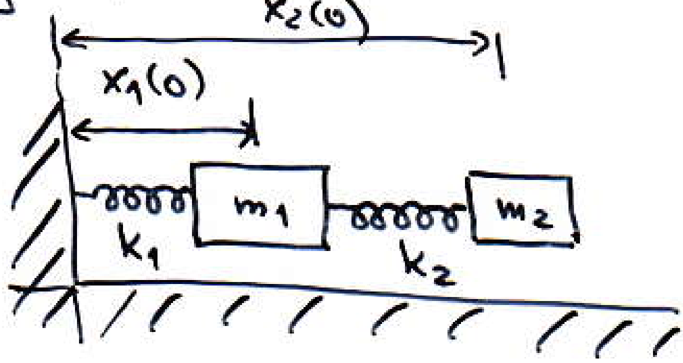
Kapitel 7.4

Kleine Schwingungen elastischer Systeme.

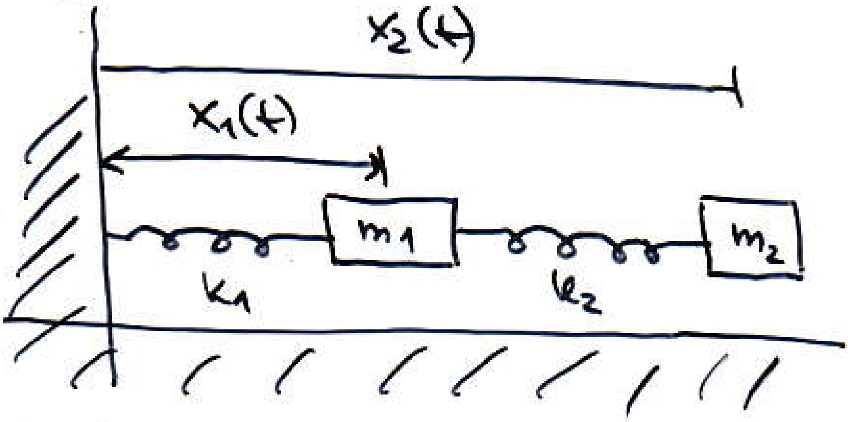
Betrachten wir die folgende Anordnung von zwei Massen und zwei Federn.

Ruhelage (beide Federn sind entspannt):



Dabei sind m_1 und m_2 die Massen und k_1 und k_2 die Federkräfte.

Lenkt man das System aus der Ruhelage aus so ergibt sich (man nimmt $x_2 > x_1$ an):



Dabei liefern die Impulsgleichungen das System,

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = -k_1 x_1(t) + k_2\left(x_2(t) - x_1(t)\right) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) = -k_2\left(x_2(t) - x_1(t)\right) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1+k_2)x_1(t) - k_2 x_2(t) = \varnothing \\ m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + k_2 x_2(t) = \varnothing \end{cases}$$

Für den Vektor $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ haben wir

$\Longleftrightarrow$ $M\ddot{x}(t) + Kx(t) = \varnothing$, wobei $M, K \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

und
- $M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ ... die Massenmatrix,
- $K = \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$ ... die Steifigkeits-matrix.

(Die Reibung wurde vernachlässigt.)

Man sieht sofort, dass M symmetrisch ist und pos. definit, da m_1 und m_2 positiv sind. Auch K ist symmetrisch und nach dem Hauptminorenkriterium pos. definit; $\det K_1 = \det(k_1+k_2) = k_1+k_2 > 0$

$$\det(K_2 = K) = (k_1+k_2)k_2 - k_2^2 = k_1 k_2 > 0,$$

da k_1 und k_2 positiv.

(Würde man Reibung berücksichtigen, so hätte man $M\ddot{x}(t) + R\dot{x}(t) + Kx(t) = \varnothing$.)

Wir erhalten für die Eigenschwingungen (ohne äußere Kräfte) ein System von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung (linear) der Gestalt

$$B\ddot{y}(t) + Cy(t) = 0 \;,\; y(0) = \hat{a},\; \dot{y}(0) = \hat{b}$$

mit $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}^2$. D.h. wir geben die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit vor, um eine eindeutige Lösung zu bekommen.

Dabei sind B, C symmetrisch und pos. definit. Diese Eigenschaften folgen in natürlicher Weise aus dem physikalischen Modell.

