Beispiel 6.13

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3 \\ v^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} s,\ s \neq 0 \\ v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s,\ s \neq 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow v^{(1)} \perp v^{(2)}$ ✓ weil

$v^{(1)} \cdot v^{(2)} = \emptyset$.

$s = 1, x^{(1)}, \ \|x^{(1)}\|_2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^{(1)}$

$s = 1, x^{(2)}, \ \|x^{(2)}\|_2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^{(2)}$

$$\boxed{X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}}$$

Kap. 7.

$Ly := y' - A(t)y,\ L: C^1[a,b] \to C[a,b]$

2.2. $y' - A(t)y = f$ linear.

$\boxed{L(\alpha u + \beta v)} = (\alpha u(t) + \beta v(t))' -$

$$- A(t)(\alpha u(t) + \beta v(t)) =$$

$$= \alpha u'(t) + \beta v'(t) - A(t)\alpha u(t) -$$

$$- A(t)\beta v(t) =$$

$$= \alpha \underbrace{(u' - A(t)u)}_{Lu} + \beta \underbrace{(v' - A(t)v)}_{Lv}$$

$$= \alpha Lu + \beta Lv \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall u, v \in C^1[a,b]$$

$$y'(t) - A(t)y(t) = f(t)$$

Gegeben seien

- n Lösungen der hom. Gl. $(f(t) \equiv 0)$

$$y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$$

- eine partikuläre Lösung der inh. Gl. $(f(t))$

y_p

$$\boxed{y(t) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y^{(i)}(t) + y_p(t)}$$ ist eine Lösung

Bidde

$$\underline{\underline{y'(t) - A(t)y(t)}} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y^{(i)}(t) + y_p(t)\right)' - A(t) \cdot$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y^{(i)}(t) + y_p(t)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{d}{dt} y^{(i)}(t) + y_p'(t) -$$

✓

$$- \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A y^{(i)}(t) + A y_p(t)\right) =$$

✓

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\left(\frac{d}{dt} y^{(i)}(t) - A y^{(i)}(t)\right)}_{= \emptyset} +$$

$$\underbrace{y_p'(t) - A y_p(t)}_{= f(t)} = f(t)$$

✓

Beispiel 7.1.

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) - 4y_1(t) - t^2 y_2(t) = e^t \\ \dot{y}_2(t) - y_1(t) - 2\,y_2(t)\sin t = -1 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) - A(t)y(t) = f(t) \\ \dot{y}(t) - \begin{pmatrix} +4 & +t^2 \\ +1 & +2\sin t \end{pmatrix} y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(t) = \begin{pmatrix} 4 & t^2 \\ 1 & 2\sin t \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -1 \end{pmatrix} \\ y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

lin. AWP für 2 DGen.

Theoretische Aussagen

1) $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ unbekannte Lösung,

Daten $\left\{ \begin{array}{l} f : [a,b] \to \mathbb{R}^n \text{ gegeben} \\ A = (a_{ij})_{ij=1}^{n} \\ a_{ij} : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ gegeben} \end{array} \right.$

$$\text{AWP:} \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(t) - A(t)y(t) = f(t), \; t \in [a,b] \\ y(t_0) = c, \; t_0 \in [a,b] \end{array} \right.$$

Ist $A(t)$ und $f(t)$ stetig $\Rightarrow \exists !$ Lösg y von AWP.

Zusätzlich gilt $y \in C^1[a,b]$.

2.) Jedes homogene System, $A \in C[a,b]$

$$\dot{y}(t) - A(t)y(t) = \emptyset$$

hat n lin. unabh. Lösgen $y^{(1)}, y^{(2)} \dots y^{(n)}$.

D.h.

$$Y(t) = \left(y^{(1)} \; y^{(2)} \; y^{(3)} \dots y^{(n)} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Fundamentalmatrix

ist regulär $\forall\, t \in [a,b]$

3) Allgemeine Lösg des hom. Problems kann man schreiben als

$$\alpha_1 y^{(1)} + \alpha_2 y^{(2)} + \dots + \alpha_n y^{(n)} = Y(t)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} =$$

$$= Y(t)\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^n$$

4) Allg. Lösg des AWP hat die Gestalt

$$\boxed{y(t) = \underset{\uparrow}{Y(t)\alpha} + \underset{\uparrow}{y_p(t)},\quad \alpha \in \mathbb{R}^n}$$

allg. Lösg des hom. Problems — spezielle Lösg des inh. Problems ($f(t) \neq 0$)

mit $y(a) = c \Rightarrow$

$$y(a) = \boxed{c = Y(a)\alpha + y_p(a)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(a)\alpha = c - y_p(a) \Rightarrow \alpha = (Y(a))^{-1}(c - y_p(a))$$

Kapitel 7.2

1. Spezialfall $\dot{y}(t) - Ay(t) = \emptyset$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $f(t) \equiv \emptyset$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{y}_1(t) - a_{11}y_1(t) - a_{12}y_2(t) = \emptyset \\ \dot{y}_2(t) - a_{21}y_1(t) - a_{22}y_2(t) = \emptyset \end{cases}$$

$\dot{y}(t) = \lambda y(t) \Rightarrow y(t) = \alpha e^{\lambda t}$

das Problem ist gekoppelt und schwierig zu lösen

1. Fall A ist diagonalisierbar,

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, v_1, v_2 EV dazu.

Dann gilt $AX = XD \Longleftrightarrow \underline{A = XDX^{-1}}$

mit $X = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \dot{y} - Ay(t) = \emptyset \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \dot{y}(t) - XDX^{-1}y(t) = \emptyset \quad | \cdot X^{-1}$

$\Longleftrightarrow \underbrace{X^{-1}\dot{y}(t)}_{\dot{v}(t)} - D\underbrace{X^{-1}y(t)}_{v(t)} = \emptyset$

Wir führen neue Variablen ein: $v(t) := X^{-1} y(t)$, $\dot{v}(t) = X^{-1}\dot{y}(t)$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{y(t) = X v(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{v}(t) - D v(t) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{v}_1(t) - \lambda_1 v_1(t) = \emptyset \Leftrightarrow \dot{v}_1(t) = \lambda v_1(t) \\ \dot{v}_2(t) - \lambda_2 v_2(t) = \emptyset \Leftrightarrow \dot{v}_2(t) = \lambda v_2(t) \end{cases}$$

das Problem ist entkoppelt und leicht zu lösen

$$\Rightarrow \quad v_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad v_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \alpha_1 \\ e^{\lambda_2 t} \alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \emptyset \\ \emptyset & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{Z(t)\alpha}}$$

↑ FM des entk. Systems

Es gilt $\det Z(t) = e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \neq 0 \; \forall t$

$$\Rightarrow y(t) = X v(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \cdot v(t)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}}_{Y(t) \ldots \text{ FM des gekopp. Syst.}} \alpha$$

$$\boxed{\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2}$$

$$\Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ e^{\lambda_1 t} v_1 & e^{\lambda_2 t} v_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{mit } \det Y(t) = \det X \, e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \neq 0 \ \forall t}$$

Lösung des gek. Systems lautet

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ e^{\lambda_1 t} v_1 & e^{\lambda_2 t} v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2}$$

Verallg. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diagonalisierbar, alle EW reell. $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n, v_1, v_2 \ldots, v_n$

$\dot{y}(t) - Ay(t) = 0$ hat die allg. Lösg der Gestalt

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \ldots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n.$$