

**Skript**

# **Variationsrechnung**

**Anton Arnold**

TU Wien, SS 2010, 2012

TU Wien, WS 2007/08

19. Juni 2013

© Anton Arnold, 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung, klassische Beispiele</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Euler-Lagrange Gleichungen</b>	<b>11</b>
2.1	Erste Variation . . . . .	11
2.2	Stationäre Punkte von Variationsintegralen . . . . .	14
2.3	Natürliche Randbedingungen . . . . .	20
2.4	Erdmannsche Gleichung und Eckenbedingung . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Zweite Variation, Konvexität</b>	<b>25</b>
3.1	Konvexe Funktionale . . . . .	25
3.2	Die Legendre-Hadamard-Bedingung . . . . .	29
3.3	Jacobi-Bedingung, konjugierte Punkte . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Variationsprobleme mit Nebenbedingungen</b>	<b>41</b>
4.1	Isoperimetrische Nebenbedingungen . . . . .	41
4.2	Holonome Nebenbedingungen . . . . .	44
4.3	stationäre Stokes Gleichung . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Existenztheorie für Minimierer</b>	<b>53</b>
5.1	Funktionalanalytische Hilfsmittel . . . . .	53
5.1.1	Sobolev Räume $W^{k,p}(\Omega)$ . . . . .	53
5.1.2	Schwache Konvergenz . . . . .	54
5.1.3	Unterhalbstetigkeit . . . . .	55
5.2	Direkte Methode der Variationsrechnung . . . . .	57
5.3	Minimalflächenproblem . . . . .	63
5.4	Polykonvexität / kompensierte Kompaktheit . . . . .	64
5.5	Hindernisprobleme / Variationsungleichungen . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Nichtkonvexe Probleme</b>	<b>75</b>
6.1	Relaxierte Funktionale . . . . .	76
6.2	$\Gamma$ -Konvergenz . . . . .	79
6.3	Anwendung der $\Gamma$ -Konvergenz: Homogenisierung . . . . .	84
6.4	Young Maße . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Sattelpunktprobleme</b>	<b>97</b>
7.1	“Mountain-Pass” Theorem . . . . .	97
7.2	Anwendung des MPT: semilineare elliptische PDGl . . . . .	102

<b>8</b>	<b>Parameter-abhängige Variationsprobleme, Verzweigungstheorie</b>	<b>109</b>
8.1	Verzweigungsprobleme in der Variationsrechnung . . . . .	109
8.1.1	Fredholm Operatoren . . . . .	111
<b>A</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>Folien</b>	<b>121</b>

# 1 Einleitung, klassische Beispiele

Ziel der Vorlesung:

- Vorstellung von typischen Variationsproblemen und Anwendungen
- typische mathematische Fragestellungen (Existenz, Eindeutigkeit von Lösungen und deren qualitatives Verhalten)
- typische (analytische) Lösungsstrategien

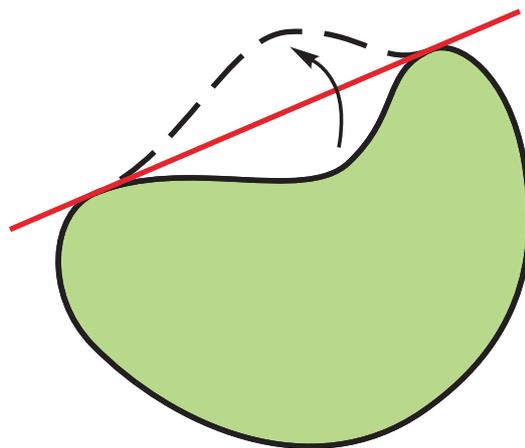
Variationsprobleme sind Minimierungsaufgaben; gesucht sind Funktionen.

Viele (angewandte) Variationsprobleme sind einfach zu formulieren, aber oft schwierig zu lösen.

**Beispiel 1.1. Isoperimetrisches Problem** (= „Problem der Dido“, 9. Jhd. v. Chr.; isos ( $\iota\sigma\omicron\varsigma$ ) = gleich, perimetros ( $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ ) = Umfang):

Aufgabe: Finde die geschlossene Kurve einer vorgegebenen Länge mit maximalem Inhalt.

Lösung: Kreis



Die Lösung muß konvex sein, sonst Gebietsvergrößerung möglich. □

**Beispiel 1.2. Minimalflächen:**  $(x_1, x_2, u(x_1, x_2)), x = (x_1, x_2) \in \Omega$  sei eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{Oberfläche} = O(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

Aufgabe: Finde Fläche minimalen Inhalts, die die Randbedingung  $u = g$  auf  $\partial\Omega$  erfüllt ( $\rightarrow$  *Variationsproblem*, d.h. Minimierung des Funktionals  $O(u)$ ).

Anwendung: eingespannte Membran, Seifenblasen

Man kann zeigen:  $u(x)$  erfüllt die *Minimalflächengleichung* (quasilinear, glm. elliptisch)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0 & , \quad \Omega, \\ u = g & , \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

bzw:

$$(1 + u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + (1 + u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{Koeffizientenmatrix: } A = \begin{pmatrix} 1 + u_{x_2}^2 & -u_{x_1}u_{x_2} \\ -u_{x_1}u_{x_2} & 1 + u_{x_1}^2 \end{pmatrix} \geq I$$

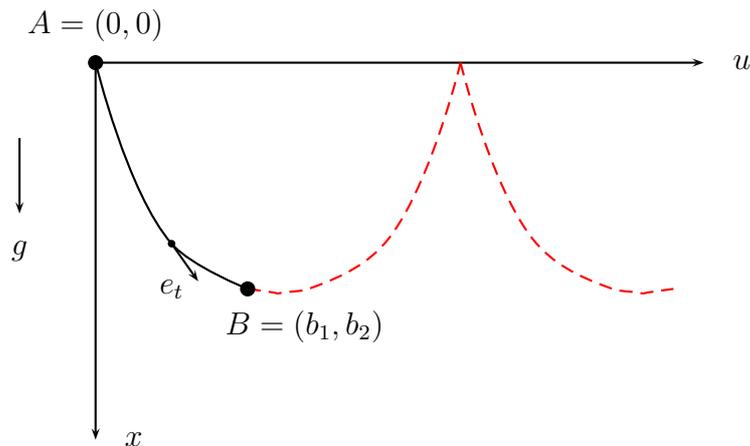
Dabei ist  $\frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right)$  die *mittlere Krümmung* der Fläche (=Durchschnitt der Hauptkrümmungen d.h. Min./Max. der Normalkrümmungen).

Minimalflächen: mittlere Krümmung  $\equiv 0 \Rightarrow$  lokale Sattelform. □

**Beispiel 1.3. Brachistochrone** (Bernoulli, 1696; brachistos ( $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$ ) = kürzeste, chronos ( $\chi\rho\nu\omicron\varsigma$ ) = Zeit):

Aufgabe: Finde Kurve  $u = u(x)$  zwischen den Punkten  $A = (0, 0)$  und  $B = (b_1, b_2)$  mit  $b_1 > 0, b_2 > 0$ , so dass ein Körper in dem konstanten Schwerfeld  $F \equiv (g, 0), g > 0$  reibungsfrei *möglichst schnell* von  $A$  nach  $B$  kommt – bei Anfangsgeschwindigkeit 0.

Lösung: Zykloidenbogen (Radkurve), obwohl längerer Weg als Verbindungsgerade



Herleitung der mathematischen Formulierung:

$m$  ... Masse des Körpers

$(x(t), u(t))$  ... Position des Körpers zur Zeit  $t$

$s(t)$  ... zurückgelegter Weg (Bogenlänge)

2. Newton'sches Gesetz (in tangentialer Richtung), d.h. Masse  $\times$  Beschleunigung = Kraft:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = m F \cdot e_t(x) = m \frac{g}{\sqrt{1+u'^2}},$$

$$e_t(x) = \frac{1}{\sqrt{1+u'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u' \end{pmatrix} \dots \text{Einheitstangentenvektor an Kurve}$$

gesucht:  $t(x)$  bzw.  $x(t)$ ,  $\frac{dx}{dt}$  = vertikale Geschwindigkeitskomponente

$$\text{Bogenlängenelement: } \sqrt{1+u'^2} dx = ds \Rightarrow \sqrt{1+u'^2} = \frac{ds}{dx} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow g = \frac{d^2 s}{dt^2} \sqrt{1+u'^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \right] \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow g \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad \text{Anf.geschw.}=0 \quad \Rightarrow \quad gx = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{2gx} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1+u'^2} \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1+u'^2}{2gx}} \quad \Bigg| \int_0^{b_1} \dots dx$$

$$\Rightarrow \text{Durchlaufzeit} = \int_0^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1+u'^2} dx$$

mathematische Problemstellung:

Definiere die Funktionenmenge  $U := \{u \in C^1[0, b_1] \mid u(0) = 0, u(b_1) = b_2\}$  und das Funktional

$$\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{F}(u) := \int_0^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + u^2} dx.$$

Finde  $u_0 \in U$ , so dass  $\mathcal{F}(u_0)$  minimal wird.

offene Fragen:

- Ist  $U$  eine / die geeignete Menge?
- Gibt es ein Minimum von  $\mathcal{F}$  auf  $U$ ? eindeutig?
- Wie findet man es? □

Gegenstand der VL:

Untersuchung von Extremalstellen von *Variationsintegralen* (oder *Energie-Funktionalen*):

$$u \mapsto \mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(x, u(x), \underbrace{Du(x)}_{\text{Jacobi Matrix}}) dx : U \rightarrow \mathbb{R}$$

auf Mengen  $U \subset \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N\}$ .  $F(x, z, p)$  heißt *Lagrange Funktion*.

Idee: Verallgemeinerung von Extremwertmethoden für skalare Funktionen  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- notwendige Bedingungen (analog zu  $f'(x_0) = 0$  für  $f \in C^1$ )
- hinreichende Bedingungen (analog zu  $f''(x_0) > / < 0$  für  $f \in C^2$ ).  
Typischerweise gibt es eine "Lücke" zwischen diesen beiden Bedingungen.
- Existenz globaler Extremwerte (analog zur Annahme der Extremwerte stetiger Funktionen auf Kompakta)

**Definition 1.1.** Sei  $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Der "Punkt"  $u \in U$  heißt

- a) (globale) Minimalstelle von  $\mathcal{F}$ , falls  $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in U$ ;
- b) strikte (globale) Minimalstelle von  $\mathcal{F}$ , falls  $\mathcal{F}(u) < \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in U \setminus \{u\}$ ;
- c) [strikte] lokale Minimalstelle von  $\mathcal{F}$ , falls  $U$  topologischer Raum ist, und eine offene Umgebung  $V \subset U$  von  $u$  existiert, so dass  $u$  eine [strikte] Minimalstelle von  $\mathcal{F}|_V$  ist.

Der Wert  $\mathcal{F}(u) \in \mathbb{R}$  heißt dann [striktes] Minimum. Analoge Definitionen für [strikte] Maximalstellen und Extremalstellen.

---

**Beispiel 1.4.** Für festes  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  sei

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 (1 + u'(x)^2)^\alpha dx \quad \text{auf} \quad U = \{u \in C^1[0, 1] \mid u(0) = 0, u(1) = 1\}.$$

Es ist  $\mathcal{F}(u) > 1 \quad \forall u \in U$ , da  $u' \not\equiv 0$  für  $u \in U$ . Für

$$u_n(x) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n^2(x - 1 + \frac{1}{n})^2 & , \quad 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ist  $u_n \in U$  und

$$\mathcal{F}(u_n) \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (5n^2)^\alpha dx = 1 - \frac{1}{n} + 5^\alpha n^{2\alpha-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1;$$

verwende im 2. Integral:  $1 + 4n^4 \underbrace{\left(x - 1 + \frac{1}{n}\right)^2}_{\leq 1/n} \leq 5n^2$ .

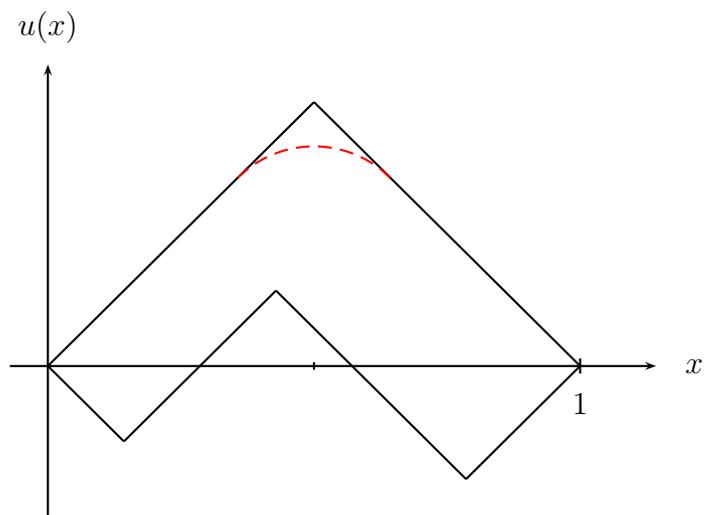
Also ist  $\inf_{u \in U} \mathcal{F}(u) = 1$ , das Infimum wird aber nicht angenommen. □

**Beispiel 1.5.** Für

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 dx \quad \text{auf} \quad U = \{u \in C^1[0, 1] \mid u(0) = u(1) = 0\}.$$

ist  $\inf_{u \in U} \mathcal{F}(u) = 0$ , das Infimum wird aber nicht angenommen. Für jede Zick-Zack-Funktion  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u(0) = u(1) = 0$  und  $u'(x) = \pm 1$  bis auf endlich viele Ausnahmepunkte gilt aber  $\mathcal{F}(u) = 0$ . Und Zick-Zack-Funktionen lassen sich bez. der  $H^1(0, 1)$ -Norm beliebig gut aus  $U$  approximieren.

Auf dem Raum der lipschitzstetigen Funktionen  $Lip[0, 1]$  wird das Minimum aber angenommen. Die Lösung ist dann aber nicht eindeutig. Obwohl  $F$  analytisch ist, sind Lösungen hier *nicht* glatt.



□

Referenzen: [Se] §1, [vB] §1

# 2 Euler-Lagrange Gleichungen

Inhalt: klassische Theorie, "indirekte Methode", d.h. Zugang mittels Differentialgleichungen (ohne Funktionalanalysis)

Fragen:

Zuerst machen wir die *Annahme*, dass das Variationsproblem eine Lösung (z.B. Minimum) hat).

- Welche Gleichung erfüllt die Lösung?
- Welche Eigenschaften (z.B. Symmetrien) erbt sie vom Variationsintegral?

## 2.1 Erste Variation

Betrachte Funktional  $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U \subset X$ ,  $X$  linearer Raum über  $\mathbb{R}$ .

Sei  $u_0 \in U, \xi \in X$ , sodass  $\{u_0 + \varepsilon\xi \mid |\varepsilon| < \varepsilon_0\} \subset U$  für ein  $\varepsilon_0 > 0$  gelte.

$$\phi(\varepsilon) := \mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\xi), \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

**Definition 2.1.** Falls  $\phi'(0)$  existiert, heißt  $\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) := \phi'(0)$  erste Variation von  $\mathcal{F}$  an  $u_0$  in Richtung  $\xi$ .

**Beispiel 2.1.**  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u_0 \in U$ ,  $\mathcal{F} \in C^1(U, \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_k}(u_0) \xi_k = \nabla \mathcal{F}(u_0) \cdot \xi,$$

also *Richtungsableitung* von  $\mathcal{F}$  an  $u_0$  in Richtung  $\xi$  (=Linearform in  $\xi$ ). □

**Bemerkung 2.1.** Hat  $\mathcal{F}$  lokales Extremum an  $u_0$ , dann hat  $\phi$  ein lokales Extremum an  $\varepsilon = 0$ .

$$\Rightarrow \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi, \text{ für die } \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \text{ definiert ist.} \quad (2.1)$$

(2.1) ist also *notwendige Bedingung* dafür, dass  $u_0$  Extremalstelle von  $\mathcal{F}$  ist.

**Definition 2.2.** Sei  $\mathcal{F} : U \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ .  $u_0 \in U$  heißt stationärer Punkt (bzw. kritischer Punkt) von  $\mathcal{F}$ , falls

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X, \text{ für die } \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) \text{ existiert.}$$

**Bemerkung 2.2.** Sei  $\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = 0 \forall \xi \in X$ . Dann ist  $u_0$  lokale Extremalstelle von  $\mathcal{F}$  oder Sattelpunkt (vgl.  $x = 0$  für  $f(x) = x^3$ ).

**Beispiel 2.2.** Sei

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1 + u'(x)^2}{x}} dx \quad \text{auf} \quad U := \{u \in C^1[0, b_1] \mid u(0) = 0, u(b_1) = b_2\}$$

(vgl. Bsp. 1.3: Brachistochrone).

$$\begin{aligned} \{u_0 + \varepsilon\xi \mid |\varepsilon| < \varepsilon_0\} \subset U \quad (\varepsilon_0 \text{ beliebig}) &\Leftrightarrow \\ \xi \in \tilde{U} := \{\eta \in C^1[0, b_1] \mid \eta(0) = \eta(b_1) = 0\}. & \end{aligned}$$

Für  $\xi \in \tilde{U}$  gilt:

$$\delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = \dots = \int_0^{b_1} \underbrace{\frac{u'_0(x)}{\sqrt{x(1 + u'_0(x)^2)}}}_{=: y(x)} \xi'(x) dx \quad \text{existiert.}$$

Berechnung der Brachistochrone:

Sei  $u_0$  eine Minimalstelle von  $\mathcal{F}$ .

Annahme:  $y \in C[0, b_1]$ .

Wähle speziell

$$\xi(x) := \int_0^x y(\tau) d\tau - Cx, \quad C = \frac{1}{b_1} \int_0^{b_1} y(x) dx \quad \Rightarrow \xi \in \tilde{U}.$$

Aus (2.1):

$$0 = \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = \int_0^{b_1} y(x)(y(x) - C) dx = \int_0^{b_1} y(x)^2 - 2Cy(x) + C^2 dx = \int_0^{b_1} (y(x) - C)^2 dx,$$

$$\text{da } \int_0^{b_1} Cy(x) dx = b_1 C^2 = \int_0^{b_1} C^2 dx.$$

$$\Rightarrow y(x) \equiv C, \text{ also aus } C[0, b_1] \Rightarrow u'_0(x) = \sqrt{\frac{x}{D-x}} \quad \text{für ein } D > b_1$$

$$\Rightarrow u_0(x) = D \arctan \sqrt{\frac{x}{D-x}} - \sqrt{Dx - x^2} \quad (\text{da } u_0(0) = 0; \text{Zykloide),}$$

$D$  kann eindeutig so gewählt werden, dass  $u_0(b_1) = b_2$ . □

**Definition 2.3.** Falls  $\phi^{(m)}(0)$  existiert, heißt

$$\delta^m \mathcal{F}(u_0, \xi) := \phi^{(m)}(0)$$

$m$ -te Variation von  $\mathcal{F}$  an  $u_0$  in Richtung  $\xi$ ;  $m \in \mathbb{N}$ .

**Beispiel 2.3.** Sei  $\mathcal{F} \in C^2(U, \mathbb{R})$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u_0 \in U$ :

$$\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \xi) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial u_i \partial u_j}(u_0) \xi_i \xi_j \quad ; \text{ quadratische Form in } \xi \quad \square$$

**Bemerkung 2.3.** Hat  $\mathcal{F}$  lokales Minimum (Maximum) an  $u_0$ , dann gilt:

$$\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \xi) \geq 0 \quad (\leq 0)$$

$\forall \xi$ , für die  $\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \xi)$  definiert ist.

**Bemerkung 2.4.** “Variation” ist ein “schwacher” Ableitungsbegriff; er benötigt *keine* Topologie auf  $X$ .

Vergleich mit Gâteaux- und Fréchet-Ableitung:

**Definition 2.4.** Sei  $X$  Banachraum und  $X'$  sein (topologischer) Dualraum. Sei  $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset X$  offen,  $u_0 \in U$ . Es existiere  $l \in X'$  (abhängig von  $u_0$ ) mit

$$a) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\mathcal{F}(u_0 + \varepsilon \xi) - \mathcal{F}(u_0) - \varepsilon l(\xi)}{\varepsilon} \right| = 0 \quad \forall \xi \in X.$$

Dann heißt  $\mathcal{F}$  Gâteaux differenzierbar an  $u_0$ , und  $d\mathcal{F}(u_0, \cdot) = l$  seine Gâteaux Ableitung.

$$b) \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|\mathcal{F}(u_0 + \xi) - \mathcal{F}(u_0) - l(\xi)|}{\|\xi\|} = 0.$$

Dann heißt  $\mathcal{F}$  Fréchet differenzierbar an  $u_0$ , und  $D\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}'(u_0) = l$  seine Fréchet Ableitung.

**Bemerkung 2.5.**

- $\mathcal{F}$  Fréchet differenzierbar an  $u_0 \Rightarrow \mathcal{F}$  Gâteaux differenzierbar an  $u_0 \Rightarrow$  erste Variation von  $\mathcal{F}$  an  $u_0$  existiert für jede Richtung  $\xi$  (aber nicht umgekehrt:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  in Gâteaux Ableitung muss in  $\xi$  nicht gleichmäßig sein).
- $\mathcal{F}$  Fréchet differenzierbar an  $u_0 \Rightarrow$

$$D\mathcal{F}(u_0)(\xi) = d\mathcal{F}(u_0, \xi) = \delta \mathcal{F}(u_0, \xi) \quad \forall \xi \in X.$$

- erste Variation “ähnlich” zu Gâteaux Ableitung, aber
  - $\delta \mathcal{F}(u_0, \xi)$  muss nicht für alle  $\xi \in X$  existieren; oft nur für Unterraum  $\xi \in Z \subsetneq X$
  - $\xi \mapsto \delta \mathcal{F}(u_0, \xi)$  muss nicht stetig und linear sein.
- Gâteaux-Differenzierbarkeit in Literatur *nicht* einheitlich definiert.

**Beispiel 2.4.**  $\mathcal{F} : u \mapsto \int_0^T u(\tau) d\tau$ ;  $\mathcal{F} : X := C[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$D\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F} \forall u_0 \in X$ , da linear. □

**Beispiel 2.5.**  $\mathcal{F} : u \mapsto \int_0^T u^2(\tau) d\tau$  auf  $X = C[0, T]$  ist Gâteaux (+Fréchet) differenzierbar:

$$\mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\xi) = \int_0^T (u_0^2 + \varepsilon^2\xi^2 + 2\varepsilon u_0\xi) d\tau$$

$$l(\xi) := 2 \int_0^T u_0\xi d\tau \Rightarrow l \in X'$$

$$\frac{|\mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\xi) - \mathcal{F}(u_0) - \varepsilon l(\xi)|}{\varepsilon} = \varepsilon \int_0^T \xi^2(\tau) d\tau$$
□

Referenzen: [GH] §1.1, [Se] §2, [Ju] §1

## 2.2 Stationäre Punkte von Variationsintegralen

generelle Annahmen für §2.2:

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt;  $u \in X := C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$

$1\text{-Graph}(u) := \{(x, u(x), \underbrace{Du(x)}_{\text{Jacobi Matrix}}) \mid x \in \underbrace{\overline{\Omega}}_{\text{kompakt}}\} \dots$  kompakt

Sei  $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn}$  offen, und sei Lagrange Funktion  $F \in C^1(V, \mathbb{R})$ .