Nehmen wir an, daß äußere Kräfte auf das System wirken, so erhalten wir

$$\boxed{B\ddot{y}(t) + Cy(t) = k(t) \,,\, y(0) = \hat{a},\; \dot{y}(0) = \hat{b}.}$$

Zuerst lösen wir das homogene System

$$B\ddot{y}(t) + Cy(t) = 0.$$

Kapitel 7.4 (fortgesetzt)

$$B\ddot{y}(t) + Cy(t) = k(t)$$

$B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $k(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Annahme: B, C symmetrisch, pos. def.

1. Schritt

$k(t) \equiv 0$

Ansatz für die Lösung $y(t)$:

$$y_a(t) := (\alpha \cos\mu t + \beta \sin\mu t)\, q$$

$\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$

Motivation: $b\ddot{y}(t) + cy(t) = 0$, $b, c > 0$

Ansatz: $y(t) := e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{y}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\Downarrow$$

$e^{\lambda t} \neq 0$, $\quad b\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + c\cancel{e^{\lambda t}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\frac{c}{b} \Rightarrow \lambda = \pm i\mu$$

mit $\underline{\mu = \sqrt{\frac{c}{b}}}$.

$$\Rightarrow y^{(1)}(t) = e^{i\mu t} = \cos\mu t + i \sin\mu t$$

$$\Rightarrow y^{(2)}(t) = e^{-i\mu t} = \cos\mu t - i \sin\mu t$$

$y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ sind Lösungen einer linearen DGL.

$\Rightarrow$ jede LK von $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ ist auch eine Lösg.

Wir wählen

$$\frac{y^{(1)}(t)+y^{(2)}(t)}{2} = \cos\mu t,$$

$$\frac{y^{(1)}(t)-y^{(2)}(t)}{2i} = \sin\mu t,$$

und erhalten

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \alpha\cos\mu t + \beta\sin\mu t}$$

als weitere LK von 2 Lösgen. Zurück zum System

$$B\ddot{y}(t) + Cy(t) = \emptyset.$$

Ansatz:

$$y_a(t) = (\alpha\cos\mu t + \beta\sin\mu t)q \neq \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{y}_a(t) = (-\alpha\mu\sin\mu t + \beta\mu\cos\mu t)q$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{y}_a(t) = (-\alpha\mu^2\cos\mu t - \beta\mu^2\sin\mu t)q$$

$$= -\mu^2(\alpha\cos\mu t + \beta\sin\mu t)q.$$

Aus der DGl. folgt

$$\Rightarrow B(-\mu^2)\underbrace{(\alpha\cos\mu t + \beta\sin\mu t)q}_{\neq\emptyset} +$$

$$+ C\underbrace{(\alpha\cos\mu t + \beta\sin\mu t)q}_{\neq\emptyset} = \emptyset$$

$$\left(-\mu^2 B + C\right) q = \emptyset \qquad q \neq 0$$

$\mu^2 =: \lambda \Rightarrow \boxed{(C - \lambda B) q = \emptyset}$ verallgem. EWP

$\mu = \sqrt{\lambda}$ ... Eigenfrequenzen des Systems

$\boxed{(A - \lambda I) v = \emptyset}$ reguläres EWP

Vor. C, B symm. und pos. definit $\Rightarrow$

$\exists\, n$ EW $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die EV $q \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \mu_i := \pm\sqrt{\lambda_i}$ $i = 1, .., n$ und

$q_i \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Die allg. Lösung lautet

$$\boxed{y_h(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \cos \mu_k t + \beta_k \sin \mu_k t\right) q_k}$$

Vorgegeben sind

$y(0)$, $\dot{y}(0)$ $\Rightarrow$ daraus kann man α_k und β_k ausrechnen (für alle $k = 1, .., n$)

2. Schritt $K \neq 0$. Wird anhand von Beispielen behandelt.

Beispiel 7-5

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad k(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \dot{y}(0) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B\ddot{y}(t) + Cy(t) = k(t), \ \text{AWP}}$$

1. Schritt $\quad (C - \lambda B)q = \emptyset, \quad q \neq 0$

Lösung des EWP.

$$\Rightarrow \det(C - \lambda B) = \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 3-2\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-2\lambda)^2 - (2+\lambda)^2 = (3-2\lambda+2+\lambda)\cdot(3-2\lambda-2-\lambda) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow -\lambda + 5 = \emptyset \qquad -3\lambda + 1 = \emptyset$$

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 5 \\ \omega_1 = \sqrt{5} \end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 = \frac{1}{3} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{matrix}}$$

Berechnung der EV von $(C - \lambda B)q = \emptyset \iff$

$\underline{\lambda_1 = 5}$, $\underline{\omega_1 = \sqrt{5}}$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] q^{(1)}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} q^{(1)} = \emptyset$$

$$\iff q^{(1)} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s \neq \emptyset \qquad s := 1$$

