Elemente der Funktionentheorie

Die wichtigsten Sätze und Hilfsmittel für Anwendungen in der physikalischen Feldtheorie

Übersicht

Einige Sätze der mathematischen Funktionentheorie, insbesondere der Cauchy'sche Integralsatz und der Residuensatz, sind außerordentlich nützlich für die physikalische Feldtheorie. Wir diskutieren und begründen diese mathematischen Hilfsmittel ohne überflüssigen Ballast, aber doch ausreichend detailliert, so dass der Physiker sie nicht nur als Formeln korrekt verwenden kann, sondern auch ihren Zusammenhang und ihre Begründung versteht.

Inhalt

1. Analytische Funktionen

Wir stellen komplexe Zahlen z dar als Summe ihres Realteils x und ihres Imaginärteils iy:

$$z = x + iy \qquad \text{mit } x, y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

Eine komplexwertige Funktion $f(z)$ stellen wir dar als Summe ihres Realteils u und ihres Imaginärteils iv:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad \text{mit } u, v \in \mathbb{R},\ f \in \mathbb{C} \tag{2}$$

Wir suchen jetzt ein Kriterium dafür, dass f im Punkt $x + iy$ differenzierbar ist. Bei Funktionen g, die auf der reellen Zahlengeraden definiert sind, bedeutet Differenzierbarkeit in einem Punkt x, dass der rechts- und linksseitige Grenzwert endlich und gleich sind:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(x+\varepsilon) - g(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(x) - g(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{mit } \varepsilon > 0 \tag{3}$$

In der komplexen Zahlenebene kann man sich einem Punkt $z = x + iy$ aus beliebiger Richtung nähern. Wenn die Ableitung in einem Punkt z eindeutig definiert sein soll, dann muss sie unabhängig davon sein, in welche Richtung der komplexen Ebene man ableitet. Als Extremfall betrachten wir die Ableitung parallel zur reellen Achse, und die Ableitung parallel zur imaginären Achse, und verlangen dass beide gleich sind[1]:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}iy} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}iv}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}iy} + \frac{\mathrm{d}iv}{\mathrm{d}iy} \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + i\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -i\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \tag{6}$$

Trennt man (6) in Real- und Imaginärteil, dann findet man die Cauchy[2]-Riemannschen[3] Differentialgleichungen, die Gegenstand der folgenden Definition sind.

Definition: Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$, die in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ der komplexen Zahlenebene definiert ist, wird **analytisch** im Gebiet G genannt, wenn $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ für alle $x + iy \in G$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \tag{7a}$$

$$\text{und} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{7b}$$

erfüllt. Die Differentialquotienten (7a) und (7b) müssen dabei endlich sein.

Dass eine Funktion analytisch ist, also die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, ist ein notwendiges Kriterium für ihre eindeutige Differenzierbarkeit. Dass dies Kriterium auch hinreichend ist, dass also die Ableitungen in beliebigen Richtungen

[1] Wir verwenden bei der Ableitung die Zeichenkonvention und Nomenklatur, wie sie in der Physik üblich ist. Diese unterscheidet sich von der in der Mathematik üblichen. Genaueres hierzu in http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd77211.pdf

[2] Augustin Louis Cauchy, 21. Aug. 1789 - 23. Mai 1857

[3] Georg Friedrich Bernhard Riemann, 17. Sep. 1826 - 20. Juli 1866

der komplexen Ebene gleich sind, wenn sie in Richtung der Achsen gleich sind, ist plausibel. Den strengen Beweis ersparen wir uns.

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (7) sind eine stark einschränkende Bedingung. Viele durchaus „vernünftig“ aussehende Funktionen erfüllen (7) nicht, sind also nicht analytisch, beispielsweise $f(x, y) = 2x + i3y$ oder $f(x, y) = x - iy$. Um die Bedeutung von (7) besser zu verstehen, betrachten wir f als ein zweidimensionales Vektorfeld und untersuchen seine Divergenz und seine Rotation. Wir beginnen mit der Divergenz.

$$f \equiv \begin{pmatrix} u \\ iv \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}iv}{\mathrm{d}iy} \\ &= 2 \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \qquad \text{wegen (7a)} \end{aligned} \tag{9}$$