Sei  $U = \{u \in X \mid 1\text{-Graph}(u) \subset V\}$  (um  $F(x, u(x), Du(x))$  definieren zu können).

Definiere *Variationsintegral*

$$\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx$$

**Lemma 2.1.**  $\forall u_0 \in U, \forall \xi \in X$  gilt:  $\delta\mathcal{F}(u_0, \xi)$  existiert.

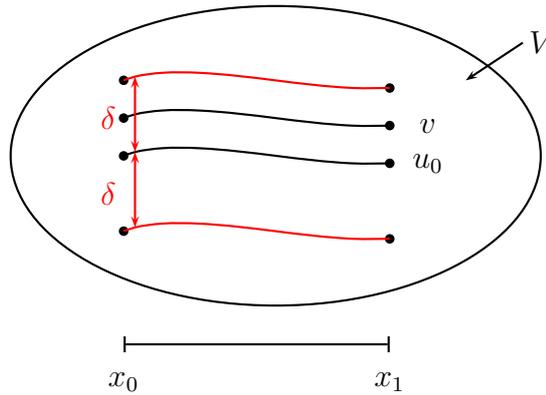


Abbildung 2.1: 0-Graph für  $n = N = 1$ .

*Beweis.* 1-Graph( $u_0$ ) ist kompakt,  $V$  offen

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \quad 1\text{-Graph}(v) \subset V \quad \forall v \in B_\delta(u_0; X) := \{v \in X \mid \|u_0 - v\|_X < \delta\},$$

da  $\|w\|_{C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \Omega} \max(|w(x)|, |Dw(x)|)$

$$\Rightarrow \phi(\varepsilon) := \mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\xi) \text{ ist definiert für jedes (feste) } \xi \in X \text{ und } |\varepsilon| < \varepsilon_0 = \frac{\delta}{1 + \|\xi\|_X}.$$

Da  $\Omega$  beschränkt und  $F \in C^1(V, \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \phi \in C^1(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \quad \Rightarrow \quad \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) = \phi'(0) \text{ existiert.} \quad \blacksquare$$

Berechnung der ersten Variation:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}(u_0, \xi) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(u_0 + \varepsilon\xi) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} F(x, u_0(x) + \varepsilon\xi(x), Du_0(x) + \varepsilon D\xi(x)) \, dx \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial z_i}(x, u_0(x), Du_0(x)) \xi_i(x) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u_0(x), Du_0(x)) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) \, dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\rightarrow \delta\mathcal{F}(u_0, \xi)$  ist (bez.  $\xi$ ) lineares Funktional auf  $X$ .

**Beispiel 2.6.** Sei  $N = 1$ . Dirichlet-Integral  $\mathcal{F}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx$ ,

$$\text{also } F(x, z, p) = \frac{1}{2} |p|^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_j} = p_j$$

$$\delta\mathcal{F}(u, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi dx \quad \square$$

Anwendung: Sei  $u(x)$  ein Potential  $\rightarrow$

$-\nabla u$  ... Kraftfeld  $\rightarrow \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2$  ... Energiedichte des Kraftfeldes,  $\mathcal{F}(u)$  ... totale potentielle Energie des Potentials/Kraftfeldes

physikalische Kraftfelder minimieren die darin gespeicherte Energie, also  $\mathcal{F}(u) \rightarrow \min$ .

**Beispiel 2.7.** Sei  $N = 1$ . Oberfläche  $O(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$ , also

$$F(x, z, p) = \sqrt{1 + |p|^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_j} = \frac{p_j}{\sqrt{1 + |p|^2}}$$

$$\Rightarrow \delta O(u, \xi) = \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \xi}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx \quad \square$$

**Definition 2.5.** Sei  $C \subset U \subset X = C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ . Dann heißt  $u \in C$

a) eine schwache (lokale) Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in  $C$ , falls  $\exists \delta_0 > 0$  mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in C \cap B_{\delta_0}(u; X).$$

b) eine starke (lokale) Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in  $C$ , falls  $\exists \delta_0 > 0$  mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in C \cap B_{\delta_0}(u; C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N))$$

typische Bsp. für  $C$ :

- $C = U$  : keine Einschränkung  $\rightarrow$  natürliche Randbedingung für  $u$
- $C = \{u \in U \mid u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega\}$ : Dirichlet Randbedingung
- $C = \left\{u \in U \mid \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega\right\}$ : Neumann Randbedingung

**Bemerkung 2.6.** Für  $\xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$  gilt auf  $\partial\Omega$  für diese  $C$ :

$$(u + \xi)(x) = u(x), \quad D(u + \xi)(x) = Du(x) \\ \Rightarrow u \in C \quad \Rightarrow \quad u + \xi \in C \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

**Lemma 2.2.** Sei  $u$  schwache Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in einer Menge  $C \subset U \subset X$ , und sei  $u + \xi \in C \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

$$\Rightarrow \quad \delta\mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad (2.3)$$

*Beweis.* Laut Def. 2.5:  $\exists \delta_0 > 0$  mit  $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in C \cap B_{\delta_0}(u; X)$ .

Sei  $\xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \Rightarrow u + \xi \in C$  und  $\exists \delta_1 > 0$  mit  $\|\delta_1 \xi\|_X < \delta_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(0) &= \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varepsilon \xi) = \phi(\varepsilon) \quad \text{für } |\varepsilon| < \delta_1 \\ \Rightarrow \phi'(0) &= \delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad (\text{existiert wegen Lemma 2.1}) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Bemerkung 2.7.** Kandidaten für Minimalstellen von  $\mathcal{F}$  sind jene  $u$ , die  $\delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$  erfüllen. Diese *notwendige Bedingung* kann als Differentialgl. für  $u$  geschrieben werden:

**Satz 2.1.** *Zusätzlich zu den generellen Annahmen gelte  $\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \in C^1(V)$ .*

*Für eine Funktion  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  gelte*

$$\delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

*Dann erfüllt  $u$  die Euler-Lagrange Gleichung (EL-Gl.) von  $\mathcal{F}$ :*

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(x, u(x), Du(x)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) \right] = 0; \quad x \in \Omega; i = 1, \dots, N$$

*Beweis.* Sei  $\psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}), \xi(x) := \psi(x)e_i$ .

Aus  $\delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0$  folgt mit (2.2):

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial z_i} \psi + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) dx = 0$$

- verwende

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \psi \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \right)}_{\sum_j \text{ ist div}(\dots)} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} + \psi \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}},$$

- Divergenz-Satz und  $\psi|_{\partial \Omega} = 0$  liefert:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial z_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \right) \psi dx = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

- punktweise Gleichung folgt aus nachfolgendem *Fundamental-Lemma der Variationsrechnung*. \blacksquare

**Lemma 2.3** (Fundamentallemma). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$  und*

$$a) \int_{\Omega} f\eta dx \geq 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega), \eta \geq 0,$$

oder

$$b) \int_{\Omega} f\eta dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann gilt  $f \geq 0$  bzw.  $f = 0$ .

c) (Du Bois-Reymond Lemma) Sei  $\Omega$  auch zusammenhängend,  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  und

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \eta}{\partial x_j}(x) dx = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow f = \text{const auf } \Omega.$$

*Beweis.* Es gelte (a), aber es existiere  $x_0 \in \Omega$  mit  $f(x_0) < 0$ .

$\Rightarrow \exists \varepsilon, r > 0$  mit  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$  und  $f(x) < -\varepsilon \quad \forall x \in B_r(x_0)$ .

Wähle

$$\eta(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{r^2-|x-x_0|^2}} & , \quad x \in B_r(x_0) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$\rightarrow \eta \in C_0^\infty(\Omega), \eta \geq 0$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f\eta dx = \int_{B_r(x_0)} f\eta dx < -\varepsilon \int_{B_r(x_0)} \eta dx < 0$$

$\rightarrow$  Widerspruch zu (a), also  $f \geq 0$ .

Wenn (b) gilt, gilt (a) für  $f$  und  $-f$ , also  $f = 0$ .

(c) folgt aus (b) mit partieller Integration. ■

**Bemerkung 2.8.** Lemma 2.3 gilt auch für  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  (siehe [GH] §1.2.3).

Zusammenfassung:

Sei  $F \in C^1, u \in C \subset U \subset X = C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ , und seien

$$Z(u, C) := \{ \xi \in X \mid \exists \varepsilon_0 > 0 : u + \varepsilon \xi \in C \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_0 \}$$

die ‘‘zulässigen Variationsrichtungen’’.

bisher gezeigt:

Wenn  $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \subset Z(u, C)$  und  $u$  schwache Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in  $C$  ist, dann löst  $u$

- die *schwache Form* der EL-Gl:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial z_i}(x, u(x), Du(x)) \xi_i(x) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x) dx = 0$$

$$\forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N);$$

- die *starke Form* der EL-Gl. (falls zusätzlich  $\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \in C^1, u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ):

$$L_F u = 0, \tag{2.4}$$

mit dem *Euler-Operator*  $L_F : C^s(\Omega, \mathbb{R}^N) \rightarrow C^{s-2}(\Omega, \mathbb{R}^N), s \geq 2,$

$$(L_F u)_i(x) = \frac{\partial F}{\partial z_i}(x, u(x), Du(x)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) \right]; \quad i = 1, \dots, N \tag{2.5}$$

**Bemerkung 2.9.** (2.4) ist quasilineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung für  $u$ .

**Beispiel 2.8.** Sei  $N = 1$ . *Dirichlet-Integral*

$$\mathcal{F}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx; \quad F(x, z, p) = \frac{1}{2} |p|^2, \quad \frac{\partial F}{\partial p_j} = p_j$$

$$\Rightarrow L_F u = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] = -\Delta u$$

EL-Gl. = Laplace Gleichung □

**Beispiel 2.9.** Sei  $N = n = 1, F = F(x, p), \Omega = I$ .

$$\Rightarrow \text{EL-Gl: } [F_p(x, u'(x))] = 0, x \in I$$

kann integriert werden (z.B. Brachistochrone). □

**Beispiel 2.10.** Seien  $N = 3, n = 1,$

$$\mathcal{F}(\underbrace{u}_{\in \mathbb{R}^3}) := \int_I \left( \frac{m}{2} |u'(x)|^2 - V(u(x)) \right) dx; \quad m = \text{const}$$

$$\rightarrow F(x, z, p) = \frac{m}{2} |p|^2 - V(z), F_z = -\nabla_z V(z), F_p = mp$$

$$\Rightarrow \text{EL-GL: } \nabla_z V(u(x)) + \frac{d}{dx}(mu'(x)) = 0$$

Variablen-Umbenennung:  $x \mapsto t, u \mapsto x$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\nabla_x V(x)$$

Also: *Newton'sche Gleichung* für Bewegung  $x = x(t)$  einer Punktmasse  $m$  in konservativem Kraftfeld mit Potential  $V(x)$  ist stationärer Punkt des *Wirkungsfunktionals*  $\mathcal{F} = \int E_{\text{kin}}(t) - E_{\text{pot}}(t) dt$  (*Hamiltonsches Prinzip* oder *Prinzip der minimalen Wirkung*).  $\square$

Referenzen: [GH] §1.2, [Se] §5, [vB] §1, [vdM] §1.1, [Ju] §2

## 2.3 Natürliche Randbedingungen

bisherige Variationsrichtungen  $\xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

Frage: Welche Zusatzinformation über  $u$  (im Vergleich zu Satz 2.1) erhält man, falls

$$\delta\mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)? \tag{2.6}$$

**Satz 2.2.** Sei  $\partial\Omega \in C^1$ ,  $F \in C^1(V, \mathbb{R})$ ,  $\frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \in C^1(V)$ ,  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ .

Falls (2.6) gilt, erfüllt  $u$  auf  $\Omega$  die EL-Gleichungen von  $\mathcal{F}$  und auf  $\partial\Omega$  die natürlichen Randbedingungen:

$$\sum_{j=1}^n \nu_j(x) \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad ; i = 1, \dots, N.$$

$\nu(x)$  ... äußerer Normalenvektor an  $x \in \partial\Omega$ .

*Beweis.*

i) Sei zunächst zusätzlich  $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ . Sei  $\xi(x) = \psi(x)e_i$  mit  $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{F}(u, \xi) &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial z_i} \psi + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) dx \\ &\stackrel{\text{Div-Satz}}{=} \int_{\Omega} L_F(u)_i \psi dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n \nu_j(x) \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u(x), Du(x)) \psi(x) dS}_{\in C(\partial\Omega), \text{ da } \partial\Omega \in C^1} \end{aligned}$$

- aus Satz 2.1:  $L_F(u) = 0$ , da  $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ .
- aus Fundamentallemma auf  $\partial\Omega$ :

$$\sum_{j=1}^n \nu_j \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

ii) Für  $u \notin C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ : Divergenz-Satz *nicht* anwendbar.

$\Rightarrow$  approximiere  $\Omega$ :  $\Omega_k \subset\subset \Omega$ ,  $\Omega_k \nearrow \Omega$  mit  $\partial\Omega_k \in C^1$ ,  $\partial\Omega_k \rightarrow \partial\Omega$  in  $C^1$  (d.h. die lokalen Graphen konvergieren) ■

**Beispiel 2.11.**  $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ ,  $N = 1$ ,  $\frac{\partial F}{\partial p_j} = p_j$

natürliche RB = homogene Neumann RB:  $0 = \nu \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ .

Aufgabe: Minimiere  $\mathcal{F}(u)$  in der Menge  $C = C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , also ohne Rand-Einschränkung.

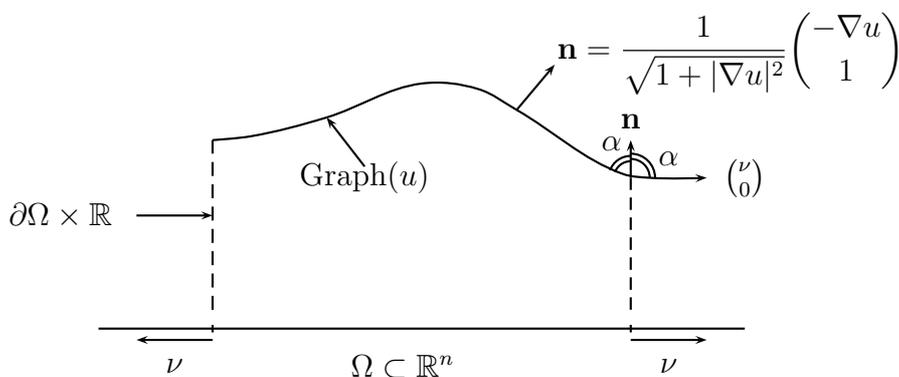
$$\Rightarrow u \text{ erfüllt } \begin{cases} \Delta u = 0 & , \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & , \quad \partial\Omega \end{cases}$$

$\Rightarrow u = \text{const}$  (lt. PDGL-VL) □

**Beispiel 2.12.** Minimalfläche:  $\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$ ,  $N = 1$ ,  $\frac{\partial F}{\partial p_j} = \frac{p_j}{\sqrt{1 + |p|^2}}$

natürliche RB:  $\frac{\nu \cdot \nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0$  auf  $\partial\Omega$

geometrische Interpretation:



Sei  $\alpha$  Winkel zwischen Graph( $u$ ) und Zylinder-Wand  $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ :

$$\cos \alpha = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} = \frac{-\nu \cdot \nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0 \quad \Rightarrow$$

Glatte Minimalflächen ohne Rand-Einschränkung schneiden  $\partial\Omega \times \mathbb{R}$  orthogonal (z.B. Seifenhaut innerhalb eines Zylinders).  $\square$

Referenzen: [GH] §1.2, [Se] §11, [vdM] §1.1

## 2.4 Erdmannsche Gleichung und Eckenbedingung

$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2 dx$  hat auf  $U = \{u \in C^1[0, 1] \mid u(0) = u(1) = 0\}$  kein Minimum, aber auf  $\text{Lip}[0, 1]$  (vgl. Bsp. 1.5). Minima erfüllen f.ü.  $|u'(x)| = 1$ , aber  $u \notin C^2(0, 1)$  erfüllen EL-Gl. *nicht* (überall).

Anwendungen: Aufkreuzen beim Segeln.

Ziel: für  $n = 1$ : notwendige Bedingungen für Minimierer von

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx,$$

$F \in C^1(I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), I = [a, b]$ , auf

$$D^1(I, \mathbb{R}^N) := \{u \in C(I, \mathbb{R}^N) \mid u|_{[t_j, t_{j+1}]} \in C^1 \forall j = 0, \dots, k \\ \text{mit } a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = b\} \subset \text{Lip}[a, b].$$

$D^1 \dots$  stückweise  $C^1$ -Funktionen, differenzierbar bis auf endlich viele *Ecken*  $t_1, \dots, t_k$ . Dort existieren zumindest die einseitigen Ableitungen.

**Satz 2.3.** Sei  $u \in D^1(I, \mathbb{R}^N)$  und  $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in C_r$  für ein  $r > 0$ , und

$$C_r := \left\{ v \in D^1(I, \mathbb{R}^N) \mid v(a) = u(a), v(b) = u(b), \sup_I |u - v| < r \right\}.$$

Sei  $x_0 \in (a, b)$  eine Ecke von  $u$ ; setze  $z_0 := u(x_0)$ ,  $p_0^+ := u'(x_0 + 0)$ ,  $p_0^- := u'(x_0 - 0)$ .  
 $\Rightarrow$  folgende zwei Erdmannsche Eckenbedingungen gelten:

a)  $\nabla_p F(x_0, z_0, p_0^-) = \nabla_p F(x_0, z_0, p_0^+)$ ,

b)  $F(x_0, z_0, p_0^-) - p_0^- \cdot \nabla_p F(x_0, z_0, p_0^-) = F(x_0, z_0, p_0^+) - p_0^+ \cdot \nabla_p F(x_0, z_0, p_0^+)$

*Beweis.* a) Laut Erweiterung von Lemma 2.1 auf lokale Minimalstelle  $u \in \text{Lip}[a, b]$  ( $\Rightarrow \exists \delta \mathcal{F}(u, \xi)$ ) und Bem. 2.1:

$$0 = \delta \mathcal{F}(u, \xi) \stackrel{(2.2)}{=} \int_a^b \left[ \nabla_z F(x, u, \underbrace{u'}_{\in L^\infty(a,b)}} \cdot \xi + \nabla_p F(x, u, u') \cdot \xi'(x) \right] dx \quad \forall \xi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$

Mit partieller Integration im 1. Integranden:

$$\int_a^b \underbrace{\left[ - \int_a^x \nabla_z F(t, u(t), u'(t)) dt + \nabla_p F(x, u, u') \right]}_{\in L^\infty(a,b), \text{ st\u00fcckweise stetig}} \cdot \xi'(x) dx = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}^N).$$

Mit einer Variante vom Fundamentallemma (Lemma 2.3c, Bem. 2.8) folgt:  $[...] = \text{konst}$ , also  $\exists c \in \mathbb{R}^N$ :

$$\nabla_p F(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x \underbrace{\nabla_z F(t, u(t), u'(t))}_{\in L^\infty(a,b)} dt \quad \text{f.\u00f6. auf } (a,b). \quad (2.7)$$

(2.7) hei\u00dft *Du Bois-Reymond Gleichung* bzw. *integrierte Form der EL-Gleichung*.

F\u00fcr  $u \in \text{Lip}[a, b]$  ist rechte Seite von (2.7) stetig, also auch  $\nabla_p F(x, u(x), u'(x))$ .  $\Rightarrow$  (a).

b)

- Sei  $\eta \in C_0^\infty(I)$  und  $\tau_\varepsilon(x) := x + \varepsilon \eta(x)$ ,  $x \in I$ ,  $|\varepsilon| < \varepsilon_0 = (1 + \|\eta'\|_\infty)^{-1}$ .

$$\Rightarrow \tau_\varepsilon(x) = x \quad \text{f\u00fcr } x \notin \text{supp } \eta,$$

$$\tau'_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon \eta'(x) \geq 1 - |\varepsilon| \|\eta'\|_\infty > 0 \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \tau_\varepsilon \text{ ist } C^\infty\text{-Diffeomorphismus von } I; \tau_0(x) = x$$

- F\u00fcr  $|\varepsilon|$  klein gilt:  $v_\varepsilon := u \circ \tau_\varepsilon^{-1} \in C_r$ .

$$\text{Es gilt } v'_\varepsilon(x) = u'(\tau_\varepsilon^{-1}(x)) \frac{d\tau_\varepsilon^{-1}}{dx}(x) = \frac{u'(\tau_\varepsilon^{-1}(x))}{1 + \varepsilon \eta'(\tau_\varepsilon^{-1}(x))}.$$

$$\text{Variablentransformation } y = \tau_\varepsilon^{-1}(x) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(v_\varepsilon) &= \int_a^b F(x, u(\tau_\varepsilon^{-1}(x)), v'_\varepsilon(x)) dx \\ &= \int_a^b F(y + \varepsilon \eta(y), u(y), \frac{u'(y)}{1 + \varepsilon \eta'(y)})(1 + \varepsilon \eta'(y)) dy \end{aligned}$$

- Wegen Minimalität von  $u$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(v_\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b F_x(x, u, u') \eta + [F(x, u, u') - \nabla_p F(x, u, u') \cdot u'] \eta' dx \\
 &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \int_a^b \left[ - \int_a^x F_x(t, u(t), u'(t)) dt + F(x, u, u') - (\nabla_p F)(x, u, u') \cdot u' \right] \eta' dx \\
 &\forall \eta \in C_0^\infty(I)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

- aus Lemma 2.3c (für  $f \in L^1(I)$ ): [...] = konst. Also  $\exists c \in \mathbb{R}$ , sodass die *Erdmannsche Gleichung* gilt:

$$F(x, u(x), u'(x)) - u'(x) \cdot \nabla_p F(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x F_x(t, u(t), u'(t)) dt \quad \text{f.ü. auf } I \tag{2.9}$$

Für  $u \in \text{Lip}[a, b]$  ist rechte Seite von (2.9) stetig, also auch die linke Seite. ■

Man beachte die unterschiedlichen Variationen von  $u$  in Beweisteil (a), (b): In (a) additive Variation  $u + \varepsilon \xi$  (wie in Definition von  $\delta \mathcal{F}(u, \xi)$ ). In (b) eine *innere Variation* (durch “Verzerrung” von  $I$ ).

**Bemerkung 2.10.** a) Satz 2.3 gilt sinngemäß auch für  $u, v \in \text{Lip}(I, \mathbb{R}^N)$ : Die beiden Funktionen aus Aussage (a), (b) sind dann auf  $I$  stetig.

b) [...] in (2.8) ist *erstes Integral*, also Erhaltungsgröße für Minimierer.

**Beispiel 2.13.**  $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - 1)^2, F = F(p) = (p^2 - 1)^2, F_p = 4p(p^2 - 1).$

Für  $u \in \text{Lip}[0, 1]$  mit  $|u'| = 1$  f.ü. gilt:

$$F_p(u'(x)) \equiv 0, F(u'(x)) - u'(x) F_p(u'(x)) \equiv 0 \quad \text{auf } I. \quad \square$$

Referenzen: [GH] §1.3.3, [Se] §7, [vdM] §1.2

# 3 Zweite Variation, Konvexität

endlich-dim. Fall:

Sei  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  stationärer Punkt der reellen Fkt.  $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Hesse-Matrix  $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial u^2}(u_0) > 0 \Rightarrow u_0$  ist lokale Minimalstelle.

unendlich-dim. Fall:

Sei  $u_0$  stationärer Punkt von  $\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx$ .