$\underline{\lambda_2 = \frac{1}{3}}$, $\underline{\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}}$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] q^{(2)} = \emptyset$$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} q^{(2)} = \emptyset$$

$$\iff q^{(2)} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s \neq 0 \qquad s := -1$$

Also,

$$\boxed{y_h(t) = \left(\alpha_1 \cos\sqrt{5}\,t + \beta_1 \sin\sqrt{5}\,t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\alpha_2 \cos\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,t + \beta_2 \sin\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

2. Schritt

$$K(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die partikuläre Lösung:

$$y_p(t) = (\sin t)\, a + (\cos t)\, b, \quad a, b \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \dot{y}_p(t) = (\cos t)\, a - (\sin t)\, b$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_p(t) = -(\sin t)\, a - (\cos t)\, b = -(\sin t\, a + \cos t\, b)$$

Aus der DGl. folgt:

$$-B(\cancel{\sin t}\, a + \cancel{\cos t}\, b) + C(\cancel{\sin t}\, a + \cancel{\cos t}\, b)$$

Koeff. Vergleich

$$= \cancel{\sin t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \forall t$$

$\sin t$: $\cos t$:

$$\begin{cases} -Ba + Ca = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (-B+C)a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -Bb + Cb = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (-B+C)b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Berechne zunächst

$$-B + C = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen simultan die Systeme $(-B+C)a=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $(-B+C)b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{cccc} 3 & 9 & 3 & 0 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{z_2 - 3z_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

System für a:

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 1 \\ \quad -8a_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{a_2 = \frac{3}{8}}}$$

$$\Downarrow \qquad \underline{\underline{a_1}} = 1 - 3\cdot\frac{3}{8} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}}$$

System für b:

$$\begin{cases} b_1 + 3b_2 = 0 \\ \quad -8b_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{b_2 = -\frac{1}{8}}}$$

$$\Downarrow \qquad \underline{\underline{b_1}} = -3\left(-\frac{1}{8}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\sin t + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\cos t$$

Die all. Lösung des inhom. Systems lautet:

$$\begin{cases} y(t) = \left(\alpha_1 \cos\sqrt{5}t + \beta_1 \sin\sqrt{5}t\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \\ \quad + \left(\alpha_2 \cos\sqrt{\tfrac{1}{3}}t + \beta_2 \sin\sqrt{\tfrac{1}{3}}t\right)\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix} \\ \quad + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\sin t + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\cos t \end{cases}$$

Sie muss die AB erfüllen:

$$y(0) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}11\\7\end{pmatrix}, \quad \dot{y}(0) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.$$

D.h.

$$y(0) = \boxed{\frac{1}{8}\begin{pmatrix}11\\7\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}}$$

und

$$\dot{y}(t) = \left(-\sqrt{5}\alpha_1 \sin\sqrt{5}t + \sqrt{5}\beta_1 \cos\sqrt{5}t\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} +$$

$$+ \left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\alpha_2 \sin\sqrt{\tfrac{1}{3}}t + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\beta_2 \cos\sqrt{\tfrac{1}{3}}t\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\cos t - \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\sin t$$

$$\dot{y}(0) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \sqrt{5}\beta_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\beta_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}\beta_1\\ \sqrt{\tfrac{1}{3}}\beta_2\end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 0$$

Aus

$$\overbrace{\frac{1}{8}\begin{pmatrix}11\\7\end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}$$

folgt

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1\\0 & -2 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_2 = \emptyset \quad \alpha_1 = 1$. Damit haben wir

endgültig

$$\boxed{y(t) = \cos\sqrt{5}\,t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\left(\sin t\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + \cos t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right).}$$

Da die Eigenfrequenzen $\mu_1 = \sqrt{5}$, $\mu_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ lauten, die Frequenz der äußeren Erregungskraft $\mu = 1$ ist, und diese Frequenzen unterschiedlich sind, bleibt die Lösung beschränkt für alle t.

↳ gemeint ist $k(t) = \begin{pmatrix}\sin\mu t\\\cos\mu t\end{pmatrix}$ mit $\mu = 1$.