Die beiden Summanden der Divergenz müssen also gleich sein. Eine ungewöhnliche Forderung, wie wir sie von anderen Vektorfeldern nicht kennen. Betrachten wir die Rotation:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} iv - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}iy} u \\ i \operatorname{rot} f &= -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \\ &= 0 \qquad \text{wegen (7b)} \end{aligned} \tag{10}$$

Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung (7b) verlangt also Wirbelfreiheit des Feldes f. Alternativ zu der ungewöhnlichen Einschränkung der Divergenz (9) lässt sich (7a) auch damit begründen, dass man die Wirbelfreiheit eines zusätzlichen Feldes $\tilde{f}$ verlangt. $\tilde{f}$ entsteht aus f durch Spiegelung an der Diagonalen

Achse $D\colon a = ia$, $a \in \mathbb{R}$, der komplexen Ebene:

$$\tilde{f} \equiv \begin{pmatrix} iv \\ u \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \tilde{f} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}iy} iv \\ &= 0 \qquad \text{wegen (7a)} \end{aligned} \tag{12}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen schränken eine analytische Funktion offensichtlich stärker ein, als die Forderung nach Wirbelfreiheit des Feldes f allein es täte. Anders formuliert: Es besteht zwischen den beiden Komponenten u und iv von f ein engerer Zusammenhang, als zwischen den Komponenten zweidimensionaler reeller Vektorfelder.

Ist es für Physiker überhaupt lohnend, sich mit analytischen Funktionen zu beschäftigen, wenn doch so viele denkbare Funktionen durch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ausgeschlossen werden? Die Antwort ist ein klares ja. Denn praktisch alle komplexen Funktionen, die in der Physik verwendet werden, sind entweder analytisch, oder haben höchstens endlich viele singuläre Punkte. Um maximalen Nutzen aus der Funktionentheorie zu ziehen, müssen wir uns mit den Singularitäten komplexer Funktionen beschäftigen. Zuvor geben wir aber den Cauchy'schen Integralsatz an.

2. Der Cauchy'sche Integralsatz

Cauchy'scher Integralsatz:
Wenn eine Funktion $f(z) : G \to \mathbb{C}$ in allen Punkten z eines Gebiets $G \subseteq \mathbb{C}$ analytisch ist, dann ist das Integral über einen geschlossenen Weg, der dies Gebiet begrenzt, gleich Null:

$$\oint f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{13}$$

Dass es so sein muss, ergibt sich unmittelbar aus dem Stokes'schen[4] Satz. Nach dem Stokes'schen Satz ist ja das in (13) angegebene Linienintegral von f über einen geschlossenen Weg gleich dem Flächenintegral der Rotation von f über die Fläche, die von dem geschlossenen Weg eingeschlossen wird. In (10) hatten wir bereits festgestellt, dass Rotationsfreiheit equivalent ist zu einer der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Die Rotation von f ist überall, wo f analytisch ist, gleich Null. Also ist laut Stokes'schem Satz auch (13) gleich Null.

Mit dem Cauchy'schen Integralsatz liest man aus Abbildung 1

[4] George Gabriel Stokes, 13. Aug. 1819 - 1. Feb. 1903

$$\underset{\text{Weg 1}}{\int_a^b} f(z)\mathrm{d}z + \underset{\text{Weg 2}}{\int_b^a} f(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \underset{\text{Weg 1}}{\int_b^a} f(z)\mathrm{d}z + \underset{\text{Weg 3}}{\int_a^b} f(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \underset{\text{Weg 2}}{\int_b^a} f(z)\mathrm{d}z + \underset{\text{Weg 3}}{\int_a^b} f(z)\mathrm{d}z = 0 \qquad (14)$$

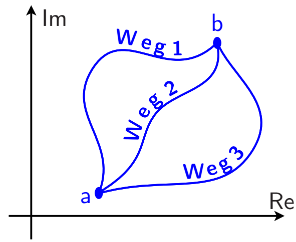

Abb. 1: Verschiedene Integrationswege

ab, woraus sofort die beiden folgenden Sätze folgen:

Satz:
Wenn eine Funktion $f(z) : G \to \mathbb{C}$ in allen Punkten z eines Gebiets $G \subseteq \mathbb{C}$ analytisch ist, dann ist das Wegintegral von einem Punkt $a \in G$ zu einem Punkt $b \in G$ unabhängig vom Integrationsweg, solange dieser innerhalb von G verläuft:

$$\underset{\text{Weg 1}}{\int_a^b} f(z)\mathrm{d}z = \underset{\text{Weg 2}}{\int_a^b} f(z)\mathrm{d}z \qquad (15)$$