Die positive Definitheit von  $\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \cdot)$ , d.h.

$$\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \xi) > 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in C_0^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$$

ist *nicht* hinreichend dafür, dass  $u_0$  schwache lokale Minimalstelle ist:

**Beispiel 3.1.** Sei  $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^1 x^2 u'(x)^2 + x u'(x)^3 dx$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}(0, \xi) &= 0 \quad \forall \xi \in C_0^1[-1, 1], \\ \delta^2 \mathcal{F}(0, \xi) &> 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in C_0^1[-1, 1], \end{aligned}$$

aber  $u_0 = 0$  ist *nicht* schwache lokale Minimalstelle ( $\rightarrow$  Übung). □

Es sind also zusätzliche Bedingungen an  $\mathcal{F}$  nötig.

Ziel des Kapitels: notwendige bzw. hinreichende Bedingungen bei Minimalstellen

## 3.1 Konvexe Funktionale

Sei  $U \subset X$ ,  $X$  linearer Raum über  $\mathbb{R}$ .

**Definition 3.1.** Ein Funktional  $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex, falls  $U$  konvex ist, und

$$\mathcal{F}((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)\mathcal{F}(u) + \lambda\mathcal{F}(v) \quad \forall u \neq v, \forall 0 < \lambda < 1;$$

strikt konvex, falls " $<$ " gilt.

Die folgenden 2 Sätze liefern *hinreichende Bedingungen* für globale Minimalstellen.

**Satz 3.1.** Sei  $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$  [strikt] konvex,  $u \in U$ .

a) Zu jedem  $v \in U$  existiere ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \lambda(v - u)) \quad \forall 0 \leq \lambda \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$   $u$  ist eine [strikte - also eindeutige] globale Minimalstelle von  $\mathcal{F}$ .

b) Es existiere  $\delta\mathcal{F}(u, v - u) \quad \forall v \in U$ . Dann gilt:

$u$  ist [strikte] globale Minimalstelle von  $\mathcal{F} \Leftrightarrow$

$$\delta\mathcal{F}(u, v - u) = 0 \quad \forall v \in U$$

*Beweis.* a) Sei  $v \neq u$  und (oBdA)  $0 < \varepsilon < 1$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \varepsilon(v - u)) = \mathcal{F}((1 - \varepsilon)u + \varepsilon v) \stackrel{\text{konvex}}{\leq} \mathcal{F}(u) + \varepsilon(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u))$$

$$\Rightarrow 0 \leq \varepsilon(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u)) \Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v)$$

(bei strikter Konvexität “<”)

b) “ $\Rightarrow$ ” lt. §2.1

“ $\Leftarrow$ ” Sei  $u \neq v \in U$ ,  $\xi := v - u$ ;  $\delta\mathcal{F}(u, \xi)$  existiert.

$$\Rightarrow \exists 0 < \varepsilon_0 \leq 1 \text{ mit } u + \varepsilon\xi \in U \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_0,$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{F}(u, \xi) \stackrel{\varepsilon \searrow 0}{\leq} \frac{\mathcal{F}(\overbrace{u + \varepsilon\xi}^{(1-\varepsilon)u + \varepsilon v}) - \mathcal{F}(u)}{\varepsilon} \stackrel{\text{konvex}}{\leq} \\ &\leq \frac{\mathcal{F}(u) + \varepsilon(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u)) - \mathcal{F}(u)}{\varepsilon} = \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v).$$

Bei strikter Konvexität ist  $u$  strikte globale Minimalstelle, sonst liefert

$$\mathcal{F}\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{\mathcal{F}(u) + \mathcal{F}(v)}{2} = \mathcal{F}(u)$$

einen Widerspruch. ■

**Lemma 3.1.** Sei  $U \subset X$ ,  $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in U$  und  $\xi \in X$ , sodass  $\exists \delta^k \mathcal{F}(u, \xi)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  fest.

Dann gilt:

a)

$$\exists \delta^k \mathcal{F}(u, \mu\xi) \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

b)

$$\delta^k \mathcal{F}(u, \mu\xi) = \mu^k \delta^k \mathcal{F}(u, \xi) \quad (3.1)$$

*Beweis.* -Idee: Sei  $\mu \neq 0$  oBdA.

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u + \varepsilon(\mu\xi)) = \mathcal{F}(\underbrace{u + (\varepsilon\mu)\xi}_{\in U \text{ für } |\varepsilon| \text{ klein}})$$

■

**Satz 3.2.** Sei  $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U$  konvex.  $\forall u, v \in U$  mit  $u \neq v$  gelte:  $\delta^2 \mathcal{F}(u, v-u)$  existiert, und

$$\delta^2 \mathcal{F}(u, v-u) \geq 0 \quad [ > 0 ]$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$  ist [strikt] konvex.

*Beweis.* Seien  $u, v \in U$  mit  $\xi := v - u \neq 0$ . Definiere

$$\begin{aligned} \phi &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \\ \lambda &\mapsto \mathcal{F}((1-\lambda)u + \lambda v) \end{aligned}$$

Da  $\phi(\lambda) = \mathcal{F}(u + \lambda(v-u)) = \mathcal{F}(v + (1-\lambda)(u-v))$  und da  $\delta \mathcal{F}(u, v-u)$  bzw.  $\delta \mathcal{F}(v, u-v) \quad \forall u, v, \in U$  existieren, gilt:  $\phi \in C[0, 1]$ .

Es gilt sogar  $\phi \in C^1(0, 1)$ , da:

Für festes  $\lambda_0 \in (0, 1)$  gilt:  $\phi(\lambda_0 + \lambda) = \mathcal{F}((u + \lambda_0\xi) + \lambda\xi)$  mit  $\xi = \frac{1}{1-\lambda_0}(v - (u + \lambda_0\xi))$ , sodass  $\exists \delta^2 \mathcal{F}(\underbrace{u + \lambda_0\xi}_{=: \tilde{u}}, \xi) = \delta^2 \mathcal{F}(\tilde{u}, \frac{1}{1-\lambda_0}(v - \tilde{u}))$  (mit Lemma 3.1).

Also:  $\phi \in C^1(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$  für ein  $\varepsilon > 0$ .

Weiters:

$$\begin{aligned} \phi''(\lambda_0) &= \delta^2 \mathcal{F}(u + \lambda_0\xi, \xi) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} \frac{1}{(1-\lambda_0)^2} \delta^2 \mathcal{F}(u + \lambda_0\xi, v - (u + \lambda_0\xi)) \geq 0 \quad [ > 0 ] \end{aligned}$$

Also:  $\phi$  [strikt] konvex, und daher  $\mathcal{F}$  [strikt] konvex. ■

**Beispiel 3.2.** Seien  $X = C^1[a_1, b_1], 0 < g \in C(a_1, b_1) \cap L^1(a_1, b_1)$ ,

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a_1}^{b_1} g(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} dx$$

auf  $U = \{u \in X \mid u(a_1) = a_2, u(b_1) = b_2\}$ .

Für  $u \neq v \in U$  existiert  $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi)$  mit  $\xi := v - u$ ,

$$\delta \mathcal{F}(u, \xi) = \int_{a_1}^{b_1} g(x) \frac{u'(x)\xi'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} dx, \quad \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = \int_{a_1}^{b_1} g(x) \frac{\xi'(x)^2}{(1+u'(x)^2)^{3/2}} dx \geq 0.$$

$\xi' \neq 0$ , da sonst wegen der RBen  $u = v$  folgte.

$\Rightarrow \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) > 0$ , also  $\mathcal{F}$  strikt konvex lt. Satz 3.2.

Lt. Satz 3.1: Ein stationärer Punkt von  $\mathcal{F}(u)$  ist die eindeutige globale Minimalstelle.

Anwendung: Brachistochrone mit  $g(x) := (2gx)^{-1/2}$ , Bsp. 2.2 □

**Beispiel 3.3.** Betrachte  $\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(x, Du(x)) dx$  mit  $F \in C^2(V, \mathbb{R})$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{Nn}$ .

$$\Rightarrow \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}}(x, Du(x)) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} dx.$$

$F$  heißt *superelliptisch*, falls

$$\sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}}(x, p) \pi_{ij} \pi_{kl} > 0 \quad \forall (x, p) \in V, \forall 0 \neq \pi = (\pi_{ij}) \in \mathbb{R}^{Nn}. \quad (3.2)$$

(3.2) ist äquivalent zur Konvexität der Funktion  $p \mapsto F(x, p) \quad \forall x \in \Omega$  fest.

Sei  $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U$  konvex, und  $F$  erfülle (3.2).

a)  $\mathcal{F}$  ist dann lt. Satz 3.2 konvex.

b) Sei  $U$  so, dass  $\forall u, v \in U$  mit  $u \neq v$  gilt:  $D(u - v) \neq 0$ .  
Dann ist  $\mathcal{F}$  strikt konvex. □

Referenzen: [Se] §2-4, [GH] §4.2

## 3.2 Die Legendre-Hadamard-Bedingung

Ziel: notwendige/hinreichende Bedingungen an  $\delta^2 \mathcal{F}$  bzw.  $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$  bei Minimalstellen.

generelle Annahmen für §3.2:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt;  $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn}$  offen;

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx$$

auf  $U = \{u \in X := C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N) \mid 1 - \text{Graph}(u) \subset V\}$ ,  $F \in C^2(V, \mathbb{R})$ .

Analog zu Lemma 2.1, 2.2 gilt:

**Lemma 3.2.** a)  $\forall u \in U, \forall \xi \in X$  gilt:  $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi)$  existiert und

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = & \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^N \left[ \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_k}(x, u, Du)}_{=: a^{ik}(x)} \xi_i \xi_k \right. \\ & + 2 \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial p_{kj}}(x, u, Du)}_{=: b_j^{ik}(x)} \xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \\ & \left. + \sum_{j,l=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}}(x, u, Du)}_{=: c_{jl}^{ik}(x)} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} \right] dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

b) Sei  $u$  schwache Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in einer Menge  $C \subset X$ , und sei  $u + \xi \in C \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

$$\Rightarrow \quad \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad (3.4)$$

Diese *notwendige Bedingung* für Minimalstellen  $u$  ist in integraler Form; nun eine *punktweise* notwendige Bedingung für  $u(x)$ :

**Satz 3.3.** Sei  $u \in U$  und es gelte

$$\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Dann erfüllt  $u$  auf  $\Omega$  die (notwendige) Legendre-Hadamard-Bedingung (LHB):

$$\sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}}(x, u(x), Du(x)) \chi_i \chi_k \eta_j \eta_l \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \forall \chi \in \mathbb{R}^N, \forall \eta \in \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

**Bemerkung 3.1.** Speziell  $N = 1$  (d.h.  $u$  skalar):

$$(3.5) \Leftrightarrow \text{Hesse-Matrix } \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_l}(x, u(x), \nabla u(x)) \geq 0, \quad \text{also } F \text{ an } u \text{ konvex bez. } p \in \mathbb{R}^n.$$

Gilt analog auch für  $n = 1$ .

*Beweis.* (von Satz 3.3)

Idee: Der 3. Term von (3.3) ist dominant für oszillatorische Funktionen  $\xi(x)$ .

- Ziel: Wir zeigen (3.5) für ein festes  $x_0 \in \Omega$ .

Sei oBdA  $x_0 = 0 \in \Omega$ ; sei  $K = B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$  für ein  $\varepsilon > 0$ .

Für  $\xi \in C_0^\infty(K, \mathbb{R}^N)$  setze

$$\xi_\lambda(x) := \lambda^{1-\frac{n}{2}} \xi\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad 0 < \lambda < 1.$$

- Aus  $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi_\lambda) \geq 0$  folgt mit  $x = \lambda y$ :

$$\int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^N \left[ \lambda^2 a^{ik}(\lambda y) \xi_i \xi_k + 2\lambda \sum_{j=1}^n b_j^{ik}(\lambda y) \xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(\lambda y) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} \right] dy \geq 0$$

- $\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\xi_k}}{\partial x_l} dy \geq 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(K, \mathbb{R}^N) \quad (3.6)$$

(d.i. reelle Vektorungleichung)

- Wegen  $c_{jl}^{ik} = c_{ij}^{ki}$  gilt  $\forall z_j^i := \underbrace{\alpha_j^i}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{i}_{=\sqrt{-1}} \underbrace{\beta_j^i}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{C}$ :

$$\sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) z_j^i \overline{z_l^k} = \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) \alpha_j^i \alpha_l^k + \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) \beta_j^i \beta_l^k$$

$\Rightarrow$  (3.6) gilt auch  $\forall \xi \in C_0^\infty(K, \mathbb{C}^N)$ .

- wähle speziell  $\xi(x) = t^{-1} \varphi(x) e^{itx} \cdot \underbrace{\eta}_{\in \mathbb{R}^n} \underbrace{\chi}_{\in \mathbb{R}^N}$  mit  $\varphi \in C_0^\infty(K)$  mit  $\int \varphi^2 dx > 0$ ,  $t > 0$ :

$$0 \leq \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) \chi_i \chi_k \left( t^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + \varphi^2 \eta_j \eta_l \right) dx$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \varphi^2 dx \right) \sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n c_{jl}^{ik}(0) \chi_i \chi_k \eta_j \eta_l.$$

Also gilt (3.5) für  $x_0 = 0$ . ■

**Definition 3.2.**  $u \in X$  erfüllt die strikte (oder hinreichende) Legendre-Hadamard-Bedingung (sLHB), wenn  $\exists \lambda > 0$ :

$$\sum_{i,k=1}^N \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_{ij} \partial p_{kl}}(x, u(x), Du(x)) \chi_i \chi_k \eta_j \eta_l \geq \lambda |\chi|^2 |\eta|^2 \quad \forall x \in \Omega, \chi \in \mathbb{R}^N, \eta \in \mathbb{R}^n. \quad (3.7)$$

**Satz 3.4.** Sei  $n = 1$  oder  $N = 1$  und  $F = F(x, p)$ .

$u \in X = C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  genüge (3.7) für ein  $\lambda > 0$ .  $\Rightarrow \exists \delta > 0$  sodass:

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \xi) \quad \forall \|\xi\|_X < \delta, \quad \text{für die } \delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \text{ gilt.}$$

*Beweis.* Sei  $N = 1$ :

- Laut Lemma 2.1:  $\exists \varepsilon > 0$  mit  $1 - \text{Graph}(v) \subset V \quad \forall v \in B_\varepsilon(u; X)$  und  $\mathcal{F}$  ist definiert auf  $B_\varepsilon(u; X) \subset U$ .
- wähle festes  $\xi$  lt. VS.
- für  $\delta < \varepsilon$  definiere  $\phi(\theta) := \mathcal{F}(u + \theta\xi) \in C^2[-1, 1]$  (laut Lemma 3.2 a).
- da  $\phi'(0) = \delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0$ :

$$\mathcal{F}(u + \xi) = \phi(1) = \phi(0) + \int_0^1 \phi'(t) dt = \mathcal{F}(u) + \int_0^1 \int_0^t \phi''(s) ds dt \quad (3.8)$$

- aus (3.3) mit  $N = 1$ ,  $F = F(x, p)$ :

$$\begin{aligned} \phi''(s) &= \delta^2 \mathcal{F}(u + s\xi, \xi) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j,l=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_l}(x, \nabla u(x) + s\nabla \xi(x)) \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_l} dx \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \int_{\Omega} (\lambda - K_\xi(s, x)) |\nabla \xi(x)|^2 dx \end{aligned}$$

$$\text{mit } K_\xi(s, x) = \sum_{j,l=1}^n \left| \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_l}(x, \nabla u(x) + s\nabla \xi(x)) - \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_l}(x, \nabla u(x)) \right|.$$

In (\*) verwendet: (3.7) für  $N = 1, s = 0$ ; und  $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right| \leq |\nabla \xi|$  im Term mit  $K_\xi$ .

- $\frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_l}$  ist glm. stetig auf Kompaktum (da beschränkt und abgeschlossen;  $\nabla u$  glm. stetig auf  $\bar{\Omega}$ ):

$$\left\{ (x, p) \mid x \in \bar{\Omega}, |\nabla u(x) - p| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow \lambda - K_\xi(s, x) \geq 0 \quad \forall 0 \leq s \leq 1$  und  $x \in \Omega$ , falls  $\delta \geq |\nabla \xi|$  klein genug  $\Rightarrow \mathcal{F}(u + \xi) \geq \mathcal{F}(u)$  aus (3.8).

n=1: analog ■

**Folgerung 3.1.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.4 gilt:*

$u$  ist stationärer Punkt von  $\mathcal{F} \iff u$  ist schwache lokale Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  (siehe Def. 2.2, 2.5a).

(“ $\Leftarrow$ ” folgt aus Lemma 2.1 und Bemerkung 2.1).

**Beispiel 3.4.** Satz 3.4 gilt i.A. *nicht* für  $F = F(x, z, p)$ :

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^{2\pi} (u'(x)^2 - u(x)^2) dx,$$

$$n = N = 1, F(z, p) = p^2 - z^2, \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 2 > 0,$$

also gilt (3.7).

Aber:  $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = \dots = 2\mathcal{F}(\xi) \quad \forall u$

$$\Rightarrow \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) < 0 \quad \text{z.B. für } \xi(x) = \sin \frac{x}{2}$$

Also notwendige Bedingung für Minimalstelle verletzt. □

Referenzen: [Se] §4,8; [GH] §4.1, [Gr] §2.3

### 3.3 Jacobi-Bedingung, konjugierte Punkte

Ziel: notwendige bzw. hinreichende Jacobi Bedingung für Minimalstellen von  $\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx$  (nur für  $n = 1$  aber  $F = F(x, z, p)$  zulässig – im Gegensatz zu Satz 3.4).

generelle Annahmen für §3.3:

$V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  offen,  $F \in C^2(V, \mathbb{R})$

Sei  $u \in X := C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$  geg.,  $1\text{-Graph}(u) \subset V$ .

Sei  $C_\delta := \{v \in X \mid v(a) = u(a), v(b) = u(b), \|u - v\|_X < \delta\}$  für  $\delta > 0$ .

**Lemma 3.3.** *Sei  $u$  schwache lokale Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in  $C_\delta \Rightarrow$*

$$a) \delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X_0 := C_0^1([a, b], \mathbb{R}^N) := \{v \in C^1([a, b], \mathbb{R}^N) \mid v(a) = v(b) = 0\} .$$

*(analog Lemma 2.2)*

b)  $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in X_0$

(analog Lemma 3.2b)

c)  $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, u(x), u'(x)) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

(analog Bem. 3.1)

zuerst Strategie für  $n = N = 1$ :

$u$  erfülle die sLHB  $F_{pp}(x, u(x), u'(x)) \geq \lambda > 0$ .

Ziel: Zeige  $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq [>]0 \quad \forall \xi \in X_0$  durch Darstellung als vollständiges Quadrat:

- Aus Lemma 3.2 (a) mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) &= \int_a^b \xi^2 \left\{ \underbrace{F_{zz}(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} [F_{zp}(x, u(x), u'(x))]}_{=:\alpha(x)} \right\} \\ &\quad + \xi'^2 F_{pp}(x, u(x), u'(x)) dx \\ &\stackrel{w \text{ bel.,}}{\xi \in X_0}{=} \int_a^b \xi^2 \alpha + \xi'^2 F_{pp} - (w \xi^2)' dx \\ &= \int_a^b \underbrace{F_{pp}}_{\geq \lambda} \left[ \xi'^2 - 2 \frac{w}{F_{pp}} \xi \xi' + \underbrace{\frac{\alpha - w'}{F_{pp}}}_{\stackrel{!}{=} w^2 / F_{pp}^2} \xi^2 \right] dx \end{aligned}$$

- für vollständiges Quadrat erfülle  $w$  die *Riccati-Gleichung*

$$w^2 = F_{pp}(x, u(x), u'(x))(\alpha(x) - w') \quad \text{auf ganz } [a, b] \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = \int_a^b F_{pp} \left[ \xi' - \frac{w}{F_{pp}} \xi \right]^2 dx \geq 0 \quad \forall \xi \in X_0$$

- globale Lösbarkeit von (3.9): Nach Substitution  $w =: \frac{\varphi'}{\varphi} F_{pp}$  erfüllt  $\varphi$  die lineare *Jacobi-Gleichung*:

$$[\varphi' F_{pp}(x, u(x), u'(x))] - \alpha(x) \varphi = 0 \quad \text{auf } [a, b]$$

$\Rightarrow w$  existiert auf ganz  $[a, b]$  unter der *Bedingung*

$$\varphi(x) \neq 0 \quad \text{auf ganz } [a, b].$$

- und dann:  $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi$

nun  $n = 1, N \in \mathbb{N}$ :

**Definition 3.3.** Sei  $u \in X$  fest. Für  $\xi \in X_0$  heißt

$$Q(\xi) := \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \stackrel{(3.3)}{=} \int_a^b Q(x, \xi(x), \xi'(x)) dx$$

das akzessorische Integral von  $\mathcal{F}$  bezüglich  $u$  mit der akzessorischen Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} Q(x, z, p) &= z^T \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(x, u(x), u'(x))}_{=: A(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}} z \\ &\quad + 2z^T \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p}(x, u(x), u'(x))}_{=: B(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}} p + p^T \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, u(x), u'(x))}_{=: C(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}} p, \end{aligned} \quad (3.10)$$

also quadratische Form in  $(z, p)$ .

**Definition 3.4.** Eine Fkt.  $\varphi \in X$  heißt Jacobi-Feld längs  $u$ , wenn  $\psi := B^T \varphi + C \varphi' \in X$ , mit

$$\psi' - A\varphi - B\varphi' \equiv 0 \quad \text{auf } [a, b];$$

also:  $\varphi$  erfüllt die EL-Gl. von  $Q$ , d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} L_{Q\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial Q}{\partial p}(x, \varphi, \varphi') \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial z}(x, \varphi, \varphi') \\ &= \frac{d}{dx} \left( \underbrace{B^T \varphi + C \varphi'}_{=\psi} \right) - A\varphi - B\varphi'. \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.11) heißt Jacobi-Gleichung von  $\mathcal{F}$  bezgl.  $u$ .

**Bemerkung 3.2.** Ist  $C(x)$  invertierbar  $\forall x \in [a, b]$ , so ist Def. 3.4 äquivalent dazu, dass  $(\varphi, \psi)$  folgendes lineares DGL-System 1. Ordnung löst:

$$\begin{cases} \varphi' = C^{-1}\psi - C^{-1}B^T\varphi, \\ \psi' = (A - BC^{-1}B^T)\varphi + BC^{-1}\psi. \end{cases} \quad (3.12)$$

$\Rightarrow$  Jacobi-Feld  $\varphi$  existiert.

**Definition 3.5.** a) Ein Punkt  $\tilde{a} \in (a, b)$  heißt konjugiert zu  $a$  (bezgl.  $\mathcal{F}$  und  $u$ ), wenn  $\exists$  Jacobi-Feld  $0 \neq \varphi \in X$  längs  $u$  mit  $\varphi(a) = \varphi(\tilde{a}) = 0$ .

b)  $u$  erfüllt die [strikte] Jacobi-Bedingung (JB, [sJB]), wenn  $\nexists$  zu  $a$  konjugierter Pkt. in  $(a, b)$ ,  $[(a, b)]$ .