Wir betrachten das System

$$B\ddot{y}(t) + Cy(t) = K(t) \text{ mit } y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \dot{y}(0) = \frac{\sqrt{5}}{70}\begin{pmatrix} 57 \\ 77 \end{pmatrix}$$

und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $K(t) = \sin\sqrt{5}t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

d.h. $\sin\mu t \Rightarrow \mu = \sqrt{5}$

Die allg. Lösung der hom. Gleichung ist schon bekannt:

$$y_h(t) = (\alpha_1 \cos\sqrt{5}t + \beta_1 \sin\sqrt{5}t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\alpha_2 \cos\sqrt{\tfrac{1}{3}}t + \beta_2 \sin\sqrt{\tfrac{1}{3}}t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da $\mu_1 = \sqrt{5} = \mu$ handelt es sich hier um den

Resonanzfall.

Hier funktioniert ein anderer Ansatz für y_p:

$$y_p(t) := \sin\sqrt{5}t\, a + \cos\sqrt{5}t\, b + t\cos\sqrt{5}t\, c$$ und a, b, c noch unbekannt im $\mathbb{R}^3$.

$$\Rightarrow \dot{y}_p(t) = \sqrt{5}\cos\sqrt{5}t\, a - \sqrt{5}\sin\sqrt{5}t + \cos\sqrt{5}t\, c - \sqrt{5}t\sin\sqrt{5}t\, c$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_p(t) = -5\sin\sqrt{5}t\, a - 5\cos\sqrt{5}t\, b - \sqrt{5}\sin\sqrt{5}t\, c - \sqrt{5}\sin\sqrt{5}t\, c - 5t\cos\sqrt{5}t\, c$$

Wir setzen in die Dgl. ein und machen den Koeff. Vergleich:

$$B\Big(\underbrace{-5\sin\sqrt{5}t\, a}\ \underbrace{-5\cos\sqrt{5}t\, b}\ \underbrace{-2\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t\, c}\ \underbrace{-5t\cos\sqrt{5}t\, c}\Big) + C\Big(\underbrace{\sin\sqrt{5}t\, a} + \underbrace{\cos\sqrt{5}t\, b} + \underbrace{t\cos\sqrt{5}t\, c}\Big) =$$

$$\underbrace{\sin\sqrt{5}t\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}}$$

$\sin\sqrt{5}t$:

$$-5Ba - 2\sqrt{5}Bc + Ca = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \quad (**)$$

$\cos\sqrt{5}t$:

$$-5Bb + Cb = \emptyset \quad (*)$$

$t\cos\sqrt{5}t$:

$$-5Bc + Cc = \emptyset \quad (*)$$

Wir berechnen $-5B+C = \begin{pmatrix}-7 & 7\\ 7 & -7\end{pmatrix}$; da $\lambda=5$ die Lösung des verall. EWPs, kann man b und c als einen EVektor wählen, also $b = s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $c = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ mit $s,t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Damit sind die Gleichungen $(*)$ gelöst.

Wir lösen jetzt die (**) Gleichung:

Wähle $c = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, d.h. $t \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \Rightarrow$

$$-5Ba - \cancel{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{5}}} B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + Ca = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(-5B + C)a = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-7 & 7\\-7 & 7\end{pmatrix}a = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-7 & 7\\-7 & 7\end{pmatrix}a = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-7a_1 + 7a_2 = 2 \overset{\text{z.B.}}{\Rightarrow} a_2 = 1, \; a_1 = \frac{5}{7}$$

Mit

$$\Rightarrow a = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}, \; \underset{(s=1)}{b :=} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \; c = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ ergibt}$$

sich $y_p(t) =$

$$= \frac{1}{7}\sin\sqrt{5}t\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} + \cos\sqrt{5}t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{5}}t\cos\sqrt{5}t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

und $y(t) =$

$$= (\underbrace{\alpha_1\cos\sqrt{5}t}_{=\emptyset\,\%} + \beta_1\sin\sqrt{5}t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (\underbrace{\alpha_2\cos\sqrt{\tfrac{1}{3}}t}_{=\emptyset\,\%} + \beta_2\sin\sqrt{\tfrac{1}{3}}t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{7}\left(\sin\sqrt{5}t\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}\right) + \cos\sqrt{5}t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{5}}t\cos\sqrt{5}t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

AB: $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dot{y}(0) = \begin{pmatrix} 57 \\ 77 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{70}$ $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \emptyset}$$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{5}\,\beta_1 \cos\sqrt{5}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,\beta_2 \cos\sqrt{\tfrac{1}{3}}t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{7}\sqrt{5}\cos\sqrt{5}t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \sqrt{5}\sin\sqrt{5}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\cos\sqrt{5}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$- \frac{1}{2} t \sin\sqrt{5}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{y}(0) = \frac{\sqrt{5}}{70}\begin{pmatrix} 57 \\ 77 \end{pmatrix} &= \sqrt{5}\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{\sqrt{5}}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5}\beta_1 \\ \sqrt{\tfrac{1}{3}}\beta_2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{5}}{70}\begin{pmatrix} 50+7 \\ 70+7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\beta_1 = \beta_2 = \emptyset \end{aligned}}$$

Damit haben wir

$$y(t) = \frac{1}{7}\sin\sqrt{5}t \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \cos\sqrt{5}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{5}} t \cos\sqrt{5}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{???}$$

und die Lösung wächst linear mit t.