Satz:
Wenn eine Funktion $f(z) : G \to \mathbb{C}$ in allen Punkten z eines Gebiets $G \subseteq \mathbb{C}$ analytisch ist, dann ist das Wegintegral von einem Punkt $a \in G$ zu einem Punkt $b \in G$ umgekehrt gleich dem Wegintegral von b nach a. Die Integrationswege der beiden Integrale können dabei gleich oder unterschiedlich sein, solange sie innerhalb von G verlaufen:

$$\int_a^b f(z)\mathrm{d}z = -\int_b^a f(z)\mathrm{d}z \tag{16}$$

3. Singuläre Punkte

Der Cauchy'sche Integralsatz gilt nur, wenn eine Funktion in einem Gebiet überall analytisch ist. Aber auch für den Fall, dass das Gebiet endlich viele singuläre Punkte enthält, verfügt die Funktionentheorie mit dem Residuensatz über ein sehr leistungsfähiges Werkzeug. Zunächst definieren wir, was singuläre Punkte sind.

Definition: Eine Funktion $f(z) : G \to \mathbb{C}$ sei in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte a_k analytisch. Die Punkte $a_k \in G$, in denen f nicht analytisch ist, heißen **singuläre Punkte** von f. (17)

Man unterscheidet drei Arten von singulären Punkten:

* $f(z) \to +\infty$ oder $f(z) \to -\infty$ bei Annäherung von z an a aus beliebiger Richtung der komplexen Zahlenebene. Diese Art der Singularität wird als „Pol“ bezeichnet.
* $f(z) \to f_0$ mit endlichem f_0 bei Annäherung von z an a aus beliebiger Richtung der komplexen Zahlenebene, aber $f(a) \neq f_0$. Dies ist eine „behebbare“ Singularität. Behoben wird sie dadurch, dass man $f(z)$ im Punkt a durch f_0 ersetzt.

∗ Bei Annäherung von z an a aus verschiedenen Richtungen der komplexen Zahlenebene konvergiert $f(z)$ gegen unterschiedliche (endliche oder unendliche) Werte. In diesem Fall spricht man von einer „wesentlichen Singularität“ .

Die für Anwendungen in der Physik bei weitem wichtigste Art der Singularität ist der Pol. Man unterscheidet Pole unterschiedlicher Ordnung, die Definition der Ordnung eines Pols werden wir in (21) nachholen.

4. Laurentreihen

Die Laurententwicklung[5] (18) ist die entscheidende Voraussetzung für den Residuensatz. Den Beweis dafür, dass sie tatsächlich möglich[6] ist, geben wir nicht an.

Satz: Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ sei in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ der komplexen Zahlenebene mit (möglicher) Ausnahme eines Punktes a analytisch. Im Punkt a darf f singulär sein (braucht es aber nicht). Dann kann $f(z)$ für alle $z \neq a,\ z \in G$ in einer Laurentreihe um den Punkt a entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{mit } c_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z} \tag{18}$$

Die Entwicklung einer Funktion in einer Laurentreihe um den Punkt a erlaubt Rückschlüsse auf die Art einer möglichen Singularität in diesem Punkt. Dies ist Inhalt der folgenden drei Sätze, die wir ebenfalls ohne Beweis angeben.

[5] Pierre Alphonse Laurent, 18. Juli 1813 - 2. Sep. 1854

[6] Die Laurententwicklung ist sogar unter noch weiter gefassten Voraussetzungen möglich, als wir im folgenden Satz angeben. Alle Anwendungen in der Physik erfüllen aber die hier formulierten engeren Voraussetzungen.