**Satz 3.5.**  $u$  erfülle die *sLHB*:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, u(x), u'(x)) > 0 \quad \forall x \in [a, b]. \quad (\text{also } C(x) \text{ invertierbar; } \exists \varphi)$$

Dann gilt

- a) Ist  $\mathcal{Q}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in X_0 \Rightarrow u$  erfüllt *JB*.
- b) Ist  $\mathcal{Q}(\xi) > 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in X_0 \Rightarrow u$  erfüllt *sJB*.

*Beweis.* indirekt:  $\exists$  Jacobi-Feld  $0 \neq \varphi \in X$  mit  $\varphi(a) = \varphi(\tilde{a}) = 0$  für ein  $a < \tilde{a} \leq b$ .

Definiere die stückweise  $C^1$ -Fkt:

$$\xi_0(x) := \begin{cases} \varphi(x), & a \leq x \leq \tilde{a} \\ 0, & \tilde{a} \leq x \leq b \end{cases}.$$

Für  $a \leq x \leq \tilde{a}$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x, \xi_0, \xi'_0) &= \varphi^T[A(x)\varphi + B(x)\varphi'] + \varphi^T[B^T(x)\varphi + C(x)\varphi'] \\ &\Rightarrow \int_a^{\tilde{a}} \varphi^T[B^T\varphi + C\varphi'] dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\varphi^T[B^T\varphi + C\varphi'] \Big|_{x=a}^{x=\tilde{a}}}_{=0, \text{ da } \varphi(a) = \varphi(\tilde{a}) = 0} - \int_a^{\tilde{a}} \varphi^T[B^T\varphi + C\varphi']' dx \\ &\Rightarrow \mathcal{Q}(\xi_0) = \int_a^{\tilde{a}} \varphi^T \{A\varphi + B\varphi' - [B^T\varphi + C\varphi']'\} dx = \frac{1}{2} \int_a^{\tilde{a}} \varphi^T L_Q \varphi dx \stackrel{(3.11)}{=} 0 \end{aligned}$$

a) Sei  $a < \tilde{a} < b$ . Laut VS:

$$0 = \mathcal{Q}(\xi_0) \leq \mathcal{Q}(\xi) \quad \forall \xi \in X_0. \quad (3.13)$$

(3.13) gilt auch  $\forall \xi \in D_0^1([a, b], \mathbb{R}^N) := \{v \in D^1([a, b], \mathbb{R}^N) \mid v(a) = v(b) = 0\}$ , da  $\overline{X_0} = H_0^1((a, b), \mathbb{R}^N)$  (Abschluss bez.  $H_0^1(a, b)$ -Norm;  $\mathcal{Q}$  ist stetiges Funktional auf  $H_0^1(a, b)$ ) und  $D_0^1([a, b], \mathbb{R}^N) \subset H_0^1((a, b), \mathbb{R}^N)$ .

Also:  $\xi_0$  ist schwache lokale Minimalstelle von  $\mathcal{Q}$  in  $D_0^1$ .

Laut Satz 2.3 gilt die 1. Erdmannsche Eckenbedingung:

$$\nabla_p \mathcal{Q}(x, \xi_0(x), \xi'_0(x)) = 2B^T(x)\xi_0(x) + 2C(x)\xi'_0(x)$$

ist stetig an  $x = \tilde{a}$ ,

Laut VS:  $C^{-1}(x)$  stetig  $\Rightarrow \xi'_0$  an  $\tilde{a}$  stetig, also  $\varphi'(\tilde{a}) = 0$ .

Laut Def. 3.4:  $\psi(\tilde{a}) = 0 \Rightarrow$  Lösung von (3.12) ist  $\varphi \equiv \psi \equiv 0 \Rightarrow$  Widerspruch zu  $\varphi \neq 0$ .

b) Sei  $\tilde{a} = b$ . Es gilt  $0 \neq \xi_0 = \varphi \in X_0$  und  $\varphi \neq 0$ . Aber  $\mathcal{Q}(\xi_0) = 0$  ist Widerspruch zur VS  $\mathcal{Q}(\xi_0) > 0$ . ■

**Folgerung 3.2.** Ist  $u$  schwache lokale Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in  $C_\delta$ , und gilt die sLHB, so erfüllt  $u$  die JB; diese ist also notwendig.

**Beispiel 3.5.** Sei  $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_0^b u'(x)^2 - u(x)^2 dx$  ( $N = 1$ ).

$$\mathcal{Q}(\xi) = \delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) = 2\mathcal{F}(\xi), \quad F(x, z, p) = \frac{1}{2}(p^2 - z^2).$$

$A = -1, B = 0, C = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 1 > 0$ , also sLHB erfüllt.

• Jacobi-Gleichung:

$$0 = -\frac{1}{2} L_Q \varphi = \frac{d}{dx}(\varphi') + \varphi = \varphi'' + \varphi$$

• Alle Lösungen  $\varphi$  sind Jacobi-Felder.

• ges: konjugierte Punkte zu  $a = 0$ :

Alle Lösungen  $\varphi \neq 0$  mit  $\varphi(0) = 0$  sind:

$$\varphi(x) = \alpha \sin x, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

kleinster konj. Pkt:  $\tilde{a} = \pi$

Sei  $b > [=]\pi$ : JB [sJB] ist *nicht* erfüllt  $\Rightarrow$  lt. Satz 3.5  $\exists \xi \in X_0$  mit  $\mathcal{Q}(\xi) < [=]0$ :

Für  $\xi(x) := \sin \frac{\pi x}{b}$  gilt

$$\mathcal{Q}(\xi) = \dots = \int_0^\pi \frac{\pi}{b} \cos^2 y - \frac{b}{\pi} \sin^2 y dy = \left( \frac{\pi}{b} - \frac{b}{\pi} \right) \frac{\pi}{2} \stackrel{[=]}{<} 0$$

Sei  $0 < b < \pi$ : sJB ist erfüllt. Für hinreichend kleines  $\beta > 0$  gilt

$$\varphi(x) := \sin x + \beta \cos x \neq 0 \quad \forall x \in [0, b]$$

$\Rightarrow w := \frac{\varphi'}{\varphi}$  löst die *Riccati-Gleichung* (vgl. (3.9)) :

$$w' + 1 + w^2 = 0 \quad \text{auf } [a, b]. \tag{3.14}$$

$\Rightarrow \forall \xi \in X_0$  gilt:

$$\begin{aligned} \xi'^2 - \xi^2 - (w\xi^2)' &= \xi'^2 - \xi^2 - w'\xi^2 - 2w\xi\xi' \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \xi'^2 + w^2\xi^2 - 2w\xi\xi' = (\xi' - w\xi)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Q}(\xi) = \int_0^b \xi'^2 - \xi^2 dx \stackrel{\xi \in X_0}{=} \int_0^b \xi'^2 - \xi^2 - (w\xi^2)' dx = \int_0^b (\xi' - w\xi)^2 dx \geq 0,$$

also  $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in X_0$ . D.i. notwendige Bedingung für schwache Minimalität von  $u$  in  $C_\delta$  (siehe Lemma 3.3 b).

$$\delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X_0 \Leftrightarrow u + u'' = 0 \quad (\text{EL-Gl.}) \quad (3.15)$$

Betrachte z.B.  $\mathcal{F}(u) \rightarrow \min!$  mit RBen  $u(0) = 0, u(b) = 1$  mit  $0 < b < \pi$ .

$$\Rightarrow \text{eindeutige Lösung von (3.15): } u_0(x) = \frac{\sin x}{\sin b}.$$

Laut Satz 3.6 (unten):  $u_0$  ist strikte schwache lokale Minimalstelle von  $\mathcal{F}$ .  $\square$

nächstes Ziel: sLHB + sJB sind hinreichend für strikte schwache lokale Minimalstelle.

Vorbereitung:

**Lemma 3.4.** *Es gebe ein  $S = S(x, z) \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N)$  und  $\delta > 0$ , sodass*

$$\begin{aligned} F(x, u(x), u'(x)) - S_x(x, u(x)) - (\nabla_z S)(x, u(x)) \cdot u'(x) \\ \leq F(x, z, p) - S_x(x, z) - (\nabla_z S)(x, z) \cdot p \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\forall (x, z, p) \in [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \text{ mit } |z - u(x)| + |p - u'(x)| < \delta.$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(u + \xi) \quad \forall 0 \neq \xi \in X_0 \text{ mit } \|\xi\|_\infty + \|\xi'\|_\infty < \delta.$$

Es gilt sogar “<”, falls in (3.16) “<” gilt  $\forall z \neq u(x)$ .

*Beweis.* Sei  $v := u + \xi$  mit  $\|\xi\|_\infty + \|\xi'\|_\infty < \delta$ .  $\Rightarrow$

$$F(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} S(x, u(x)) \stackrel{(3.16)}{\leq} F(x, v(x), v'(x)) - \frac{d}{dx} S(x, v(x)) \quad \forall x \in [a, b] \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx - S(x, u(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \leq \int_a^b F(x, v(x), v'(x)) dx - S(x, v(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \quad (3.18)$$

Bei der Zusatzannahme “<” in (3.16) und  $\xi \neq 0$  gilt in (3.17) “<” auf offenem Teilintervall und “<” in (3.18).

$u(a) = v(a), u(b) = v(b) \Rightarrow$  Behauptung  $\blacksquare$

**Lemma 3.5.**  *$u$  erfülle sLHB (d.h.  $C = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}(x, u(x), u'(x)) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ ) und sJB. Definiere folgende Matrizen aus  $C([a, b], \mathbb{R}^{N \times N})$ :*

$$\tilde{A} := -C^{-1} B^T, \quad \tilde{B} = C^{-1}, \quad \tilde{C} = A - B C^{-1} B^T.$$

$\Rightarrow \exists \alpha > 0$  und  $\exists$  punktweise symmetrische Lösung  $W = W^T \in C^1([a, b], \mathbb{R}^{N \times N})$  der Matrix-Riccati-Gleichung.

$$W' + W\tilde{A} + \tilde{A}^T W + W\tilde{B}W - \tilde{C} = -\alpha I \quad \text{auf } [a, b].$$

(Bem.: globale Lösbarkeit folgt aus sJB; vgl. (3.14))

*Beweis.* siehe [Se] §9: Lemma 9.13 + Folgerung 9.14

**Satz 3.6.**  $u$  erfülle  $\delta\mathcal{F}(u, \xi) = 0 \forall \xi \in X_0$ , sLHB und sJB.

$\Rightarrow \exists S \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N)$ , das (3.16) erfüllt (mit Zusatz “<” falls  $z \neq u(x)$ ). Also:  $u$  ist strikte schwache lokale Minimalstelle von  $\mathcal{F}$ .

*Beweis.* Mit  $\alpha > 0$ ,  $W$  aus Lemma 3.5 definiere:

$$\begin{aligned} \pi(x) &:= \nabla_p F(x, u(x), u'(x)) \stackrel{(*)}{=} c + \int_a^x \nabla_z F(t, u(t), u'(t)) dt, \\ S(x, z) &:= \pi(x) \cdot z + \frac{1}{2}(z - u(x))^T W(x) (z - u(x)). \end{aligned}$$

(\*) ... mit (2.7), d.h. integrierter Form der EL-Gleichung.

$$\Rightarrow \pi'(x) = \nabla_z F(x, u(x), u'(x)); \pi \in X; S \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}^N) \quad (3.19)$$

laut generellen Annahmen:  $\exists \delta_0 > 0$ , sodass

$$\begin{aligned} G(x, z, p) &:= F(x, z, p) - S_x(x, z) - \nabla_z S(x, z) \cdot p \\ &= F(x, z, p) - \pi'(x) \cdot z + u'(x)^T W(x) (z - u(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2}(z - u(x))^T W'(x) (z - u(x)) - [\pi(x) + W(x) (z - u(x))] \cdot p \end{aligned}$$

ist def.  $\forall (x, z, p)$  mit  $x \in [a, b]$ ,  $|z - u(x)| + |p - u'(x)| \leq \delta_0$

z.z.:  $\exists 0 < \delta < \delta_0$  mit

$$G(x, u(x), u'(x)) \leq G(x, z, p) \quad \forall (x, z, p) \text{ mit } |z - u(x)| + |p - u'(x)| < \delta, \quad (3.20)$$

und “<”, falls  $z \neq u(x)$ , also VS für Lemma 3.4.

Taylorentwicklung von  $G$ :

$$\begin{aligned} G(x, z, p) &= G(x, u(x), u'(x)) + (\nabla_{(z,p)} G)(x, u(x), u'(x)) \cdot h(x, z, p) \\ &\quad + \int_0^1 (1-t) h(x, z, p)^T \frac{\partial^2 G}{\partial (z,p)^2}(x, (1-t)u(x) + tz, (1-t)u'(x) + tp) h(x, z, p) dt, \end{aligned}$$

mit  $h(x, z, p) := (z - u(x), p - u'(x)) \in \mathbb{R}^{2N}$ . Da

$$\nabla_{(z,p)}G = (\nabla_z F - \pi' - W(p - u') - W'(z - u), \nabla_p F - \pi - W(z - u)), \quad (3.21)$$

gilt:

$$(\nabla_{(z,p)}G)(x, u(x), u'(x)) \stackrel{(3.19)}{\equiv} 0 \quad \text{auf } [a, b] \quad (3.22)$$

Notation:

$$A_G(x) := \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(x, u(x), u'(x)),$$

$$B_G(x) := \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial p}(x, u(x), u'(x)),$$

$$C_G(x) := \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}(x, u(x), u'(x)),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial (z, p)^2}(x, u(x), u'(x)) = \begin{pmatrix} A_G & B_G \\ B_G^T & C_G \end{pmatrix}(x) \stackrel{(3.21)}{\equiv} \begin{pmatrix} A - W' & B - W \\ B^T - W & C \end{pmatrix}(x)$$

Laut Lemma 3.5:

$$\begin{aligned} -\alpha I &= W' + W\tilde{A} + \tilde{A}^T W + W\tilde{B}W - \tilde{C} \\ &= W' - A + (B - W)C^{-1}(B^T - W) \\ \Rightarrow A_G &= A - W' = B_G C^{-1} B_G^T + \alpha I \quad \text{auf } [a, b] \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2N}$  gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} A_G & B_G \\ B_G^T & C_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle A_G \xi, \xi \rangle + \langle B_G \eta, \xi \rangle + \langle B_G^T \xi, \eta \rangle + \langle C_G \eta, \eta \rangle \\ &= \langle B_G C^{-1} B_G^T \xi, \xi \rangle + \alpha |\xi|^2 + \langle B_G \eta, \xi \rangle \\ &\quad + \langle B_G^T \xi, \eta \rangle + \langle C_G \eta, \eta \rangle \\ &= \langle C^{-1}(B_G^T \xi + C\eta), B_G^T \xi + C\eta \rangle + \alpha |\xi|^2 \\ &\stackrel{C^{-1} > 0}{\geq} \beta |B_G^T \xi + C\eta|^2 + \alpha |\xi|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h^T \frac{\partial^2 G}{\partial (z, p)^2}(x, u(x), u'(x)) h > 0 \quad \forall x \in [a, b], \forall 0 \neq h \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Da  $G \in C^2$ :  $\exists \delta > 0$  mit

$$h^T \frac{\partial^2 G}{\partial (z, p)^2}(x, u(x), u'(x)) h > 0 \quad \forall (x, z, p) \text{ mit}$$

$$|z - u(x)| + |p - u'(x)| < \delta \quad \forall 0 \neq h \in \mathbb{R}^{2N}.$$

$\Rightarrow$  aus (3.22) folgt (3.20)  $\Rightarrow$  Beh. ■

**Satz 3.7.**  $u$  erfülle *sLHB*.  $\Rightarrow$

- a)  $u$  erfüllt *JB*  $\Leftrightarrow \mathcal{Q}(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in X_0$ .  
 b)  $u$  erfüllt *sJB*  $\Leftrightarrow \mathcal{Q}(\xi) > 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in X_0$ .

*Beweis.* “ $\Leftarrow$ ” schon in Satz 3.5.

b) Analog zu Bsp. 3.5:

$$\delta^2 \mathcal{Q}(\xi = 0, \zeta) = 2\mathcal{Q}(\zeta) \quad (:= 2\delta^2 \mathcal{F}(u, \zeta)) \quad \forall \zeta \in X_0$$

$\Rightarrow$  Jacobi-Gl. von  $\mathcal{Q}$  bez.  $\xi = 0$  ist EL-Gl. von  $\mathcal{Q}$  bez.  $u$ , also die Jacobi-Gl. von  $\mathcal{F}$  bez.  $u$ .

$\Rightarrow$  *sLHB* (wegen (3.10)) und *sJB* gelten auch für  $\mathcal{Q}$ .

Da

$$\mathcal{Q}(t\zeta) = t^2 \mathcal{Q}(\zeta) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.23}$$

gilt:

$$\delta \mathcal{Q}(0, \zeta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{Q}(t\zeta)}{t} = 0 \quad \forall \zeta \in X_0.$$

$\Rightarrow$  Laut Satz 3.6 für  $\mathcal{Q}$ :  $\exists \delta > 0$ :

$$0 = \mathcal{Q}(0) < \mathcal{Q}(\zeta) \quad \forall 0 \neq \zeta \in X_0 \text{ mit } \|\zeta\|_\infty + \|\zeta'\|_\infty < \delta.$$

Aus “Skalierung” (3.23):  $\mathcal{Q}(\zeta) > 0 \quad \forall 0 \neq \zeta \in X_0$ .

a) Idee: potentieller konjugierter Pkt.  $b$  wird “abgeschnitten”:

Sei  $0 < \varepsilon < b - a$ . Definiere

$$\mathcal{F}_\varepsilon(v) := \int_a^{b-\varepsilon} F(x, v, v') dx; \quad u_\varepsilon = u \Big|_{[a, b-\varepsilon]}$$

$\Rightarrow \mathcal{F}_\varepsilon, u_\varepsilon$  erfüllen Voraussetzungen von (b).

$$\Rightarrow \mathcal{Q}_\varepsilon(\zeta) := \int_a^{b-\varepsilon} Q(x, \zeta, \zeta') dx \geq 0 \quad \forall \zeta \in C_0^1([a, b-\varepsilon], \mathbb{R}^N)$$

Sei  $\xi \in X_0$ . Definiere  $\zeta_\varepsilon(x) := \xi(a + \frac{b-a}{b-\varepsilon-a}(x-a)) \in C_0^1([a, b-\varepsilon], \mathbb{R}^N)$ .

$$\Rightarrow 0 \leq \mathcal{Q}_\varepsilon(\zeta_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{Q}(\xi). \quad \blacksquare$$

**Folgerung 3.3.**  $u$  erfülle  $\delta \mathcal{F}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in X_0$ , *sLHB*,  $\delta^2 \mathcal{F}(u, \xi) > 0 \quad \forall 0 \neq \xi \in X_0 \Rightarrow u$  ist strikte schwache lokale Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  (vgl. Bsp. 3.1: dort “fehlte” *sLHB*).

Referenzen: [Se] §9, [vB] §10.4-10.6.1, [GH] §5

# 4 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

generelle Annahmen:

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt;  $u \in X := C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ .

Sei  $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Nn}$  offen mit  $1 - \text{Graph}(u) \subset V$ .

Lagrange Funktionen  $F, G \in C^2(V, \mathbb{R})$ .

betrachte Probleme:

$$\mathcal{F}(v) := \int_{\Omega} F(x, v(x), Dv(x)) dx \rightarrow \min! \quad (4.1)$$

in einer Menge  $C_{\delta}$  mit festem  $\delta > 0$  und festem  $u \in X$ :

$$C_{\delta} := \{v \in X \mid v = u \text{ auf } \partial\Omega, \|u - v\|_X < \delta, \text{ Nebenbedingung für } v \}$$

Ziel: finde notwendige Bedingungen für einen Minimierer  $u$ , für verschiedene Arten von Nebenbedingungen

## 4.1 Isoperimetrische Nebenbedingungen

Integral-NB:  $\mathcal{G}(v) := \int_{\Omega} G(x, v(x), Dv(x)) dx \stackrel{!}{=} c; \quad c \in \mathbb{R} \text{ geg.}$

**Beispiel 4.1. klassisches isoperimetrisches Problem:**

Minimale Bogenlänge bei gegebenem Flächeninhalt:

Sei  $\Omega = I = (a, b)$ ,

$$\mathcal{F}(v) := \int_I \sqrt{1 + v'(x)^2} dx \rightarrow \min!$$

in  $C_0^1(\bar{I}) := \{v \in C^1(\bar{I}) \mid v|_{\partial I} = 0\}$  mit

$$\mathcal{G}(v) := \int_I v(x) dx \stackrel{!}{=} c, 0 \leq c < \frac{\pi(b-a)^2}{8}.$$

Also  $F = \sqrt{1+p^2}$ ,  $G = z$ .

Duales Problem: Maximaler Flächeninhalt bei gegebenem Umfang. □

**Satz 4.1.** Sei  $u \in X$  schwache lokale Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in  $C_\delta$ , und sei

$$\delta\mathcal{G}(u, \cdot) \quad \text{nicht das Nullfunktional auf } C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N). \quad (4.2)$$

a)  $\Rightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{R}$  (skalärer Lagrange Multiplikator), sodass

$$\delta\mathcal{F}(u, \xi) + \lambda \delta\mathcal{G}(u, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

b) Sei ferner  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

$\Rightarrow$  Es gelten die EL-Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} [F + \lambda G](x, u(x), Du(x)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} + \lambda \frac{\partial G}{\partial p_{ij}} \right) (x, u(x), Du(x)) \right] = 0;$$

$x \in \Omega; i = 1, \dots, N$

*Beweis.*

- Laut Voraussetzung  $\exists \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$  mit  $\delta\mathcal{G}(u, \varphi) = 1$  (da  $\delta\mathcal{G}$  homogen in  $\varphi$ ). Sei  $\xi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$  beliebig; definiere

$$\phi(\varepsilon, t) := \mathcal{F}(u + \varepsilon\xi + t\varphi), \quad \Psi(\varepsilon, t) := \mathcal{G}(u + \varepsilon\xi + t\varphi)$$

für  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ ,  $|t| < t_0$ ;  $\varepsilon_0, t_0$  hinreichend klein.

$$\Rightarrow \Psi(0, 0) = c, \Psi_t(0, 0) = \delta\mathcal{G}(u, \varphi) = 1.$$

Es gilt  $\Psi(\varepsilon, t) = c$  für  $u + \varepsilon\xi + t\varphi \in C_\delta$ .

- laut Satz über implizite Funktionen:

Für  $|\varepsilon| < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 : \exists \tau = \tau(\varepsilon) \in C^1(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$  mit  $\tau(0) = 0$  und  $\Psi(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) = c \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_1$ .