⚡ (Irgend wann reißen die Federn garantiert.) ⚡

Um die Schwebung zu diskutieren, betrachte ich eine skalare Gleichung (der Fall einer Masse und einer Feder). Für Systeme ist die Situation inhaltlich völlig analog.

Betrachte

$$\begin{cases} b\ddot{y}(t) + cy(t) = k(t) \text{ mit} \\ b=2,\ c=8,\ k(t) = \sin\alpha t,\ y(0)=1,\ \dot{y}(0) = \frac{\alpha}{-2\alpha^2+8}. \end{cases}$$

Dabei ist α eine gegebene Konstante $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Wir lösen das verallg. EWP:

$$-2\lambda + 8 = \emptyset \Leftrightarrow \lambda_1 = 4 \Rightarrow \mu_1 = \sqrt{\lambda} = 2.$$

Damit ist die Lösung des hom. Problems

$$y_h(t) = a\cos 2t + b\sin 2t,\ a,b \in \mathbb{R}.$$

Ansatz für die partikuläre Lösung ist der Standardansatz, da kein Resonanzfall vorliegt, $\alpha \neq 2$:

$$y_p(t) = c\cos\alpha t + d\sin\alpha t \Rightarrow$$

$$\dot{y}_p(t) = -c\alpha\sin\alpha t + d\alpha\cos\alpha t \Rightarrow$$

$$\ddot{y}_p(t) = -c\alpha^2\cos\alpha t - d\alpha^2\sin\alpha t$$

$$\Rightarrow 2(-c\alpha^2 \cancel{\cos\alpha t} - \cancel{d\alpha^2}\sin\alpha t) +$$
$$+8(c\cancel{\cos\alpha t} + d\sin\alpha t) = \cancel{\sin\alpha t} \quad \forall t$$

Koeff. Vergleich liefert:

$\underline{\underline{\cos\alpha t:}}$ $\quad -2c\alpha^2 + 8c = 0 \Leftrightarrow (-2\alpha^2+8)c = 0$

$\underline{\underline{\sin\alpha t:}}$ $\quad -2d\alpha^2 + 8d = 1 \Leftrightarrow (-2\alpha^2+8)d = 1$

Da $\alpha \neq 2 \Rightarrow -2\alpha^2+8 \neq 0 \Rightarrow c = 0$ und

$$\underline{\underline{d = \frac{1}{-2\alpha^2+8}}}$$

Damit ist

$$y(t) = a\cos 2t + b\sin 2t + \frac{1}{-2\alpha^2+8}\sin\alpha t.$$

AB: $y(0) = \underline{\underline{a = 1}}$

$\dot{y}(0) = 2b + \frac{\alpha}{-2\alpha^2+8} = \frac{\alpha}{-2\alpha^2+8} \Rightarrow \underline{\underline{b = 0}}$

Also

$$\boxed{y(t) = \cos 2t + \frac{\sin\alpha t}{-2\alpha^2+8}}.$$

Auch wenn $\alpha \neq 2$ ist und $-2\alpha^2+8 \neq 0$ gilt, kann der Faktor $\frac{1}{-2\alpha^2+8}$ sehr groß werden.

Sei z.B. $\alpha = 2 + 10^{-10} \Rightarrow$

$$-2\alpha^2 + 8 = -2(4 + 4\cdot 10^{-10} + 10^{-20}) + 8 \approx -10^{-9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-2\alpha^2+8} \approx -10^{9}$$

Für jene Zeitpunkte t für die $t\alpha \approx \frac{\pi}{2}\cdot \ell, \ell \in \mathbb{Z}$ gilt, ergibt sich

$$\boxed{y(t) = \cos 2t \pm 10^{+9}}$$ ↯

(Auch das hält auf Dauer keine Feder aus.) ↯

Da man im Allg. die Frequenz der äußeren Kräfte nicht kontrolieren kann, muß man das System, durch entsprechende Wahl der Massen und Federkräfte, so konstruieren, dass Resonanz und Schwebung vermieden werden.

Schöne Ferien und bis bald im SS.

Beste Grüße, Eva Weinmüller