Satz: Sind alle Koeffizienten c_n mit $n < 0$ der Laurentreihe (18) gleich Null, so ist $f(z)$ im Punkt a analytisch, oder hat eine behebbare Singularität. (19)

Satz: Ist der Koeffizient c_m mit $m < 0$ der Laurentreihe (18) verschieden von Null, und sind alle Koeffizienten c_n mit $n < m$ gleich Null, so hat $f(z)$ im Punkt a einen Pol. (20)

Definition: Der Pol wird in diesem Fall als **Pol m-ter Ordnung** bezeichnet. (21)

Ein Beispiel für eine Funktion mit einem Pol der Ordnung m ist $f(z) \equiv 1/(z-a)^m\,,\; m > 0\,,\; m \in \mathbb{Z}\,.$

Satz: Sind unendlich viele Koeffizienten c_n mit $n < 0$ der Laurentreihe (18) verschieden von Null, so hat $f(z)$ im Punkt a eine wesentliche Singularität. (22)

5. Der Residuensatz

Wir integrieren (18) auf einem geschlossenen Weg gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt a. Der Weg liegt im Gebiet G, in dem f analytisch ist.

$$\oint_{\circlearrowleft} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{\circlearrowleft} (z-a)^n \mathrm{d}z \tag{23}$$

Als Integrationsweg wählen wir einen Kreis um a mit dem Radius $r \in \mathbb{R}$ und der Winkelvariablen $\varphi \in \mathbb{R}$. Gleichung und Differential des Integrationsweges werden damit:

$$z = a + r \cdot e^{i\varphi} \tag{24a}$$

$$\mathrm{d}z = r \cdot i \cdot e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi \tag{24b}$$

Eingesetzt in (23) folgt:

$$\oint_{\circlearrowleft} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\varphi=0}^{2\pi} (a + re^{i\varphi} - a)^n ri \cdot e^{i\varphi} \mathrm{d}\varphi \tag{25a}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot ir^{n+1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)} \mathrm{d}\varphi \tag{25b}$$

$$= c_{-1} \cdot 2\pi i \tag{25c}$$

Der Clou dieser Rechnung ist das Integral (25b). Nur bei $n = -1$ hat es den Wert 2π, bei allen anderen n ist es Null. Wegen $r^{-1+1} = 1$ folgt das überraschend einfache Ergebnis (25c). Der Faktor c_{-1}, der bei der Integration (25) als einziger übrigbleibt, trägt den treffenden Namen „Residuum“ :

Definition: Eine Funktion $f(z) : G \to \mathbb{C}$ sei in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit Ausnahme eines Punktes a analytisch. Das Integral

$$\mathrm{Res}_f(a) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\circlearrowleft} f(z)\mathrm{d}z \ , \tag{26}$$

das auf einem beliebigen geschlossenen Weg gegen den Uhrzeigersinn innerhalb des Gebietes G um den singulären Punkt a genommen werden muss, wird als **Residuum von f im Punkt** a bezeichnet.

In (25) haben wir das Residuum mit einem kreisförmigen Integrationsweg berechnet, aber die Definition (26) spricht von einem „beliebigen“ Weg. Die Erklärung ergibt sich aus Abbildung 2. In Abbildung 2a sind der kreisrunde Integrationsweg mit dem singulären Punkt a im Zentrum, und ein beliebiger Integrationsweg um

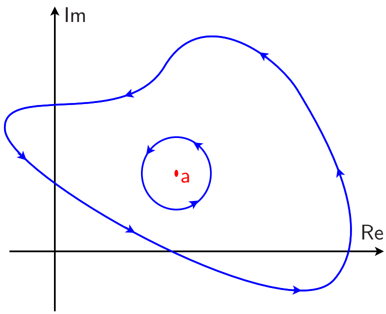

Abb. 2a : Zwei verschiedene Integrationswege

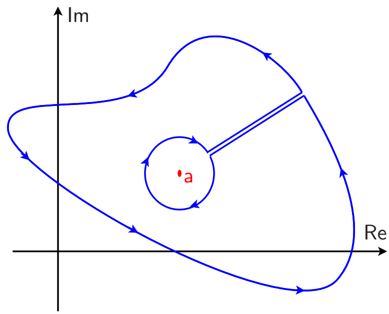

Abb. 2b : Die Differenz der Integrationswege

a skizziert. Abbildung 2b zeigt die Differenz

$$\oint\limits_{\substack{\circlearrowleft \\ \text{Abb. 2b}}} f(z)\mathrm{d}z = \oint\limits_{\substack{\circlearrowleft \\ \text{bel. Weg,} \\ \text{Abb. 2a}}} f(z)\mathrm{d}z - \oint\limits_{\substack{\circlearrowleft \\ \text{Kreis,} \\ \text{Abb. 2a}}} f(z)\mathrm{d}z \tag{27}$$

zwischen dem „beliebigen“ äußeren Weg, und dem kreisförmigen Weg. Am Verbindungssteg von Abb.2b läuft die Integration nicht – wie zur besseren Erkennbarkeit gezeichnet – auf parallelen Wegen nebeneinander, sondern auf exakt dem gleichen Weg nach innen und nach außen, so dass sich die Beiträge des Stegs zum Integral genau aufheben. Das Integral gemäß Abb.2b ist nach dem Cauchy'schen Integralsatz Null, da es keinen singulären Punkt einschließt. Also ist der Wert des Residuums unabhängig vom Verlauf des Integrals um den singulären Punkt a, und die Formulierung „beliebiger Weg“ in der Definition (26) ist vernünftig.