Das sind Variationen in der Mannigfaltigkeit der NB  $\mathcal{G}(v) = c$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} \Psi(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} &= \Psi_\varepsilon(0, 0) + \underbrace{\Psi_t(0, 0)}_{=1} \tau_\varepsilon(0) = 0 \\ \Rightarrow \tau_\varepsilon(0) &= -\Psi_\varepsilon(0, 0) = -\delta\mathcal{G}(u, \xi) \end{aligned}$$

- wegen Minimalität von  $u$ :

$$\begin{aligned} \phi(0, 0) &\leq \phi(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) \quad \forall |\varepsilon| < \varepsilon_1 \\ \Rightarrow 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \phi(\varepsilon, \tau(\varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} = \phi_\varepsilon(0, 0) + \phi_t(0, 0) \tau_\varepsilon(0) \\ &= \delta\mathcal{F}(u, \xi) - \underbrace{\delta\mathcal{F}(u, \varphi)}_{=: \lambda} \delta\mathcal{G}(u, \xi), \end{aligned}$$

und (a) folgt.  $\lambda$  ist unabhängig von  $\xi$  (lt. Def.) und eindeutig, sonst Widerspruch zu (4.2).

(b) folgt aus Satz 2.1 für das Funktional  $\mathcal{F} + \lambda\mathcal{G}$ . ■

**Beispiel 4.1.** (Fortsetzung)

- Laut Bsp. 1.1: Lösung  $u$  ist konkav (für  $u \geq 0$ ).
- Annahme  $u \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$

$$\Rightarrow \text{laut Satz 4.1 (b): } \lambda \underbrace{G_z}_{=1} - \frac{d}{dx} [F_p(u'(x))] = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}}_{=\text{Krümmung } \kappa(x)} = \lambda \quad (< 0)$$

$\Rightarrow$  Kreisbogen mit Radius  $-\lambda$ :

$$u(x) = -\frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (c_1 + \lambda x)^2} + c_2$$

$c_{1,2}$  durch Anpassung an RBen  $u(a) = u(b) = 0$ .

Folgerung: *isoperimetrische Ungleichung* für jedes beschränkte Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit  $C^1$ -Rand:

$$\text{Flächeninhalt von } \Omega \leq \frac{1}{4\pi} (\text{Länge von } \partial\Omega)^2 \quad \square$$

**Beispiel 4.2.** Eigenwertproblem für eingespannte, vibrierende Membran:

Betrachte  $\mathcal{F}(v) := \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \rightarrow \min!$  in  $C_0^1(\bar{\Omega})$  mit NB  $\mathcal{G}(v) := - \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \stackrel{!}{=} -1$ .

Also  $F = |p|^2$ ,  $G = -z^2$ .

Ein schwacher Minimierer  $u \in C^2(\Omega)$  erfüllt die EL-Gl.:

$$0 = \lambda G_z(u) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [F_{p_j}(\nabla u)] = -2(\lambda u + \Delta u), \quad x \in \Omega.$$

Multiplikation mit  $u$ ,  $\int \dots dx$  und partielle Integration liefern:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} u^2 dx = \lambda$$

$\Rightarrow$  Lagrange Multiplikator  $\lambda > 0$  ist kleinster EW von  $-\Delta$  mit homogenen Dirichlet-RBen auf  $\Omega$ .  $\square$

Referenzen: [GH] §2.1, [vdM] §1.3, [Se] §12

## 4.2 Holonome Nebenbedingungen

- punktweise NB(en):  $G(x, v(x)) = 0 \quad \forall x \in \Omega$  (also  $G = G(x, z)$ )
- Sei  $G = (G_1, \dots, G_r) \in \mathbb{R}^r, 1 \leq r \leq N - 1$ , sodass für festes  $x_0 \in \Omega$   $G(x_0, z) = 0$  eine  $(N - r)$ -dim. Untermannigfaltigkeit  $M(x_0)$  von  $\mathbb{R}^N$  definiert.  $\Rightarrow$  (4.1) ist Minimierungsproblem für Abbildungen  $v : \bar{\Omega} \rightarrow M$ .

**Beispiel 4.3.** Betrachte auf  $I = (t_1, t_2)$ :

$$\mathcal{F}(u) := \int_I |\dot{u}(t)| dt \rightarrow \min!$$

in  $C := \{u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R}^3) \mid u(t_1) = P_1, u(t_2) = P_2\}$  mit  $G(z) = |z|^2 - R^2$  und  $|P_{1,2}| = R$  geg. Minimum  $u(t)$  ist kürzeste Verbindung von  $P_1$  und  $P_2$  auf Sphäre mit Radius  $R \rightarrow$  Geodätische, Großkreisbogen.  $\square$

Sei nachfolgend  $G \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^r)$  mit  $r < N$ ,

$$\text{Rg} \frac{\partial G}{\partial z}(x, z) = r \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \text{ mit } G(x, z) = c := 0. \quad (\text{A1})$$

$\Rightarrow M(x) := \{z \in \mathbb{R}^N \mid G(x, z) = 0\}, x \in \Omega$  ist  $(N - r)$ -dim.  $C^1$ -Fäche in  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\text{span}\{\nabla_z G_1(x, z), \dots, \nabla_z G_r(x, z)\} = \underbrace{T_z M(x)}_{\text{Tg. Raum}}^\perp, \quad (4.3)$$

der Normalraum an  $M(x)$  im Punkt  $z \in M(x)$ .

**Satz 4.2.** Sei  $u \in X \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$  schwache lokale Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in

$$C_\delta := \{v \in X \mid \text{supp}(u - v) \subset \Omega, \|u - v\|_X < \delta, G(x, v(x)) = 0 \forall x \in \Omega\}$$

$\Rightarrow \exists$  eindeutig bestimmte Funktionen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in C(\Omega)$  (Lagrange Multiplikatoren) mit

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \left[ F + \sum_{l=1}^r \lambda_l(x) G_l \right] (x, u(x), Du(x)) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} (x, u(x), Du(x)) \right] = 0;$$

$$x \in \Omega; i = 1, \dots, N \quad (4.4)$$

*Beweis.* Umformulierung von (4.4) mit Euler-Operator  $L_F$  (2.5):

$$\mathbb{R}^N \ni (L_F u)(x) = - \sum_{l=1}^r \lambda_l(x) (\nabla_z G_l)(x, u(x)) \quad \forall x \in \Omega.$$

$\forall x \in \Omega : \{\lambda_l(x)\}$  ist eindeutig, sonst Widerspruch zu (A1).

Also zu zeigen (wegen (4.3))  $\forall x \in \Omega$ :

$$\mathbb{R}^N \ni (L_F u)(x) \perp T_{u(x)} M(x), \quad (4.5)$$

dem Tangentialraum an  $M(x)$  im Punkt  $u(x) \in M(x)$ .

indirekt: Sei (4.5) falsch  $\Rightarrow \exists x_0 \in \Omega$  und  $t_{x_0} \in T_{u(x_0)} M(x_0)$  mit

$$\langle (L_F u)(x_0), t_{x_0} \rangle \neq 0 \quad (4.6)$$

Schritt 1: Beh:  $\exists$  Tangentialvektorfeld  $t \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , also  $t(x) \in T_{u(x)} M(x) \quad \forall x \in \Omega$  mit  $t(x_0) = t_{x_0}$ ; wähle z.B.

$$t(x) := (I - P(x)) t_{x_0}$$

mit  $J(x) := \frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x))$ ,  $P := J^T (J J^T)^{-1} J$ .

$J(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^r$  ist surjektiv wegen (A1), also  $J^T(x) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^N$  injektiv.

Aus  $J J^T y = 0$  folgt  $|J^T y|^2 = \langle J J^T y, y \rangle = 0$ , also  $y = 0$ .  $\Rightarrow J J^T : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  ist injektiv, also bijektiv.

Da  $P^2 = P^T = P$ , ist  $P$  orthogonaler Projektor. Weiters ist Kern  $P(x) = \text{Kern } J(x) = T_{u(x)} M(x)$ , da die Zeilen von  $J(x)$  eine Basis von  $T_{u(x)} M(x)^\perp$  bilden (laut (4.3)). Also,  $I - P(x)$  ist Orthogonalprojektor von  $\mathbb{R}^N$  auf  $T_{u(x)} M(x)$ .

Für  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\varphi(0) = 1$  gilt für das Tangentialvektorfeld  $\xi(x) := \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) t(x)$  für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ :  $\xi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ,  $\xi(x_0) = t(x_0)$ , und

$$(\delta \mathcal{F}(u, \xi) =) \int_{\Omega} \langle (L_F u)(x), \xi(x) \rangle dx \neq 0$$

(folgt aus Vorzeichen von (4.6) und Stetigkeit des Integranden).

Schritt 2: Im 3. Schritt werden wir eine Familie von zulässigen Variationen  $v \in C^1(\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^N)$  konstruieren, mit

$$v(\cdot, 0) = u, \quad (4.7)$$

$$v(x, \tau) = u(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus \text{supp } \xi, \quad \forall |\tau| < \varepsilon \quad (4.8)$$

$$G(x, v(x, \tau)) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall |\tau| < \varepsilon \quad (\text{also NB OK}) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(x, 0) = \xi(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{also tangentielle Variation an } M(x)) \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau} \mathcal{F}(v(\cdot, \tau)) \Big|_{\tau=0} \stackrel{\text{mit (4.10)}}{=} \delta \mathcal{F}(u, \xi) = \int_{\Omega} \langle (L_F u)(x), \xi(x) \rangle dx \neq 0 :$$

Widerspruch zur Minimalität von  $u$  unter der NB (4.9)!

Schritt 3: Definiere  $w : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,

$$w(x, \tau, \underbrace{\theta}_{\in \mathbb{R}^r}) := u(x) + \tau \xi(x) + \sum_{l=1}^r \theta_l (\nabla_z G_l)^T(x, u(x)).$$

$$\Rightarrow G(x, w(x, 0, 0)) = G(x, u(x)) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} G(x, w(x, 0, \theta)) \Big|_{\theta=0} &= \frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x)) \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}(x, 0, 0) \\ &= \frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x)) \cdot \frac{\partial G^T}{\partial z}(x, u(x)) = J(x) \cdot J^T(x) \end{aligned}$$

Diese  $r \times r$ -Matrix ist invertierbar (lt. Schritt 1).

Laut Satz über implizite Funktionen für  $G(x, w(x, \tau, \theta)) = 0$ :

$\exists! \theta \in C^1(\Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^r)$ , sodass (4.7)-(4.9) gelten für  $v(x, \tau) := w(x, \tau, \theta(x, \tau))$ : Wegen der Eindeutigkeit von  $\theta$  impliziert  $\tau \xi(x) = 0 : \theta(x, \tau) = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} v(x, \tau) \Big|_{\tau=0} &= \xi(x) + \sum_{l=1}^r \frac{\partial \theta_l}{\partial \tau}(x, 0) (\nabla_z G_l)^T(x, u(x)) \\ &= \xi(x) + \frac{\partial G^T}{\partial z}(x, u(x)) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, 0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

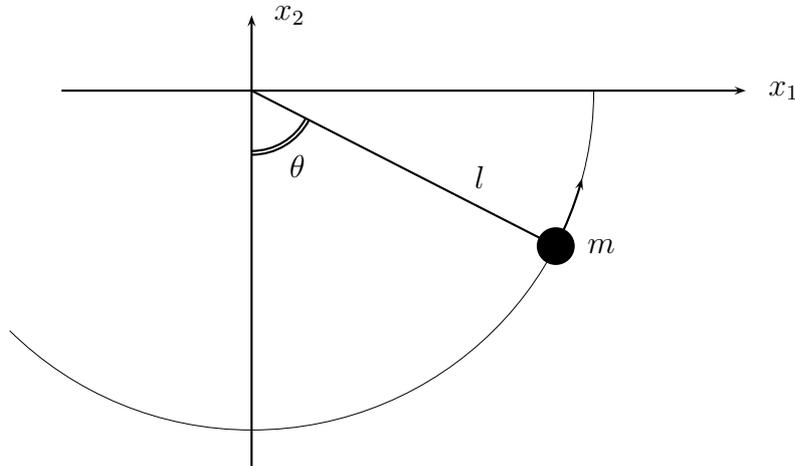
Es gilt  $\frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x)) \cdot \xi(x) = 0$ , da  $\xi(x) \in T_{u(x)} M(x)$  (lt. Schritt 1) und (4.3).

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\stackrel{(4.9)}{=} \frac{\partial}{\partial \tau} G(x, v(x, \tau)) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x)) \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau}(x, 0) \\ &\stackrel{(4.11)}{=} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial z}(x, u(x)) \cdot \frac{\partial G^T}{\partial z}(x, u(x))}_{= J \cdot J^T \dots \text{invertierbar}} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, 0) = 0 \quad \Rightarrow \text{Aus (4.11) folgt } \frac{\partial v}{\partial \tau}(x, 0) = \xi(x), \text{ also (4.10).} \quad \blacksquare$$

**Beispiel 4.4. Pendelgleichung;**  $N = 2, n = 1$ 

Punktmasse  $m$  bewegt sich im  $\mathbb{R}^2$  unter holonomer NB  $G(x(t)) := |x(t)|^2 - l^2 = 0$ ; also  $r = 1$ . Trajektorie  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ .



kinetische Energie ...  $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2$

potentielle Energie ...  $E_{\text{pot}} = mgx_2(t)$

Wirkungsfunktional (vgl. Bsp. 2.10):

$$\mathcal{F}(x) = m \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} |\dot{x}(t)|^2 - gx_2(t) dt \longrightarrow \min !$$

$$F(z, p) = m \left( \frac{|p|^2}{2} - gz_2 \right), \quad G(z) = z^2 - l^2$$

EL-Gleichung (4.4):

$$\begin{cases} 2\lambda(t)x_1(t) - m\ddot{x}_1 = 0 \\ -mg + 2\lambda(t)x_2(t) - m\ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Wegen NB  $x_1^2 + x_2^2 = l^2$  liefert die Substitution  $x_1(t) = l \sin \theta(t)$ ,  $x_2(t) = -l \cos \theta(t)$ :

$$\begin{cases} 2\lambda \sin \theta - m[\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta] = 0 \\ -\frac{mg}{l} - 2\lambda \cos \theta - m[\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta] = 0 \end{cases}$$

Elimination von  $\lambda(t)$  liefert die *Pendelgleichung*:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

□

**Beispiel 4.5. harmonische Abbildung in eine Sphäre;  $n = N$**

$$\mathcal{F}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underbrace{|Du|^2}_{=\sum_{i,j}(\partial_i u^j)^2} dx \rightarrow \min! \quad (4.12)$$

in  $U := \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid u|_{\partial\Omega} = g; |u| = 1 \text{ f.ü.}\}, \quad |g| = 1 \text{ geg.}$

Es gilt  $M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  (=Einheitssphäre).

Anwendung in

- Modellierung von *Flüssigkristallen*:  $u(x)$  ist die Richtung der Moleküle an  $x$ . Parallelausrichtung der Moleküle (d.h.  $Du = 0$ ) minimiert zwar die Energie  $\mathcal{F}(u)$ , erfüllt aber die RB nicht.
- Mikromagnetismus:  $u(x)$  ist Magnetisierung in Ferromagneten; Elementarmagnete haben variable Ausrichtung aber konst. Stärke  $\Rightarrow |u(x)| = 1$ .

Schwierigkeiten (analytisch + numerisch):

- NB  $|u| = 1$  nicht konvex;
- Minimierer typischerweise unstetig;
- Minimierer nicht eindeutig

**Satz 4.3. (EL-Gleichung)**

Ein Minimierer  $u \in U$  von (4.12) erfüllt

$$\int_{\Omega} Du : Dv dx = \int_{\Omega} |Du|^2 u \cdot v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) \quad (4.13)$$

Bem:

1. Notation:

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad A : B := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \text{Tr}(AB^T)$$

2. (4.13) ist die schwache Formulierung von

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(x)u & , \quad \Omega, \\ u = g & , \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Die Funktion  $\lambda(x) = |Du(x)|^2$  ist der *Lagrange-Multiplikator* zur NB  $|u| = 1$ .

*Beweis.* 1. sei  $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  fest.

Für kleines  $\tau$  gilt  $|u + \tau v| \neq 0$  (da  $|u| = 1$ )

$$\Rightarrow w(\tau) := \frac{u + \tau v}{|u + \tau v|} \in U \quad \dots \quad \text{zulässige Variationsfamilie} \quad (4.14)$$

2. Für  $\phi(\tau) := \mathcal{F}(w(\tau)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} Dw(\tau) : Dw(\tau) dx$  gilt:

$$\phi'(0) = \int_{\Omega} Du : Dw'(0) dx = 0$$

aus (4.14):  $w'(0) = \dots = v - (u \cdot v)u$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\Omega} Du : Dv - Du : D((u \cdot v)u) dx \quad (4.15)$$

Vereinfachung:

$$\text{NB: } |u|^2 \equiv 1 \quad |\Delta$$

$$\Rightarrow u \cdot \Delta u + |Du|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \int |Du|^2 u \cdot v dx = - \int (u \cdot \Delta u) u \cdot v dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \int Du : D((u \cdot v)u) dx$$

einsetzen in (4.15) liefert Ergebnis. ■

Referenzen: [GH] §2.2, [Se] §12, [vB] §6.1, [Ev1] §8.4.3

## 4.3 stationäre Stokes Gleichung

- Grundmodell für homogene, inkompressible, viskose (Flüssigkeits-)Strömung: *Navier-Stokes-Gleichungen* für Geschwindigkeitsfeld  $u(\cdot, t) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und Druck  $p(\cdot, t) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\nu =$  Viskositätsparameter;  $f(x, t) =$  geg. äußere Kraft:

$$\begin{cases} \alpha u_t + \beta u \cdot Du - \nu \Delta u = -\nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad \dots \text{Inkompressibilitätsbedingung}$$

Spezialfälle:

$\nu = 0$  ... *Euler Gleichungen* (nicht viskos)

$\beta = 0$  ... *Stokes Gleichungen* (Linearisierung für  $u, Du$  „klein“, d.h. für langsame viskose Strömungen, z.B. in Adern)

$\alpha = 0$  ... *stationäres Problem*

- sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet.

stationäres Stokes Problem (linear; oBdA:  $\nu = 1$ ):

$$\begin{cases} -\Delta u &= -\nabla p + f &, \Omega \\ \operatorname{div} u &= 0 &, \Omega \\ u &= 0 &, \partial\Omega \text{ (Haft-Randbedingung)} \end{cases} \quad (4.16)$$

andere Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\Delta I & \nabla \\ -\operatorname{div} & 0 \end{pmatrix}}_{(*)} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrix-Operator  $(*)$  ist symmetrisch aber *indefinit*  $\Rightarrow$  entspricht Sattelpunktproblem.

- Lösung durch Minimierungsproblem (nur für  $u$  — ohne  $p$  !):

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |Du|^2 - f \cdot u \, dx \xrightarrow{!} \min \quad \text{mit } f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3) \text{ geg.}, \quad (4.17)$$

in  $U = \{u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega\}$  ... Hilbertraum mit innerem Produkt  $(u, v) := \int_{\Omega} Du : Dv \, dx$ .

- (4.17) hat eindeutigen Minimierer  $u \in U$  ( $\rightarrow$  Übung)
- $\operatorname{div} u(x) = 0$  ist eine punktweise, *nicht-holonome* NB (allgemeiner:  $G(x, u(x), Du(x)) = 0$ )

**Satz 4.4.**

1. Der Minimierer  $u \in U$  von (4.17) erfüllt folgende schwache Formulierung von (4.16):

$$\int_{\Omega} Du : Dv - f \cdot v \, dx = \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega), \text{ mit } \operatorname{supp} v \subset\subset \Omega, \quad (4.18)$$

wobei eine geeignete skalare Funktion  $p \in L_{loc}^2(\Omega)$  (Lagrange Multiplikator zur Nebenbedingung  $\operatorname{div} u = 0$ ) existiert.

2. Die folgende (andere) schwache Formulierung von (4.16):

$$\int_{\Omega} Du : Dv \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx, \quad \forall v \in U \quad (\text{d.h. } \operatorname{div} v = 0)$$

hat eine eindeutige Lösung  $u \in U$ .

*Beweis-Idee.* 1. zunächst für  $v \in U$ :

$$\phi'(0) = \delta\mathcal{F}(u, v) = \int_{\Omega} Du : Dv - f \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} (\Delta u + f) \cdot v \, dx \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \Delta u + f = \nabla p$  für ein  $p$ , da  $-\int \nabla p \cdot v \, dx = \int p \operatorname{div} v \, dx = 0$ .  
(Details recht technisch: [Ev1])

2.  $\int f \cdot v \, dx$  ist stetiges lineares Funktional auf  $U$ ; Satz von Riesz.

■

Referenzen: [Ev1] §8.4.4



# 5 Existenztheorie für Minimierer

## 5.1 Funktionalanalytische Hilfsmittel

### 5.1.1 Sobolev Räume $W^{k,p}(\Omega)$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  durchwegs ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz Rand;  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Definition 5.1.** (Sobolev Räume):

1.

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \underbrace{\nabla^\alpha u}_{\text{als Distrib.}} \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

Norm:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|\nabla^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty \end{cases}$$

2.  $W_0^{k,p}(\Omega)$ : ist Abschluss von  $C_0^\infty(\Omega)$  in  $W^{k,p}(\Omega)$ , für  $1 \leq p < \infty$ .

Notation:  $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ ,  $W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega)$ .

Es gilt:

- $W^{k,p}$ -Funktionen sind Äquivalenzklassen von Funktionen, die f.ü. übereinstimmen.
- $W^{k,p}(\Omega)$  ist Abschluss von  $C^\infty(\bar{\Omega})$  bez.  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ ,  $1 \leq p < \infty$ .
- $W^{k,p}(\Omega)$ ,  $W_0^{k,p}(\Omega)$  sind Banach Räume; reflexiv  $\Leftrightarrow 1 < p < \infty$ .  
(Bem.:  $L^p(\Omega)' = L^q(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ )
- $u \in W_0^{k,p}(\Omega) \Leftrightarrow u \in W^{k,p}(\Omega)$  und  $\forall |\alpha| \leq k-1$  gilt:  
 $\nabla^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0$  „im schwachen Sinn“
- *Randspur* für  $1 \leq p < \infty$  und  $\partial\Omega$  sei  $C^1$ :  $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u|_{\partial\Omega} \in L^p(\partial\Omega)$  mit  
 $\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  ( $C$  ist unabhängig von  $u$ )
- *stetige Einbettungen* (auch für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  unbeschränkt):

1.  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ,  $2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2} =: 2^*$  ... kritischer Sobolev Exponent

(bzw.  $2 \leq q < \infty$  für  $n = 2$ ,  $2 \leq q \leq \infty$  für  $n = 1$ )

$$\text{mit } \|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|_{H^1} \quad \forall u \in H^1(\Omega) \quad (5.1)$$

bzw. (Sobolev Ungleichung, Gagliardo-Nirenberg Ungleichung)

$$\|u\|_{L^q} \leq C_q \|u\|_{L^2}^{1-\alpha} \|u\|_{H^1}^\alpha \quad \text{mit } \alpha = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{2}{q}\right) \quad (5.2)$$

2.  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\bar{\Omega})$ ,  $p > n$  ( $C_B(\bar{\Omega})$  ... stetige, beschränkte Funktionen auf  $\bar{\Omega}$ )

$$\text{mit } \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

• kompakte Einbettungen (für  $\Omega$  beschränkt):

1. Satz von Rellich-Kondrachov:

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 2 \leq q < \frac{2n}{n-2} \quad (2 \leq q < \infty \text{ für } n = 2, 2 \leq q \leq \infty \text{ für } n = 1) \quad (5.3)$$

2.  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

daher:  $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists$  Teilfolge  $\{u_{k_j}\}$  mit  $u_{k_j} \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$  (vgl. PDGl-Skript, Satz 4.10).

