^{(1)} \implies$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} h^{(2)} \overset{???}{\underset{\text{wichtig}}{=}} \begin{pmatrix} 1+\sigma \\ \rho-\sigma \\ \rho \\ \sigma \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\left\{\begin{matrix} z_2 - z_1 \\ z_3 - 2z_1 \\ z_4 - z_1 \end{matrix}\right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1+\sigma \\ -1+\rho-2\sigma \\ -2+\rho-2\sigma \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\left\{ z_4 + z_2 \ (***) \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} h^{(2)} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1+\sigma \\ -1+\rho-2\sigma \\ -2+\rho-2\sigma \\ -2+\rho-2\sigma \end{pmatrix}$$

$\exists$ eine Lösung genau dann, wenn $-2+\rho-2\sigma=0$

Wähle $\sigma=0$ und $\rho=2$.

Damit folgt

$$h_1^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}$$ und die rechte Seite

in (***) $= \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}.$

Damit können wir $h_1^{(2)}$ aus (***) ausrechnen:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} h_1^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} h_{11} - h_{14} = 1 \\ h_{12} - h_{13} + h_{14} = -1 \end{cases}$$

Wähle $h_{14} = \alpha,\ h_{13} = \beta \Rightarrow h_{11} = \alpha + 1,\ h_{12} = \beta - \alpha + 1$

$$\Rightarrow (3)\ h_1^{(2)} = \begin{pmatrix}\alpha+1\\\beta-\alpha+1\\\beta\\\alpha\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{Part. Lösung von (***)}} + \underbrace{\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{Kern}(A-2I)}$$

Wähle $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow$
$h_1^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

Fassen wir zusammen:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$X = \left(\begin{array}{ccc|c} | & | & | & \\ v^{(1)} & h^{(1)} & h^{(2)} & v^{(2)} \\ | & | & | & \end{array} \right).$$

Es fehlt noch der EV $v^{(2)}$. Den wählen wir bel. aber lin. unabh. zu $v^{(1)}$, z.B.

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Damit ist

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ und es gilt:

$$A = XJX^{-1} \iff AX = XJ.$$

Probe:

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✓

Bemerkung:

Die Vektoren $v^{(1)}$, $h^{(1)}$ und $h^{(2)}$ kann man aus den reduzierten Systemen (*), (**) und (***) berechnen, wobei die r. Seiten von (**) und (***) zuerst für $s=1$, $t=2$ und $\sigma=\varnothing$ und $\rho=2$ berechnet werden.

Für die Matrix X brauchen wir $v^{(1)}$, $h^{(1)}$ und $h^{(2)}$ in der Originalform, siehe Formeln (1), (2) und (3).