Falls f in a nicht singulär ist, ist das Residuum (wegen des Cauchy'schen Integralsatzes) natürlich Null. Nützlich ist aber, dass man mithilfe von (26) Wegintegrale berechnen kann, die endlich viele singuläre Punkte umschließen. Der Satz der dies besagt, ist der

Residuen-Satz: Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ sei in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ der komplexen Zahlenebene für alle $z \in G$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte $a_k \in G$ analytisch. Das Integral über einen entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen geschlossenen Weg in G, der die k singulären Punkt a_k umschließt, ist:

$$\oint_{\circlearrowleft} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_k \mathrm{Res}_f(a_k) \tag{28}$$

Der Beweis versteht sich nach dem zuvor gesagten fast von selbst. Für $k = 1$ ist der Satz trivial, da er dann einfach der Definition (26) des Residuums entspricht. Wenn das Wegintegral mehr als einen singulären Punkt umschließt, dann kann man um jeden einzelnen singulären Punkt ein kreisförmiges Wegintegral, das nur diesen einen singulären Punkt einschließt, berechnen. Die Differenz zwischen dem Gesamtintegral von (28) und den k kreisförmigen Einzelintegralen ist, entsprechend Abbildung 2, gleich Null.

6. Die Berechnung von Residuen

Wir wollen Integrale der Form $\oint f(z)\mathrm{d}z$ berechnen. Bisher haben wir das Problem nur umformuliert, aber noch nicht gelöst. Der Residuensatz besagt, dass wir das Wegintegral durch eine Summation über die Residuen ersetzen können. Aber wie berechnet man ein Residuum? Im Fall, dass es sich bei den Singularitäten um Pole – jedoch nicht um wesentliche Singularitäten – handelt, gelingt dies mithilfe der Laurententwicklung überraschend einfach. Wir geben eine Formel zur Berechnung von Residuen an, und werden sie anschließend beweisen.

Satz: Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$, die in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ definiert ist, habe in einem Punkt $a \in G$ einen Pol der Ordnung m. Das Residuum von f im Punkt a kann nach folgender Formel berechnet werden:

$$\mathrm{Res}_f(a) = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{\,m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\Big(f(z)\cdot(z-a)^m\Big)\Big|_{z=a} \tag{29}$$

Die Formel lässt die enorme Vereinfachung erkennen, die der Residuensatz mit sich bringt. Statt ein Wegintegral berechnen zu müssen, dessen analytische Lösung überaus schwierig sein kann, braucht man laut (29) nur Ableitungen zu berechnen, und das gelingt immer ohne große Mühe. Zur Überprüfung der Formel setzen wir für $f(z)$ die Laurententwicklung (18) ein:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_f(a) &= \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{\,m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n\cdot(z-a)^m\Big)\Big|_{z=a}\\ &= \frac{1}{(m-1)!}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\frac{\mathrm{d}^{\,m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-a)^{m+n}\Big|_{z=a}\end{aligned} \tag{30}$$

Alle Summanden, in denen der Exponent $m+n$ kleiner ist als die Vielfachheit $m-1$ der Ableitung, werden bei der Ableitung Null. Von Null verschiedene Summanden bleiben nach der Ableitung nur für

$$\begin{aligned}m-1 &\leq m+n\\ -1 &\leq n\end{aligned} \tag{31}$$

übrig. Nach der $(m-1)$-fachen Ableitung ist, wie vom Zeichen $|_{z=a}$ verlangt, der Funktionswert an der Stelle $z=a$ zu nehmen. Dabei verschwinden alle Summanden, die dann noch einen Faktor