**Lemma 5.1.** (Poincaré-Ungleichung):  $\forall 1 \leq p < \infty : \exists c > 0$  (unabhängig von  $u$ ), so dass

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Bew: [Ev1], vgl. PDGl-VL: Satz 4.11 für  $p = 2$ .

## 5.1.2 Schwache Konvergenz

Sei  $X$  BR  $\Rightarrow X' = \{ \text{stetige, lin. Funktionale auf } X \}$  ist BR

**Definition 5.2.** Die Folge  $\{u_k\} \subset X$  konvergiert schwach gegen  $u \in X$  ( $u_k \rightharpoonup u$ ), wenn

$$\langle v, u_k \rangle \rightarrow \langle v, u \rangle \quad \forall v \in X'.$$

Es gilt:

1.  $u_k \rightarrow u \Rightarrow u_k \rightharpoonup u$

2. jede schwach konvergente Folge  $(u_k \rightharpoonup u)$  ist beschränkt, und

$$\|u\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|.$$

(Beweis mit Banach-Steinhaus)

3. Sei  $u_k \rightharpoonup u$  in  $X$  und  $v_k \rightarrow v$  in  $X'$

$$\Rightarrow \langle v_k, u_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle v, u \rangle$$

(wichtig für Konvergenz von quadrat. Termen in PDGl.)

4. Für  $\dim X < \infty$  gilt:  $u_k \rightarrow u \Leftrightarrow u_k \rightharpoonup u$

5. Sei  $K$  ein kompakter Operator auf  $X$ , dann gilt:

$$u_k \rightharpoonup u \Rightarrow Ku_k \rightarrow Ku$$

Bsp:  $u_k(x) = \sin kx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  in  $L^2(0, \pi)$ , aber  $\|u_k\|_{L^2(0, \pi)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \forall k \in \mathbb{N}$   
(aber  $u_k$  konvergiert weder punktweise noch f.ü. !)

Bsp: weitere typische Beispiele mit  $\|u_k\|_{L^2(\mathbb{R})} = \text{const}$ , aber  $u_k \rightharpoonup 0$  (also  $\{u_k\}$  nicht kompakt):

- $u_k = k^{-1/2} \varphi(\frac{x}{k})$  mit  $\varphi \in L^2 \cap L^\infty$ .  $u_k \rightarrow 0$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$  ... lokales Verschwinden der Folge
- $u_k = k^{1/2} \varphi(kx)$  ... Konzentration an  $x = 0$  (*blow-up*)
- $u_k = \varphi(x - k)$  ... Translation

Achtung: Nichtlinearitäten sind i.A. *nicht stetig* bez. schwacher Konvergenz

Bsp:  $u_k^2 = \sin^2 kx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq (w\text{-}\lim u_k)^2 = 0$ ;  
aber:  $w_k \rightarrow w$  in  $L^{2p}(\Omega) \Rightarrow w_k^2 \rightarrow w^2$  in  $L^p(\Omega)$

**Satz 5.1.** (*schwache Kompaktheit; Spezialfall von: Satz von Alaoglu*):

Sei  $X$  ein reflexiver BR (d.h.  $X'' = X$ ), und  $\{u_k\} \subset X$  beschränkt.

$\Rightarrow \exists$  Teilfolge  $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$  und  $\exists u \in X$  mit  $u_{k_j} \rightharpoonup u$

### 5.1.3 Unterhalbstetigkeit

Motivation:

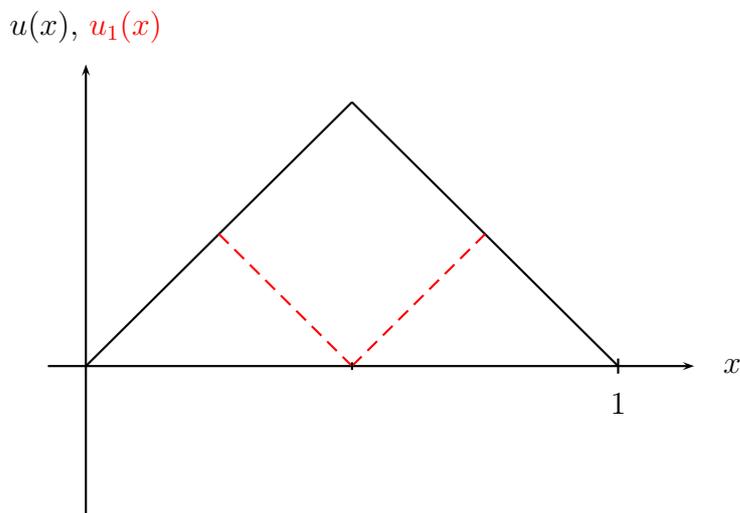
In  $\infty$ -dim. Funktionenräumen sind "viele" Funktionale *nicht* stetig bez. glm. Konvergenz der Funktionen:

**Beispiel 5.1. Länge von Zick-Zack-Kurven:**

Sei  $u(x) := \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ ,  $x \in [0, 1]$  mit periodischer Fortsetzung auf  $\mathbb{R}$ .

$$u_k(x) := 2^{-k} u(2^k x), \quad x \in [0, 1], \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

$\Rightarrow$  Länge  $\mathcal{L}(u_k) = \sqrt{2} \forall k$ , aber glm. Limes:  $u_\infty(x) \equiv 0$   
 $\Rightarrow 1 = \mathcal{L}(u_\infty) < \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \mathcal{L}(u_k) = \sqrt{2}$



□

**Definition 5.3.** Sei  $X$  ein BR,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine (nichtlineare) Abbildung,  $\{u_k\} \subset X$ .  $F$  heißt

1. unterhalbstetig, wenn

$$u_k \rightarrow u \text{ in } X \Rightarrow F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_k);$$

2. schwach (folgen)stetig, wenn

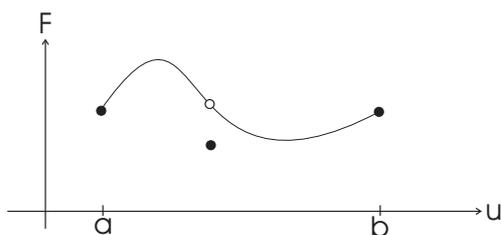
$$u_k \rightarrow u \text{ in } X \Rightarrow F(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(u_k).$$

(stärkere Eigenschaft als (Folgen-)Stetigkeit !)

3. schwach (folgen) unterhalbstetig (SUHS), wenn

$$u_k \rightarrow u \text{ in } X \Rightarrow F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_k).$$

Bsp 1:  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  aus Graphik ist unterhalbstetig:



Bsp 2: Jedes *lineare* Funktional in  $X'$  ist schwach (folgen)stetig (ist trivial!).

Bsp 3:  $F(u) = \|u\|_X$  ist SUHS (siehe Bem. (2) nach Def. 5.2).

$$u_k(x) := \sin kx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 = u(x) \text{ in } L^2(0, \pi)$$

$$0 = \|u\|_{L^2(0, \pi)} < \|u_k\|_{L^2(0, \pi)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Referenzen: [Ev1] §8.2, [Jo] §II.4.1-2

## 5.2 Direkte Methode der Variationsrechnung

Aufgabe: Sei  $N = 1$ . Finde globale Minimalstelle von

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx, \quad U \rightarrow \mathbb{R}$$

für  $u$  in einer Funktionenmenge  $U \neq \{\}$  mit der Dirichletrandbedingung  $u|_{\partial\Omega} = g$  und gegebenem  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

• notwendige Bedingung für Lösbarkeit:  $\mathcal{F}$  ist *nach unten beschränkt*; reicht aber nicht, vgl.  $f(x) = e^{-x}$  auf  $\mathbb{R}$

Strategie für Existenz eines Minimierers:

4 Voraussetzungen an  $\mathcal{F}$  und  $U$ :

1.  $\mathcal{F}$  sei *nach unten beschränkt*

$$\Rightarrow \exists \inf_{u \in U} \mathcal{F}(u) =: m;$$

wähle *Minimalfolge*  $\{u_k\} \subset U$  mit

$$\mathcal{F}(u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} m.$$

→ 4 Fragen:

- $u_k$  beschränkt (vgl.  $e^{-x}$ )?
- konvergiert  $u_k$  gegen ein  $u$  (da  $U$   $\infty$ -dimensional)?
- $u \in U$ ?
- $\mathcal{F}(u) = m$ ?

2. eine *Kompaktheitsbedingung*: Seien die Sub-Level-Sets  $\{u \in U \mid \mathcal{F}(u) \leq \lambda\}$  schwach kompakt in einem BR  $X \supset U$  (z.B. durch Beschränktheit der Level-Sets in reflexivem BR).

⇒  $\exists$  schwach konvergente Teilfolge  $\{u_{k_j}\}$  mit  $u_{k_j} \rightharpoonup u$  in  $X$ .

3. Es gelte  $u \in U \subset X$ , d.h.  $U$  sei (schwach) abgeschlossen.

4.  $\mathcal{F}$  sei schwach unterhalbstetig in  $X$ :

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{k_j}) = \lim \mathcal{F}(u_{k_j}) = m; \text{ also: } \mathcal{F}(u) = m,$$

$\Rightarrow u$  ist Minimierer.

**Bem:** Beschränktheit und schwache Kompaktheit der Sub-Level-Sets  $\{u \in U \mid \mathcal{F}(u) \leq \lambda\}$  in (2) ist leichter zu erhalten in grober (d.h. schwächerer) Topologie (da  $\mathcal{F}(u) \|u\|_X$  "kontrollieren" muss); aber SUHS in (4) leichter in feiner (d.h. stärkerer) Topologie  $\rightarrow$  gegenläufige Erfordernisse. Wahl von  $X$  oft schwierig.

konkretes Beispiel:

$X = W^{1,q}(\Omega)$ ,  $U := \{u \in X \mid u|_{\partial\Omega} = g\}$  mit  $1 < q < \infty$  und  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so dass  $U \neq \{\}$  (z.B.  $g \in L^q(\partial\Omega)$  notwendig)

Annahmen an  $F$  (für ein  $q \in (1, \infty)$  fest):

- $\exists \alpha > 0, \beta \geq 0$  mit

$$F(x, z, p) \geq \alpha|p|^q - \beta, \quad \forall x \in \Omega, z \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n \quad (\text{Koerzivität von } F) \quad (\text{A2})$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \geq \alpha \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)}^q - \gamma \quad (\text{Koerzivität von } \mathcal{F}) \quad (\text{5.4})$$

mit  $\gamma = \beta|\Omega|$ , und  $\mathcal{F}(u) \rightarrow \infty$  für  $\|\nabla u\|_{L^q} \rightarrow \infty$ .

$\Rightarrow \mathcal{F}$  auf ganz  $U$  definiert mit Werten in  $[-\gamma, +\infty]$ .

Wegen Koerzivität (5.4)  $\Rightarrow \{u_k\}$  ist beschränkt in  $W^{1,q}(\Omega)$

$\Rightarrow \exists$  schwach konvergente Teilfolge  $\{u_{k_j}\}$  und ein  $u \in U \subset W^{1,q}(\Omega)$  mit:

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u & \text{in } L^q(\Omega), \\ \nabla u_{k_j} \rightharpoonup \nabla u & \text{in } L^q(\Omega, \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$\rightarrow$  Problem:  $\mathcal{F}$  nichtlinear & (nur) schwache Konvergenz von  $\nabla u_{k_j}$ .

$\Rightarrow \mathcal{F} : W^{1,q}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  i.A. nicht schwach stetig.

- $\mathcal{F}$  sei schwach unterhalbstetig auf  $W^{1,q}(\Omega)$  (A3)

(folgt z.B. aus Konvexität von  $F$  bez.  $p$  – siehe Satz 5.2)

Laut notwendiger LHB (Lemma 3.2(b) + Satz 3.3 für  $N = 1$ ):

$\frac{\partial^2}{\partial p^2} F(x, u, \nabla u) \geq 0$  (d.h. lokale Konvexität bez.  $p$  an  $u(x)$ ) notwendig für Minimum an  $u$ .

Konvexität liefert auch SUHS:

**Satz 5.2.** (Tonelli) Sei  $F$  glatt, nach unten beschränkt, und  $F(x, z, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konvex  $\forall x \in \Omega, z \in \mathbb{R}$ .

$\Rightarrow \mathcal{F}$  ist schwach unterhalbstetig auf  $W^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ .

*Beweis.*

1. Sei  $u_k \rightharpoonup u$  in  $W^{1,q}(\Omega)$ .

Definiere  $l := \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_k) > -\infty$ , bzw.  $l = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{k_j})$  für eine Teilfolge. Sei  $l < \infty$ , sonst Folgerung trivial. z.z.:  $\mathcal{F}(u) \leq l$ .

wegen kompakter Einbettung:  $u_{k_j} \rightarrow u$  in  $L^q(\Omega)$ .

$\Rightarrow$  für (ev. weitere) Teilfolge gilt  $u_{k_j} \rightarrow u$  f.ü. in  $\Omega$ .

(lt. Korollar von Weyl zu Satz von Riesz-Fisher {d.h.  $L^1$  ist vollständig}, [RS1] §I.3)

2. lt. Satz von Egoroff:

Da  $u_{k_j} \rightarrow u$  f.ü. in  $\Omega \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists$  meßbare Menge  $R_\varepsilon \subset \Omega$  mit  $|\Omega - R_\varepsilon| \leq \varepsilon$  und

$$u_{k_j} \rightarrow u \text{ glm. auf } R_\varepsilon \quad (5.5)$$

- def.  $S_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid |u(x)| + |\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$

$\Rightarrow |\Omega - S_\varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

- def.  $T_\varepsilon := R_\varepsilon \cap S_\varepsilon \Rightarrow |\Omega - T_\varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

3. da  $F$  nach unten beschränkt, sei oBdA  $F \geq 0$  (andernfalls betrachte  $\tilde{F} = F + \beta \geq 0$ )

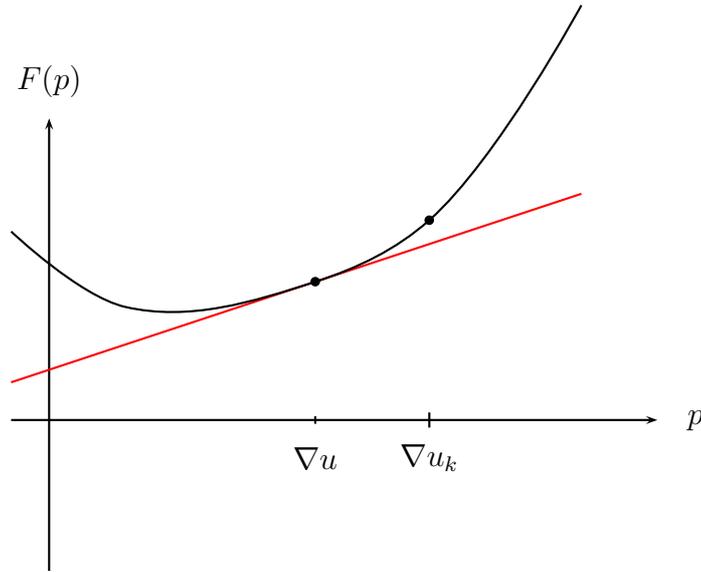
$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{F}(u_k) &= \int_{\Omega} F(x, u_k, \nabla u_k) dx \stackrel{F \geq 0}{\geq} \int_{T_\varepsilon} F(x, u_k, \nabla u_k) dx \\ &\stackrel{F \text{ konvex}}{\geq} \int_{T_\varepsilon} \underbrace{F(x, u_k, \nabla u)}_{\substack{|\cdot| \leq \frac{1}{\varepsilon} \\ \text{konv. glm. auf } T_\varepsilon}} dx + \int_{T_\varepsilon} \underbrace{\nabla_p F(x, u_k, \nabla u)}_{\text{konv. glm. auf } T_\varepsilon} \cdot (\nabla u_k - \nabla u) dx \\ k = k_j \rightarrow \infty &\quad \quad \quad \downarrow \text{ wegen (5.5)} \quad \downarrow \\ \Rightarrow l = \lim \mathcal{F}(u_k) &\geq \int_{T_\varepsilon} F(x, u, \nabla u) dx + 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

da:  $\nabla_p F(x, u_k, \nabla u) \rightarrow \nabla_p F(x, u, \nabla u)$  glm. auf  $T_\varepsilon$ , also in  $L^q(T_\varepsilon)$ ; und  $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$  in  $L^q(T_\varepsilon)$ .

Trick:

- $F(x, u_k, \nabla u_k)$  ist *nichtlinear* in  $\nabla u_k$  mit  $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$  in  $L^q \Rightarrow$  keine Konvergenzinformation.
- (5.6) (=Tangente an der Stelle  $\nabla u$  liegt „unter“  $F$ , da  $F$  konvex) ist *linear* in  $\nabla u_k \Rightarrow$  Grenzübergang in linearer unterer Schranke möglich.

also:  $l \geq \int_{T_\varepsilon} F(x, u, \nabla u) dx \quad \forall \varepsilon > 0$ .



- mit monotoner Konvergenz für  $F_\varepsilon(x) := F(x, u, \nabla u)\chi_{T_\varepsilon}(x) \geq 0$ :

$$l \geq \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx = \mathcal{F}(u).$$

■

**Bemerkung 5.1.** 1. Satz 5.2 gilt analog für  $N > 1$ : [Ev1] §8.2.4

- Umkehrung von Satz 5.2: Sei  $n = 1$  (also  $\Omega = I$ ) und  $N \in \mathbb{N}$ . Sei  $\mathcal{F}$  SUHS auf  $W^{1,q}(I)$  für ein  $q \in (1, \infty)$ .  
 $\Rightarrow F(x, z, \cdot) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  ist konvex  $\forall (x, z) \in \bar{I} \times \mathbb{R}^N$  (Beweis: [vdM] §4).

**Satz 5.3.** (Existenz von Minimierern)

Sei  $F$  glatt, koerziv (d.h. (A2)) und konvex in  $p$  und  $U \neq \{\}$ .

$\Rightarrow \exists u \in U$  mit  $\mathcal{F}(u) = \min_{w \in U} \mathcal{F}(w)$ .

*Beweis.*

- def.  $m := \inf_{w \in U} \mathcal{F}(w) < \infty$  (sonst Aussage trivial).  
 Sei  $\{u_k\}$  Minimalfolge:

$$\mathcal{F}(u_k) \rightarrow m. \tag{5.7}$$

- Beschränktheit von  $\{u_k\}$ :

oBdA sei  $\beta = 0$  in (A2), sonst betrachte  $\tilde{F} = F + \beta$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(w) \geq \alpha \|\nabla w\|_{L^q(\Omega)}^q$$

Mit (5.7) folgt:

$$\sup_k \|\nabla u_k\|_{L^q(\Omega)} < \infty \quad (5.8)$$

- wähle  $w \in U$  beliebig  $\Rightarrow u_k - w \in W_0^{1,q}(\Omega)$

$\Rightarrow$  (mit Poincaré-Ungleichung):

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^q} &\leq \|u_k - w\|_{L^q} + \|w\|_{L^q} \\ &\leq c\|\nabla u_k - \nabla w\|_{L^q} + c \stackrel{(5.8)}{\leq} c \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{u_k\}$  beschränkt in  $W^{1,q}(\Omega)$

3. lt. Satz von Alaoglu:  $\exists$  Teilfolge mit  $u_{k_j} \rightharpoonup u$  in  $W^{1,q}(\Omega)$ .

z.z.:  $u \in U$ , d.h.  $u|_{\partial\Omega} = g$

- $u_{k_j} - w \in W_0^{1,q}(\Omega)$  ... abgeschlossener Teilraum von  $W^{1,q}(\Omega)$ , und auch *schwach abgeschlossen* (laut Satz von Mazur: Eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge vom BR  $X$  ist *schwach abgeschlossen*.)

$$\Rightarrow u - w \in W_0^{1,q}(\Omega) \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = w|_{\partial\Omega} = g$$

- lt. Satz 5.2:  $\mathcal{F}$  ist SUHS, d.h.  $\mathcal{F}(u) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \inf \mathcal{F}(u_{k_j}) = m$
- da  $u \in U : \mathcal{F}(u) = m = \min_{w \in U} \mathcal{F}(w)$ .

■

**Eindeutigkeit des Minimierers**, falls  $F$  nur *strikt konvex* in  $p$  (aber nicht notwendigerweise glm. konvex, d.h.  $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \geq \Theta > 0$ ) ist:

**Satz 5.4.**  $F$  sei stetig und erfülle  $\forall x \in \Omega :$

$$\begin{aligned} F(x, (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2, (1-\lambda)p_1 + \lambda p_2) &< (1-\lambda)F(x, z_1, p_1) + \lambda F(x, z_2, p_2) \quad (5.9) \\ \forall \lambda \in (0, 1); \forall (z_1, p_1), (z_2, p_2) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } p_1 &\neq p_2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Ein Minimierer  $u \in U = \{u \in W^{1,q}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = g\}$  von  $\mathcal{F}$  ist *eindeutig*.

*Beweis.* Seien  $u_1 \neq u_2 \in U$  Minimierer mit  $\mathcal{F}(u_1) = \mathcal{F}(u_2) = m$ .

$\Rightarrow \exists \Omega_1 \subset \Omega$  mit  $\mu(\Omega_1) > 0$ , so dass  $\nabla u_1(x) \neq \nabla u_2(x)$  für f.a.  $x \in \Omega_1$  (andernfalls wäre

$u_1 = u_2$  wegen  $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega}$ .

Auf  $\Omega_1$  gilt in (5.9) f.ü. die strikte Ungleichung, auf  $\Omega_2 := \Omega \setminus \Omega_1$  aber nur “ $\leq$ ”:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) \\ &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} F(x, (1-\lambda)u_1(x) + \lambda u_2(x), (1-\lambda)\nabla u_1(x) + \lambda \nabla u_2(x)) dx \\ &< (1-\lambda) \int_{\Omega} F(x, u_1(x), \nabla u_1(x)) dx + \lambda \int_{\Omega} F(x, u_2(x), \nabla u_2(x)) dx = m \end{aligned}$$

Widerspruch zu “ $u_{1,2}$  sind Minimierer,” da  $(1-\lambda)u_1 + \lambda u_2 \in U$ . ■

**Beispiel 5.2.**

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + fu dx \xrightarrow{!} \min \text{ in } H_0^1(\Omega) \quad \text{mit } f \in L^2(\Omega) \text{ geg.}$$

(vgl. (4.17) für stationäres Stokes-Problem; dort  $u \in \mathbb{R}^3$ )

$$\mathcal{F}(u) \stackrel{\text{Poincaré}}{\geq} C \|u\|_{H_0^1}^2 - \|f\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1} \geq -\frac{\|f\|_{L^2}^2}{4C},$$

also  $\mathcal{F}$  nach unten beschränkt; Minimalfolge beschränkt in  $H_0^1(\Omega) \Rightarrow u_{k_j} \rightharpoonup u$  in  $H_0^1(\Omega)$ .  
 $F(x, z, p) = |p|^2 + f(x)z$  erfüllt VSen von Satz 5.2 *nicht* (da  $f(x)z$  nicht nach unten beschränkt);

aber  $\mathcal{F}(u)$  SUHS, da  $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  SUHS laut Satz 5.2 (bzw.  $= \|u\|_{H_0^1}^2$ ) und  $\int_{\Omega} fu dx$  schwach stetig.

Eindeutigkeit des Minimierers laut Satz 5.4. □

**Beispiel 5.3.**  $F(p) := |p|^q$  ( $q > 1$  fest) ist strikt konvex im Sinn von (5.9), erfüllt Koerzitivität (A2).  $\Rightarrow \mathcal{F}$  hat eindeutigen Minimierer in  $U = \{u \in W^{1,q}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = g\}$  falls  $U \neq \{\}$ .

zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(\nabla u) = 0 & , \quad x \in \Omega \\ u = g & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.10}$$

mit  $a(p) := \nabla F(p) = q|p|^{q-2}p$ .

(5.10) ist degenerierte elliptische Gleichung für  $q > 2$ . □

Referenzen: [Ev1] §8.2, [St] §I.1, [Gr] §3, [vdM] §4-5, [Jo] §II.4.1-2

## 5.3 Minimalflächenproblem

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  beschränkt,  $\partial\Omega$  glatt. Minimiere

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx \quad (5.11)$$

mit  $u|_{\partial\Omega} = g$ .

Probleme:

- $\mathcal{F}$  nicht koerziv in  $W^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$
- $\mathcal{F}$  ist koerziv in  $W^{1,1}(\Omega)$ , aber  $W^{1,1}(\Omega)$  ist nicht reflexiv (nicht einmal ein Dualraum)  $\rightarrow$  Satz 5.1 von Alaoglu nicht anwendbar
- für  $\Omega$  nicht konvex hat (5.11) nicht immer eine klassische Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .
- Problem: Minimalflächengleichung (1.1) zwar glm. elliptisch, aber Koeffizientenmatrix des Hauptteils

$$A = \begin{pmatrix} 1 + u_{x_2}^2 & -u_{x_1}u_{x_2} \\ -u_{x_1}u_{x_2} & 1 + u_{x_1}^2 \end{pmatrix} \geq I$$

kann unbeschränkt sein (z.B. bei  $\Omega$  mit einspringender Ecke)

Bem: Für  $\Omega$  konvex und  $g$  mit „beschränkter Steigung“ (in geeignetem Sinn) kann man zeigen ([Ze] §52):

(5.11) hat einen Minimierer  $u \in W^{1,\infty}(\Omega) = C^{0,1}(\bar{\Omega}) \Rightarrow$  betrachte leicht *modifiziertes Problem*:

**Satz 5.5.** Sei (für  $R > 0$  fest)

$$\tilde{U} := \{u \in W^{1,\infty}(\Omega) \mid \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq R; u = g \text{ auf } \partial\Omega\} \neq \{\}$$

$\Rightarrow \exists u \in \tilde{U}$  mit  $\mathcal{F}(u) = \min_{w \in \tilde{U}} \mathcal{F}(w)$

*Beweis.* 1. da  $\mathcal{F}(u) \geq 0$ : wähle Minimalfolge  $\{u_k\} \subset \tilde{U}$ , also  $\mathcal{F}(u_k) \rightarrow m$ . Das alleine impliziert aber nicht die Beschränktheit von  $\{u_k\}$ !

- laut Problemmodifikation:

$$\|u_k\|_{C^{0,1}(\Omega)} := \max_{x \in \bar{\Omega}} |u_k(x)| + \text{Lip}(u_k) = \|u_k\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq R,$$

$u_k$  also *gleichgradig stetig* auf  $\bar{\Omega}$ .

- laut *Satz von Arzelà-Ascoli*:

$\exists$  Teilfolge  $\{u_{k_j}\}$ , die auf  $\bar{\Omega}$  gleichmäßig gegen ein  $u \in \tilde{U}$  konvergiert.

2.  $\|u_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u_k\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq CR \quad \forall k \in \mathbb{N}$ ,  
 $\Rightarrow \exists$  (weitere) Teilfolge mit  $u_{k_j} \rightharpoonup u$  in  $H^1(\Omega)$ .

$$F(p) = \sqrt{1 + |p|^2} \geq 0, \text{ konvex}$$

- lt. Satz 5.2 (Tonelli):

$$\mathcal{F}(u) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{k_j}) = m$$

$\Rightarrow u$  ist Minimalstelle. ■

Bem: Lösung des modifizierten Problems ist laut Satz 5.4 eindeutig in  $U := \{u \in W^{1,\infty}(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = g\} \neq \{\}$ .

Referenzen: [Ze] Problem 52.1

## 5.4 Polykonvexität / kompensierte Kompaktheit

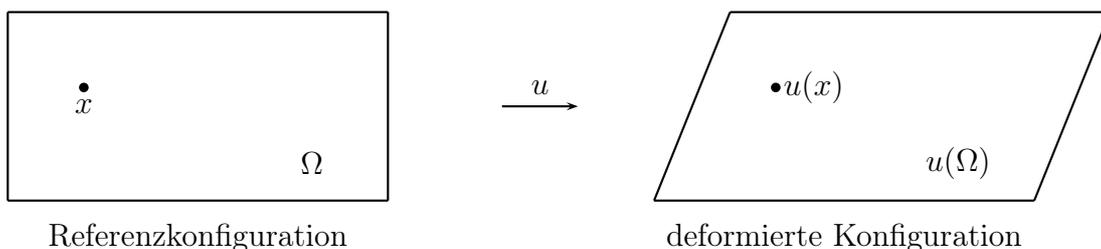
- LHB (3.5) ist notwendige Bedingung für Minimum an  $u$  (Lemma 3.2b + Satz 3.3);
- $N = 1$  oder  $n = 1$ : notwendige LHB  $\Leftrightarrow F$  ist konvex in  $p$  (Bem. 3.1);
- $N > 1$  und  $n > 1$ : notwendige LHB viel schwächer als Konvexität von  $F$  in  $p$ .  
 $\Rightarrow$  SUHS von  $\mathcal{F}$  für  $N > 1$  auch unter schwächeren Bed. als  $p$ -Konvexität möglich.

Anwendung: nichtlin. Elastizität

$\Omega \subset \mathbb{R}^3 \dots$  (beschränktes) Gebiet des unverzerrten Körpers, "Referenzkonfiguration"

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \dots$  *Deformationsfeld* beschreibt Auslenkung jedes inneren Körperpunktes  $x \in \Omega$  zur neuen Position  $u(x)$ .  $u$  muß injektiv sein; werden wir aber nicht benutzen.

Randbedingung:  $u|_{\partial\Omega} = g \dots$  geg.: Deformation der Oberfläche bewirkt Deformation des Inneren.



- Jacobi-Determinante  $\det \underbrace{Du(x)}_{\in \mathbb{R}^{3 \times 3}}$  gibt *lokale Volumsänderung* an;  $\det = 1$ : keine Änderung.

Annahme:  $\det Du(x) > 0$ , d.h. keine Spiegelungsdeformation

- lineare Elastizitätstheorie: Spannung(stensor) hängt linear vom Deformationsgradienten  $Du$  ab (vgl. Hooksches Gesetz); Deformationsenergie quadratisch in  $Du$ .
- (nichtlineare) *hyperelastische Materiale*:  $\exists$  Funktion  $F = F(x, Du(x))$  zur Beschreibung der *gespeicherten Energiedichte*  
 $\rightarrow$  Gleichgewichtszustand ist Minimum des Energiefunktional

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(x, Du(x)) dx, \quad u \in U.$$

(Annahme: keine thermischen oder “Memory-Effekte” der Deformation)

- Extrem große/kleine Volumsverzerrungen benötigen  $\infty$  viel Energie  $\Rightarrow$

$$F \rightarrow \infty \quad \text{für } \det Du \rightarrow 0 \text{ oder } \det Du \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow F$  ist *nicht* konvex in  $Du$  ( $\rightarrow$  Übung), aber *polykonvex* (geeignete VS für viele elastische Anwendungen).

**Definition 5.4.** Sei  $n = N$  und  $F = F(x, z, p, \det p) : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *glatt mit*:

$$\text{die Abbildung } (p, r) \mapsto F(x, z, p, r) \text{ ist konvex } \forall x \in \Omega, \forall z \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A4})$$

Dann heißt  $F$  polykonvex.

**Lemma 5.2** (schwache Stetigkeit von Determinanten). Sei  $n < q < \infty$  und  $u_k \rightharpoonup u$  in  $W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \det Du_k \rightharpoonup \det Du \quad \text{in } L^{\frac{q}{n}}(\Omega).$$

*Beweis. Schritt 1:*

Notation: Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Die *Cofaktor-Matrix*  $\text{cof } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  hat die Elemente

$$(\text{cof } A)_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A^{ij}),$$

wobei  $A^{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte von  $A$  entsteht. Es gilt

$$(\det A)I = A(\text{cof } A)^T. \quad (5.12)$$

Sei  $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Da

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{cof} Dw)_{ij} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (\rightarrow \text{Übung}) \quad , \quad (5.13)$$

gilt  $\forall i = 1, \dots, n$ :

$$\det Dw \stackrel{(5.12)}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_j} (\operatorname{cof} Dw)_{ij} \stackrel{(5.13)}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} [w_i (\operatorname{cof} Dw)_{ij}] . \quad (5.14)$$

$\rightarrow$  Jacobi-Determinante  $\det Dw$  hat Divergenz-Struktur! Der 1. Faktor des Vektorfeldes  $[w_i (\operatorname{cof} Dw)_{ij}]$  hat keine Ableitung ( $\rightarrow$  starke Konvergenz), der 2. Faktor ist ein  $(n-1)$ -faches Produkt mit Determinanten-Struktur.

Für  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  gilt:

$$\int_{\Omega} v \det Dw \, dx = - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j} [w_i (\operatorname{cof} Dw)_{ij}] \, dx \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (5.15)$$

Schritt 2:

lt. VS:  $u_k \rightarrow u$  in  $W^{1,q} \hookrightarrow L^q \hookrightarrow L^s$ ,

$$s := \frac{q}{1+q-n} < q.$$

$\Rightarrow u_k \rightarrow u$  in  $L^s(\Omega)$

Schritt 3:

Induktion für schwache Konvergenz der  $m \times m$ -Subdeterminanten:

- $m=1$ : lt. VS:  $(Du_k)_{ij} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (Du)_{ij}$  in  $L^q(\Omega) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$ .
- z.B. Schritt  $m = n-1 \rightarrow n$ :

$\forall m \times m$ -Subdeterminanten  $M_k$  von  $Du_k$  gelte:

$$M_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M \text{ in } L^{\frac{q}{m}}(\Omega),$$

$$\text{also: } \operatorname{cof} Du_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \operatorname{cof} Du \text{ in } L^{s'}(\Omega), s' = \frac{q}{n-1}$$

- Sei  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Durch Standardapproximation von  $u_k$  durch  $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$  in (5.15) gilt  $\forall i = 1, \dots, n; k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} v \det Du_k dx &\stackrel{(5.15)}{=} - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x_j} (u_k)_i}_{\rightarrow v_{x_j} u_i \text{ in } L^s} \underbrace{(\operatorname{cof} Du_k)_{ij}}_{\rightarrow \operatorname{cof} Du \text{ in } L^{s'}} dx \\
 &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j} u_i (\operatorname{cof} Du)_{ij} dx \\
 &\stackrel{(5.15)}{=} \int_{\Omega} v \det Du dx
 \end{aligned}$$

$$\text{also: } \det Du_k \rightarrow \det Du \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (5.16)$$

- Laut VS:  $\det Du \in L^{\frac{q}{n}}(\Omega)$ ;  $\{Du_k\}$  glm. beschränkt in  $L^q(\Omega) \Rightarrow \{\det Du_k\}$  glm. beschränkt in  $L^{\frac{q}{n}}(\Omega) \Rightarrow \exists$  schwach konvergente Teilfolge.  
Wegen (5.16):  $\det Du_k \rightharpoonup \det Du$  in  $L^{\frac{q}{n}}(\Omega)$ . ■

**Bemerkung 5.2.** Lemma 5.2 liefert schwache Konvergenz von nicht-linearen Termen ( $n$ -fache Produkte in  $\det Du$ ), ermöglicht durch die Divergenz-Struktur von  $\det Du$ . Das ist Anwendung der *kompensierten Kompaktheits-Methode* von Murat, Tartar.

**Satz 5.6.** Sei  $n < q < \infty$ . Sei  $F$  glatt, nach unten beschränkt und polykonvex.  $\Rightarrow \mathcal{F}$  ist SUHS in  $W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ .

*Beweis. Idee:*

Sei  $u_k \rightharpoonup u$  in  $W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Lt. Lemma 5.2:

$$\det Du_k \rightharpoonup \det Du \text{ in } L^{\frac{q}{n}}(\Omega).$$

analog zu Satz 5.2 (von Tonelli):

Sei oBdA  $F \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(u_k) &= \int_{\Omega} F(x, u_k, Du_k, \det Du_k) dx \stackrel{F \geq 0}{\geq} \int_{T_\varepsilon} F(x, u_k, Du_k, \det Du_k) dx \\
 &\stackrel{F \text{ polykonvex}}{\geq} \int_{T_\varepsilon} F(x, u_k, Du, \det Du) dx \\
 &+ \int_{T_\varepsilon} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial p}(x, u_k, Du, \det Du)}_{\text{konv. glm. auf } T_\varepsilon} : \underbrace{(Du_k - Du)}_{\rightarrow 0 \text{ in } L^q} \\
 &+ \int_{T_\varepsilon} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial r}(x, u_k, Du, \det Du)}_{\text{konv. glm. auf } T_\varepsilon} \underbrace{(\det Du_k - \det Du)}_{\rightarrow 0 \text{ in } L^{q/n}} dx.
 \end{aligned}$$

Letzte 2 Integrale  $\rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . ■

**Folgerung 5.1.** Sei  $n < q < \infty$ .  $F$  erfülle die Koerzivitätsungleichung (A2) und sei polykonvex, glatt. Sei  $\{\} \neq U \subset W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ .

$\Rightarrow \exists u \in U$  mit  $\mathcal{F}(u) = \min_{w \in U} \mathcal{F}(w)$ .

Referenzen: [St] §I.3, [Ev1] §8.2.4, [RR] §10.2.1

## 5.5 Hindernisprobleme / Variationsungleichungen

**Beispiel 5.4. Variationsungleichung für skalare Funktion:**

ges: Minima der glatten Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow$  3 Möglichkeiten:

- (i)  $f'(x_0) = 0$  , für  $x_0 \in (a, b)$ ;
- (ii)  $f'(x_0) \geq 0$  , für  $x_0 = a$ ;
- (iii)  $f'(x_0) \leq 0$  , für  $x_0 = b$ .

Zusammenfassung:

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \tag{5.17}$$

Beachte: Für *innere Punkte*  $x_0 \in (a, b)$  gilt:  $(x - x_0)$  kann beide Vorzeichen haben, und daher: (5.17)  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ . □

- Sei  $f \in L^2(\Omega)$ . Lt. PDGI-VL (+ Bsp. 5.2):  $u \in H_0^1(\Omega)$  ist (eindeutiger) Minimierer von

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f(x)u \, dx$$

$\Leftrightarrow u \in H_0^1(\Omega)$  ist (eindeutige) Lösung der *Variationsgleichung*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

also schwache Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & , \quad \Omega \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

- betrachte nun das *Hindernisproblem*

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \, dx \xrightarrow{!} \min \quad (5.18)$$

in  $U := \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq h \text{ f.ü. in } \Omega\}$ , mit gegebenem, glatten *Hindernis*  $h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei beschränkt mit  $\partial\Omega$  glatt.  $U$  ist dann konvex und (schwach) abgeschlossen.

**Satz 5.7.** Sei  $f \in L^2(\Omega)$  und  $U \neq \{\}$   $\Rightarrow$

1. (5.18) hat eine eindeutige Lösung  $u \in U$ ,
2.  $u$  erfüllt die Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (w - u) \, dx \geq \int_{\Omega} f (w - u) \, dx \quad \forall w \in U. \quad (5.19)$$

3. (5.19) hat eine eindeutige Lösung  $u \in U$ . Die Abbildung  $f \mapsto u$  ist Lipschitz, d.h.  $\exists c > 0$  mit

$$\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.20)$$

Bem: vgl. (5.20) mit Lösungsabschätzung für  $-\Delta u = f$  (siehe PDGl-VL).

*Beweis.*

1. Existenz und Eindeutigkeit ist analog zu Bsp. 5.2.  
Schwache Abgeschlossenheit von  $U$ :

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } H_0^1(\Omega) \Rightarrow u_k \rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega);$$

$$u_k \geq h \text{ f.ü.} \Rightarrow u \geq h \text{ f.ü.} \Rightarrow u \in U.$$

2. a) sei  $w \in U$  beliebig  
 $\Rightarrow u + \tau(w - u) \in U \quad \forall 0 \leq \tau \leq 1$  (da  $U$  konvex)

Für  $\phi(\tau) := \mathcal{F}(u + \tau(w - u))$  gilt:

$$\phi(0) \leq \phi(\tau) \quad \forall 0 \leq \tau \leq 1; \text{ also } \phi'(0) \geq 0$$

Bem: Wegen der NB  $u \geq h$  wurden hier nur *einseitige Variationen* von  $u$  verwendet!

b) sei nun  $0 < \tau \leq 1$ :

$$\frac{\phi(\tau) - \phi(0)}{\tau} = \dots = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(w - u) + \frac{\tau}{2} |\nabla(w - u)|^2 - f(w - u) dx.$$

Mit  $\tau \rightarrow 0$  folgt:

$$0 \leq \phi'(0) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(w - u) - f(w - u) dx$$

3. Seien  $(u_i, f_i); i = 1, 2$  Lösungen von (5.19).

Wähle  $w = u_2$  für  $u_1$ -Ungleichung:

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla(u_2 - u_1) dx \geq \int_{\Omega} f_1(u_2 - u_1) dx$$

Index-Vertauschung, addieren

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{c} \|u_1 - u_2\|_{H_0^1}^2 &\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} (f_1 - f_2)(u_1 - u_2) dx \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L^2} \|u_1 - u_2\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

■

**Bemerkung 5.3.**

1. Typischerweise gibt es eine (relativ abgeschlossene) *Übereinstimmungsmenge*  $C := \{x \in \Omega \mid u(x) = h(x)\}$  mit dem *freien Rand*  $\partial C \cap \Omega$ .
2. (5.19) ist schwache Formulierung von  $u \geq h, -\Delta u \geq f$ , f.ü. in  $\Omega$
3. Auf der (offenen) Menge  $O := \{x \in \Omega \mid u(x) > h(x)\}$  gilt  $-\Delta u = f$ , f.ü.; d.h. die Nebenbedingung  $u \geq h$  „wirkt“ auf  $O$  nicht.

Begründung: sei  $v \in C_0^\infty(O)$  fest

$$\Rightarrow \text{für } |\tau| \text{ klein gilt: } w := u + \tau v \geq h; \text{ also } w \in U$$

$$(5.19) \Rightarrow \tau \int_O (\nabla u \cdot \nabla v - f v) dx \geq 0, \text{ für } \tau \text{ pos. und neg.}!$$

$$\Rightarrow \int_O \nabla u \cdot \nabla v - f v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(O)$$

ferner gilt:  $u \in H^2(\Omega)$ , siehe [KS]

**„Penalty“-Methode für Hindernisprobleme:**

Ziel: Approximation der Lösung  $u \in U := \{H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0\}$  von (5.18) durch nichtlineare elliptische Probleme ( $\varepsilon > 0$ ,  $H$  ... Heaviside Fkt.):

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon) &= f \quad , \quad \Omega \\ u_\varepsilon &= 0 \quad , \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.21}$$

**Satz 5.8.** Sei  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit glattem Rand. Sei  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  die (eindeutige) schwache Lösung von (5.21).

$\Rightarrow u_\varepsilon \rightharpoonup u$  in  $H_0^1(\Omega)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Beweis.*

1. a-priori Abschätzungen:

multipliziere (5.21) mit  $u_\varepsilon$ ;  $\int_\Omega \dots dx$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^-} u_\varepsilon^2 dx = \int_\Omega f u_\varepsilon dx \tag{5.22}$$

mit  $\Omega_\varepsilon^- := \{x \in \Omega \mid u_\varepsilon(x) \leq 0\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &\stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} C \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_\Omega f u_\varepsilon dx \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

aus (5.22):  $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \varepsilon > 0$

also:  $\{u_\varepsilon\}$  glm. beschränkt in  $H_0^1(\Omega)$ .

$\Rightarrow \exists$  Teilfolge mit  $u_\varepsilon \rightharpoonup w$  in  $H_0^1(\Omega)$  und  $u_\varepsilon \rightarrow w$  in  $L^2(\Omega)$ .

aus (5.22):

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^-} u_\varepsilon^2 dx \leq \int_\Omega f u_\varepsilon dx \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow u_\varepsilon^- \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  in  $L^2(\Omega)$ ; mit Konvergenzordnung  $\frac{1}{2}$ .

$\Rightarrow w \geq 0$  f.ü. in  $\Omega$ ; also  $w \in U$ .

2. Identifikation des Limes:

$u_\varepsilon$  erfüllt laut Def.:

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (5.23)$$

speziell für  $v = u_\varepsilon$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^2 H(-u_\varepsilon) \, dx = \int_{\Omega} f u_\varepsilon \, dx \quad (5.24)$$

(5.23) minus (5.24); speziell gilt  $\forall v \in U$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla (v - u_\varepsilon) + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon H(-u_\varepsilon)}_{\leq 0} \left( \overbrace{v}^{\geq 0} \underbrace{-u_\varepsilon}_{\geq 0 \text{ auf } \Omega_\varepsilon^-} \right) \, dx = \int_{\Omega} f (v - u_\varepsilon) \, dx \quad (5.25)$$

• wegen schwacher Konvergenz in  $H_0^1(\Omega)$  gilt ( $\|\nabla \cdot\|_{L^2}$  ist Norm in  $H_0^1(\Omega)$  und SUHS)  
 — ev. für weitere Teilfolge von  $\{u_\varepsilon\}$ :

$$-\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2$$

aus (5.25):

$$\begin{aligned} -\int |\nabla u_\varepsilon|^2 + \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx &\geq \int f (v - u_\varepsilon) \, dx \\ \downarrow \varepsilon \rightarrow 0 & \qquad \qquad \qquad \downarrow \varepsilon \rightarrow 0 \\ -\int |\nabla w|^2 + \nabla w \cdot \nabla v \, dx &\geq \int f (v - w) \, dx \quad \forall v \in U \end{aligned}$$

lt. Satz 5.7:  $w = u \in U$  ist *eindeutige* Lösung von (5.18).

3. Konvergenz der ganzen Folge:

folgt aus Eindeutigkeit des Limes (generelles Prinzip!):

Annahme: *nicht* die ganze Folge konvergiert

$\Rightarrow \exists 2$  Häufungspunkte, da  $\{u_\varepsilon\}$  beschränkt.