$(z-a)^p$ mit $p>0$ enthalten. Nur Summanden mit

$$\begin{aligned} m-1 &\geq m+n \\ -1 &\geq n \end{aligned} \tag{32}$$

sind nach der Ableitung von Null verschieden. Zusammengenommen ist in (30) nach den Kriterien (31) und (32) also nur der Summand mit $n=-1$ von Null verschieden:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_f(a) &= \frac{1}{(m-1)!}\, c_{-1}\, \frac{\mathrm{d}^{\,m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-a)^{m-1}\Big|_{z=a} \\ &= \frac{1}{(m-1)!}\, c_{-1}\,(m-1)!\cdot 1 \\ &= c_{-1} \end{aligned} \tag{33}$$

Das stimmt nach (25) und (26) mit der Definition des Residuums überein. Satz (29) ist damit bewiesen.

Anmerkung: Beim Beweis haben wir davon Gebrauch gemacht, dass m endlich ist. Deshalb gilt (29) – wie in den Voraussetzungen des Satzes auch ausdrücklich gesagt – nur für Pole, aber nicht für wesentliche Singularitäten.

7. Ein Beispiel

In der physikalischen Feldtheorie begegnet man häufig Integralen der Form

$$G(x-y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{i\,\exp\{-ik(x-y)\}}{\hbar c\Big(k^0+\dfrac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\Big)\Big(k^0-\dfrac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}\Big)} \tag{34}$$

$$\text{mit}\quad \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} \equiv +\sqrt{\boldsymbol{k}^2+M^2\frac{c^2}{\hbar^2}} \quad ; \quad k\equiv(k^0,k^1,k^2,k^3)\equiv(k^0,\boldsymbol{k})\ .$$

(Bei diesem Beispiel handelt es sich um die Greensfunktion eines Klein-Gordan-Feldes mit Masse M.) Bei $k^0 = \mp\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ hat der Integrand zwei Pole erster Ordnung. Deshalb wird ein kleiner imaginärer Summand $-i\epsilon$ zu $\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ addiert:

$$\omega_{\boldsymbol{k}}/c \;\rightarrow\; \omega_{\boldsymbol{k}}/c - i\epsilon \quad \text{mit} \begin{cases} \epsilon \in \mathbb{R} \;,\; \epsilon > 0 \\ \dfrac{\epsilon}{\omega_{\boldsymbol{k}}/c} \leq \dfrac{\epsilon}{Mc/\hbar} \ll 1 \end{cases} \tag{35}$$

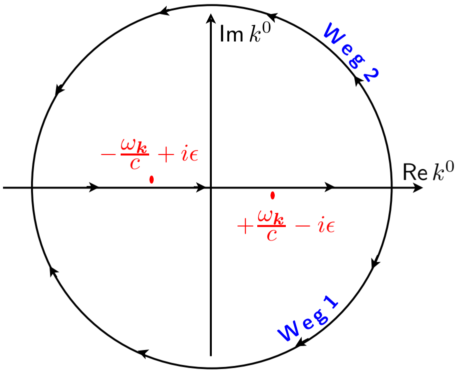

Abb. 3: Die beiden Integrationswege

Dadurch werden die Pole, die in Abb. 3 als rote Punkte eingetragen sind, von der reellen Achse in die komplexe Ebene geschoben. Ob, und unter welchen Voraussetzungen diese Maßnahme gerechtfertigt werden kann, ist eine rein physikalische Frage. In diesem Artikel befassen wir uns nur mit dem mathematischen Aspekt, nämlich der Auswertung des auf diese Weise veränderten Integrals.

Das Integral über k^0 kann mithilfe des Residuensatzes (28) berechnet werden. Dazu muss es zu einem geschlossenen Wegintegral ergänzt werden. Falls $x^0 > y^0$ ist, kann man den Integrationsweg – ohne den Wert des Integrals zu ändern – in der unteren komplexen Halbebene schließen (Weg 1 in Abb. 3). Denn bei großem Realteil von k^0 bewirkt der Summand $(k^0)^2$ im Nenner, bei großem negativen Imaginärteil von k^0 die Exponentialfunktion im Zähler, dass das Integral über den unteren Halbkreis Null ergibt.

Weg 1 umschließt den Pol bei $k^0 = +\omega_{\boldsymbol{k}}/c - i\epsilon$. Mit der Definition

$$f(k^0) \equiv \frac{\exp\{-ik^0(x^0-y^0)\}}{\hbar c\Big(k^0+\dfrac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}-i\epsilon\Big)\Big(k^0-\dfrac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}+i\epsilon\Big)} \tag{36}$$

findet man die Greensfunktion

$$G(x-y) \overset{x^0\geq y^0}{=} \frac{i}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3k\ \exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} \oint\limits_{\circlearrowright} \mathrm{d}k^0\, f(k^0)$$

$$\overset{(28)}{=} \frac{i}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3k\ \exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}\Big(-2\pi i\cdot \mathrm{Res}_f(\omega_{\boldsymbol{k}}/c-i\epsilon)\Big)$$

Hier gab es einen Vorzeichenwechsel, weil der Integrationsweg im Uhrzeigersinn durchlaufen wurde, während in Satz (28) die Integration gegen den Uhrzeigersinn angenommen wird. Man berechnet das Residuum mit Satz (29). In diesem Beispiel hat der Pol die Ordnung $m = 1$:

$$\mathrm{Res}_f(\omega_{\boldsymbol{k}}/c-i\epsilon) \overset{(29)}{=} f(k^0)\cdot(k^0-\omega_{\boldsymbol{k}}/c+i\epsilon)\Big|_{k^0=\omega_{\boldsymbol{k}}/c-i\epsilon}$$

$$\overset{(36)}{=} \frac{\exp\{-ik^0(x^0-y^0)\}}{\hbar c\Big(k^0+\dfrac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c}-i\epsilon\Big)}\Bigg|_{k^0=\omega_{\boldsymbol{k}}/c-i\epsilon}$$

Damit ist

$$G(x-y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{\exp\{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}/c-i\epsilon)(x^0-y^0)+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}}{\hbar c(2\omega_{\boldsymbol{k}}/c-2i\epsilon)}\ .$$

Jetzt kann man ϵ gegenüber $\omega_{\boldsymbol{k}}/c$ vernachlässigen, und erhält die Greensfunktion

$$G(x-y) \overset{x^0 \geq y^0}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \, \frac{\exp\{-i\omega_{\boldsymbol{k}}(x^0-y^0)/c + i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \, . \tag{37a}$$

Falls $x^0 < y^0$ ist, schließt man das Integral in der oberen komplexen Halbebene (Weg 2 in Abb. 3), wobei der Pol bei $k^0 = -\omega_{\boldsymbol{k}}/c + i\epsilon$ vom Integrationsweg eingeschlossen wird:

$$G(x-y) \overset{y^0 \geq x^0}{=} \frac{i}{(2\pi)^4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3 k \, \exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} \oint_{\circlearrowleft} \mathrm{d}k^0 \, f(k^0)$$

$$\overset{(28)}{=} \frac{i}{(2\pi)^4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^3 k \, \exp\{+i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\} \, 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_f(-\omega_{\boldsymbol{k}}/c + i\epsilon)$$

Mit

$$\operatorname{Res}_f(-\omega_{\boldsymbol{k}}/c + i\epsilon) \overset{(29)}{=} f(k^0) \cdot (k^0 + \omega_{\boldsymbol{k}}/c - i\epsilon)\Big|_{k^0 = -\omega_{\boldsymbol{k}}/c + i\epsilon}$$

$$\overset{(36)}{=} \frac{\exp\{-ik^0(x^0-y^0)\}}{\hbar c\left(k^0 - \dfrac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{c} + i\epsilon\right)}\Bigg|_{k^0 = -\omega_{\boldsymbol{k}}/c + i\epsilon}$$

findet man

$$G(x-y) \overset{y^0 \geq x^0}{=}$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \, \frac{\exp\{-i(-\omega_{\boldsymbol{k}}/c + i\epsilon)(x^0-y^0) + i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\}}{\hbar c(-2\omega_{\boldsymbol{k}}/c + 2i\epsilon)}$$

Weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen Wellenzahlen $\boldsymbol{k}$ integriert wird, und $\omega_{-\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}}$ ist, darf man $\boldsymbol{k}$ gegen $-\boldsymbol{k}$ tauschen, und erhält mit Vernachlässigung von ϵ

$$G(x-y) \overset{y^0 \geq x^0}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \, \frac{\exp\{-i\omega_{\boldsymbol{k}}(y^0 - x^0)/c + i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\}}{2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}} \ . \tag{37b}$$

Für $x^0 = y^0$ wird die Greensfunktion nicht definiert.