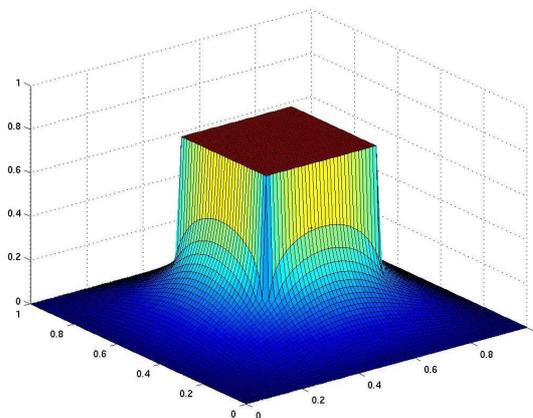
$\Rightarrow$  Widerspruch zur Eindeutigkeit des Limes.



**Anwendungen:**

1. Membran oberhalb des „Hindernisses“  $\{(x, x_{n+1}) | x_{n+1} = h(x), x \in \Omega\}$ :

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx \xrightarrow{!} \min \quad \text{in } U = \{u \in H_0^1(\Omega) | u \geq h\}$$



Minimalfläche über Quaderhindernis

2. Biegung eines Stabes (vgl. Splines):

- a) ohne Hindernis: betrachte RWP

$$\begin{cases} -u'' = f(x) := 1, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Variationsgleichung:

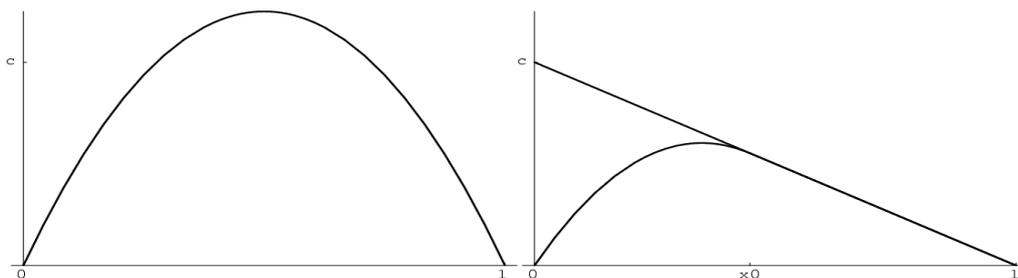
ges:  $u \in H_0^1(0,1)$  mit

$$\int_0^1 (u'v' - fv) dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Lösung:

$$u(x) = \frac{x(1-x)}{2}$$

- b) Stab soll unter dem *Hindernis*  $h(x) := c(1-x)$ ,  $c \geq 0$  liegen. Länge des Stabes nicht vorgegeben.



## Elastischer Stab ohne und mit Hindernis

Hindernis-Problem:

$$\begin{cases} -u'' = 1, & x \in (0, x_0) = O \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u(x) = h(x), & x \in [x_0, 1) = C \end{cases}$$

 $x_0$  ... freier RandVariationsungleichung (analog zu (5.19)):ges:  $u \in U := \{u \in H_0^1(0, 1) \mid u \leq h\}$  mit

$$\int_0^1 u'(w' - u') \, dx \geq \int_0^1 f(w - u) \, dx \quad \forall w \in U$$

Lösung:

$$u(x) = \begin{cases} c(1-x) - \frac{1}{2}(x-x_0)^2 & , \quad 0 \leq x \leq x_0 \\ c(1-x) = h(x) & , \quad x_0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$x_0 = \sqrt{2c}$$

Referenzen: [DL6] §XIX.1.2, [Ev1] §8.4, [GH] §I.2, [KS]

# 6 Nichtkonvexe Probleme

**Beispiel 6.1.** (vgl. Bsp. 1.5)

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 u(x)^2 + (u'(x)^2 - 1)^2 dx \xrightarrow{!} \min \quad (6.1)$$

mit der Randbedingung  $u(0) = u(1) = 0$ .

mögliche Anwendung: Aufkreuzen gegen Wind in Fluß mit quadratischem Strömungsprofil (Abb. 6.1), Ferromagnetismus, Materialwissenschaften ( $\rightarrow$  Mikrostrukturen [Mü])

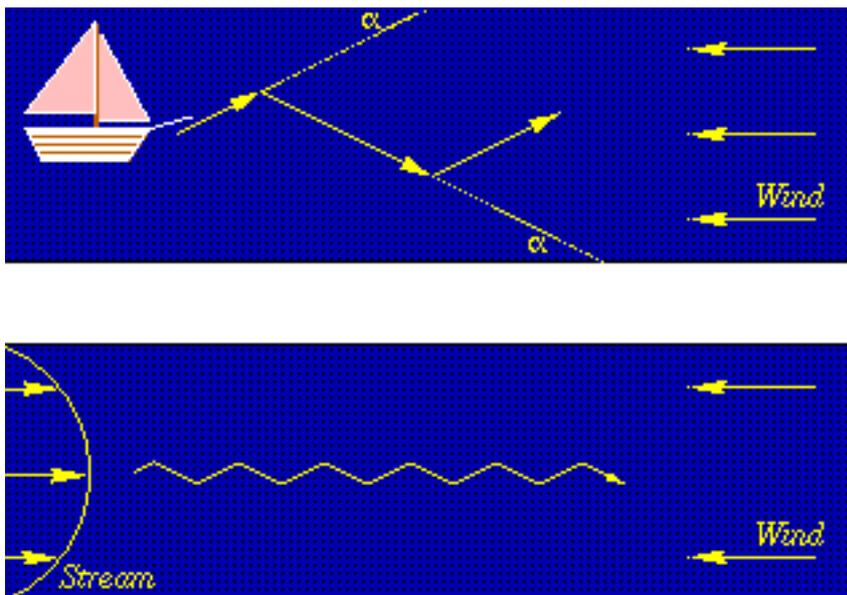


Abbildung 6.1:

Minimalfolge (Zick-Zack-Funktionen mit  $u'_n = \pm 1$ ):

$$u_n(x) = \begin{cases} x - \frac{i}{n}, & \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+\frac{1}{2}}{n}; \\ \frac{i+1}{n} - x, & \frac{i+\frac{1}{2}}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.2)$$

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{2n}$$

$$\mathcal{F}(u_n) = \int_0^1 u_n^2 dx = \frac{1}{12n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Obwohl  $u_n \rightarrow 0$  (glm. auf  $[0, 1]$ ), gilt

$$\mathcal{F}(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) = \mathcal{F}(0) = 1 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_n) = 0$$

Also:  $\mathcal{F}$  ist unstetig, *nicht* unterhalbstetig

Grund:  $F(z, p)$  *nicht* konvex in  $p$

Minimum  $u$  von  $\mathcal{F}$  müsste erfüllen:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet u = 0 \\ \bullet u' = \pm 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{unmöglich!}$$

$\Rightarrow$  Problem 6.1 unlösbar □

mögliche Auswege:

- 1) Finde (modifiziertes!) Problem bzw. Funktional, das durch Grenzwert(e) der Minimalfolgen (des Originalproblems) erfüllt/minimiert wird ( $\rightarrow$  *relaxierte Funktionale*).
- 2) Verallgemeinere den Lösungsbegriff; definiere z.B. eine "Funktion", die 0 ist aber mit "Ableitungen"  $\pm 1$  ( $\rightarrow$  *Young Maße*).

## 6.1 Relaxierte Funktionale

**Definition 6.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{F} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Die unterhalbstetige (UHS) Einhüllende oder relaxierte Funktion  $sc^- \mathcal{F}$  von  $\mathcal{F}$  ist  $\forall u \in X$  definiert durch:

$$(sc^- \mathcal{F})(u) := \sup\{\Phi(u) \mid \Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ ist UHS und } \Phi(v) \leq \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in X\}$$

Also:  $sc^- \mathcal{F}$  ist größte UHS Funktion "unterhalb" von  $\mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}$  ist UHS  $\Leftrightarrow \mathcal{F} = sc^- \mathcal{F}$ .

**Definition 6.2.**  $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt koerziv, falls jede Folge  $\{u_n\} \subset X$  mit  $\mathcal{F}(u_n) \leq C$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) einen Häufungspunkt (HP) hat.

**Satz 6.1.** Sei  $X$  topologischer Raum,  $\mathcal{F} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

$\Rightarrow$

- a) Jeder HP einer Minimalfolge von  $\mathcal{F}$  ist Minimalstelle von  $sc^- \mathcal{F}$ .  
 b) Für  $\mathcal{F}$  koerziv gilt:  $sc^- \mathcal{F}$  nimmt sein Minimum an:

$$\min_X sc^- \mathcal{F} = \inf_X \mathcal{F}$$

*Beweis.* a) Sei  $\{u_n\} \subset X$  Minimalfolge mit HP  $u_0$ , und  $\{u_{n_j}\}$  Teilfolge mit  $u_{n_j} \rightarrow u_0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow (sc^- \mathcal{F})(u_0) &\stackrel{sc^- \mathcal{F} \dots \text{UHS}}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} (sc^- \mathcal{F})(u_{n_j}) \\ &\stackrel{sc^- \mathcal{F} \leq \mathcal{F}}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{n_j}) \\ &\stackrel{\{u_{n_j}\} \text{ Min.folge}}{=} \inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Sei  $\Phi(u) \equiv \inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) \dots$  konst., UHS,  $\leq \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \Phi(u) = \inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) \leq (sc^- \mathcal{F})(u) \quad \forall u \in X \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow (sc^- \mathcal{F})(u_0) \stackrel{(6.3)}{\leq} \inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) \stackrel{(6.4)}{\leq} (sc^- \mathcal{F})(u) \quad \forall u \in X,$$

also  $u_0$  ist Minimalstelle von  $sc^- \mathcal{F}$ .

- b)  $\mathcal{F}$  koerziv  $\Rightarrow$  Minimalfolge von  $\mathcal{F}$  hat HP. ■

Idee: Falls  $\mathcal{F}$  nicht minimierbar (da nicht UHS), ist Minimierung von  $sc^- \mathcal{F}$  bestmögliche Alternative.

In Anwendungen entspricht das oft Übergang zur Modellierung von effektiven / gemittelten / makroskopischen Größen. Die (infinitesimale) Mikrostruktur wird dann ev. nicht mehr aufgelöst.

Darstellung des relaxierten Funktionals mit konvexer Einhüllender:

**Definition 6.3.** Die konvexe Einhüllende einer reellen Fkt.  $f$ ,

$$Cf(p) := \sup\{g(p) \mid g \text{ ist konvex, } g \leq f\},$$

ist die "größte" konvexe Fkt.  $\leq f$ .

**Satz 6.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u_0 \in W^{1,q}(\Omega)$  für ein  $q \in (1, \infty)$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit

$$c_0|p|^q \leq F(p) \leq c_1|p|^q + c_2 \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \quad (6.5)$$

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} F(Du(x)) dx$$

für  $u \in U := \{u \in W^{1,q}(\Omega) \mid u - u_0 \in W_0^{1,q}(\Omega)\}$

$\Rightarrow$  relaxiertes Funktional von  $\mathcal{F}$  bez. der schwachen  $W^{1,q}$ -Topologie ist:

$$(sc^- \mathcal{F})(u) = \int_{\Omega} (CF)(Du(x)) dx.$$

*Beweis.* sehr lang: [Jo] §II.5.2

**Beispiel 6.1.** - Fortsetzung:

$$\mathcal{F}(u) := \underbrace{\int_0^1 u^2}_{=\mathcal{F}_1(u)} + \underbrace{\int_0^1 (u'^2 - 1)^2 dx}_{=\mathcal{F}_2(u)} \quad \text{auf } W_0^{1,4}(0,1)$$

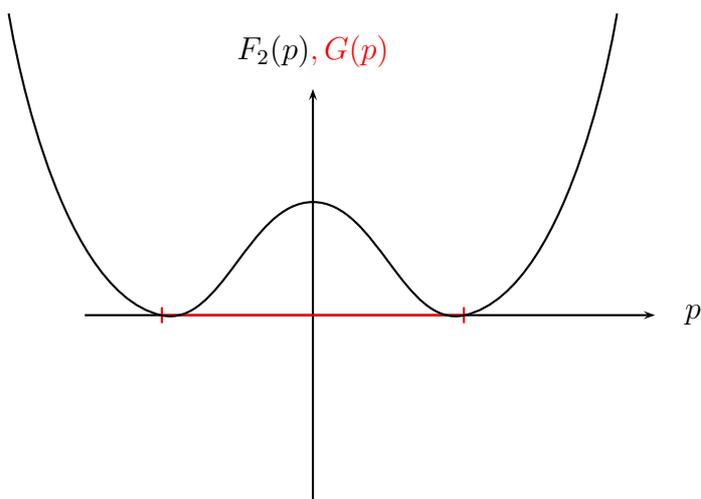
$\mathcal{F}_1(u)$  ist stetig bez. starker  $L^2$ -Konvergenz, also auch bez. schwacher  $W^{1,4}$ -Konvergenz (wegen kompakter Einbettung  $W^{1,4}(0,1) \hookrightarrow L^4(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1)$ ).

Satz 6.2 für  $\mathcal{F}_2$  ((6.5) impliziert die Wahl  $q = 4$ ) liefert mit

$$G(p) := CF_2(p) = \begin{cases} (p^2 - 1)^2 & , \quad |p| \geq 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$(sc^- \mathcal{F})(u) = \int_0^1 u^2 + G(u') dx$$

$u \equiv 0$  (= Limes der Minimalfolge (6.2)) minimiert  $sc^- \mathcal{F}$  . □



**Beispiel 6.2** (Anwendung in nichtlinearer Elastizitätstheorie).

$\Omega = \Omega' \times (0, L); \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \dots$  Referenzkonfiguration (vgl. §5.4)

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \dots$  Deformationsfeld

Betrachte Scher-Deformation

$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + \varphi(x_1, x_2))^T,$$

mit  $Du = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & 1 \end{pmatrix}$ ; mit Randbedingung  $\varphi = \varphi_0$  auf  $\partial\Omega'$ .

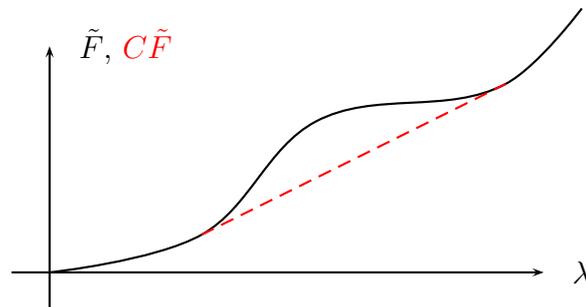
$\det Du = 1$  zeigt Inkompressibilität.

Betrachte hyperelastisches Material mit Energiedichte der Form

$$F(Du) = F_1(\text{sp}[Du \cdot Du^T]) = \tilde{F}(|\nabla\varphi(x)|),$$

$$\text{sp}(Du \cdot Du^T) = 3 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 = 3 + |\nabla\varphi|^2$$

In Anwendung:  $\tilde{F}(0) = 0, \tilde{F}'(\lambda) \geq 0$  aber  $\tilde{F}$  nicht konvex, z.B.:



relaxiertes Problem:

$$(sc^- \mathcal{F})(u) = \int_{\Omega'} C\tilde{F}(|\nabla\varphi(x)|) dx \xrightarrow{!} \min$$

□

Referenzen: [RR] §10.2.2, [Gr] §3.4, [Jo] §II.5, [Da] §A.2.1

## 6.2 $\Gamma$ -Konvergenz

Frage: Es gelte  $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$  in geeignetem Sinn.

Welcher Konvergenzbegriff " $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$ " impliziert Konvergenz der Infima  $m_n := \inf_{u \in X} \mathcal{F}_n(u) \rightarrow$

$m := \inf_{u \in X} \mathcal{F}(u)$  bzw. der Minimalstellen  $u_n \rightarrow u$  (falls existent) ?

- $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}$  glm. auf  $X \Rightarrow m_n \rightarrow m$ .
- Sei  $\mathcal{F}_n = \int_{\Omega} F_n(x, \nabla u(x)) dx$ ;  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt; für f.a.  $x \in \Omega$ :  $F_n(x, \cdot)$  konvex auf  $\mathbb{R}^n$ .  $\forall p \in \mathbb{R}^n$  gelte:  $F_n(\cdot, p) \rightarrow F(\cdot, p)$  punktweise f.ü. in  $\Omega$  (+ technische Bed.)  
 $\Rightarrow u_n \rightarrow u, m_n \rightarrow m$  (Details: Th. 5.14, [DM]).

Beide Konvergenzbegriffe für viele Anwendungen zu stark, trotzdem  $m_n \rightarrow m$  möglich:

**Beispiel 6.3.**  $\Omega = (0, 1)$ ,  $F_n(x, p) = (2 + \sin nx)p^2 \rightarrow F(p) = 2p^2$ ,  $U := \{u \in H^1(0, 1) \mid u(0) = 0, u(1) = 1\}$ .

Aus expliziter Lösung der EL-Gleichung:  
 $m_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{3}$  aber  $m = \mathcal{F}(u \equiv x) = 2 \int_0^1 (u')^2 dx = 2$ .

Richtiger “Variationslimes” des Homogenisierungsproblems  $\{\mathcal{F}_n\}$  berechenbar (Details: Ex. 25.4, [DM]; vgl. Satz 6.5):

$\tilde{\mathcal{F}}(u) = \sqrt{3} \int_0^1 (u')^2 dx \Rightarrow$  Konvergenz der Minima und Minimalstellen. □

**Definition 6.4.** Sei  $X$  topologischer VR, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom<sup>1</sup> (AA) erfüllt. Sei  $\mathcal{F}_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $(n \in \mathbb{N})$  eine Folge von Funktionalen.  $\mathcal{F}_n$  heißt  $\Gamma$ -konvergent gegen  $\mathcal{F}$ ,

$$\mathcal{F} = \Gamma - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n,$$

wenn

(i)  $\forall$  Folgen  $(u_n)$  mit  $u_n \rightarrow u \in X$ :

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n);$$

(ii)  $\forall u \in X : \exists$  Folge  $u_n \rightarrow u$  mit

$$\mathcal{F}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n).$$

Bem: Laut (i) ist  $\mathcal{F}$  eine “gemeinsame asymptotische untere Schranke” für die  $\mathcal{F}_n$ ; (ii) garantiert deren Optimalität.

**Lemma 6.1.** Der  $\Gamma$ -Limes ist (falls existent) eindeutig.

*Beweis.* Seien  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  2  $\Gamma$ -Limiten von  $(\mathcal{F}_n)$  mit  $\mathcal{F}(u) < \mathcal{G}(u)$ .

Laut (ii):  $\exists$  Folge  $u_n \rightarrow u$  mit

$$\mathcal{F}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n) < \mathcal{G}(u) \stackrel{(i)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n)$$

Widerspruch. ■

---

<sup>1</sup> $\forall x \in X : \exists$  abzählbare Umgebungsbasis, d.h.  $\exists$  Folge  $U_j, j \in \mathbb{N}$  von offenen Umgebungen, sodass  $\forall$  offenen Umgebungen  $U$  mit  $x \in U$  gilt:  $U_j \subset U$  für einen Index  $j \in \mathbb{N}$ .

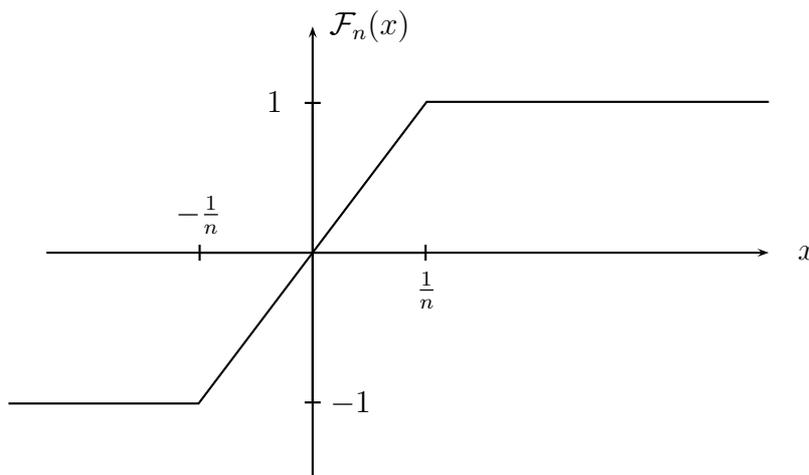
**Bemerkung 6.1.** Die schwache Topologie auf beschränkten Mengen von  $L^p(\Omega)$ ,  $W^{k,p}(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$  erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Aber:  $\infty$ -dimensionale Banachräume (mit der schwachen Topologie) erfüllen es *nicht* (siehe §1 in [DF], §8 in [DM]; §II.6.1 in [Jo]).

**Beispiel 6.4.**  $\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_n(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \geq \frac{1}{n} \\ nx & , \quad -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -1 & , \quad x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\Gamma - \lim \mathcal{F}_n)(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ -1 & , \quad x \leq 0 \end{cases} ;$$

da  $x_n := -\frac{1}{n} \rightarrow 0 =: x$ ,  $\lim \mathcal{F}_n(-\frac{1}{n}) = -1 = \mathcal{F}(0)$ .  
Aber punktweiser Limes:  $\mathcal{F}(x) = \text{sgn}(x)$ .



□

**Beispiel 6.5.**  $\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}_n(x) = \sin nx \Rightarrow (\Gamma - \lim \mathcal{F}_n)(x) = -1$ ; aber  $\mathcal{F}_n$  konvergiert *nicht* punktweise; schwacher Limes = 0.

lt. Def.

$$(i) \quad \mathcal{F}(x) = -1 \leq \underbrace{\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(x_n)}_{\geq -1} \quad \checkmark$$

$$(ii) \quad \mathcal{F}_n\left(\underbrace{\frac{3+4k}{2n}\pi}_{=: x_{k,n}}\right) = -1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Jedes  $x \in \mathbb{R}$  kann in  $\{x_{k,n}\}$  bel. gut approximiert werden; also

$$\mathcal{F}(x) = -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(x_n). \quad \square$$

**Beispiel 6.6.**  $X$  erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Sei

$$\mathcal{F}_n \equiv \mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$$

eine konst. Folge  $\Rightarrow \Gamma - \lim \mathcal{F}_n = sc^- \mathcal{F}$ , die relaxierte Fkt., also ev. anders als  $\mathcal{F}$ ! (siehe Satz 6.4)  $\square$

**Definition 6.5.** Sei  $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  mit  $\inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) > -\infty$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  fest.  $u \in X$  heißt  $\varepsilon$ -Minimierer von  $\mathcal{F}$ , falls

$$\mathcal{F}(u) < \inf_{v \in X} \mathcal{F}(v) + \varepsilon$$

**Bemerkung 6.2.**  $\varepsilon$ -Minimierer  $\exists$  immer.  $u$  ist Minimierer  $\Leftrightarrow u$  ist  $\varepsilon$ -Minimierer  $\forall \varepsilon > 0$ .

**Satz 6.3.**  $X$  erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Seien

$$\mathcal{F}, \mathcal{F}_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \mathcal{F} = \Gamma - \lim \mathcal{F}_n.$$

Sei  $\inf_{v \in X} \mathcal{F}_n(v) > -\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Sei  $u_n$  ein  $\varepsilon_n$ -Minimierer von  $\mathcal{F}_n$ .

Seien  $\varepsilon_n \rightarrow 0, u_n \rightarrow u \in X$ .

$\Rightarrow u$  ist Minimalstelle von  $\mathcal{F}, \mathcal{F}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n)$ .

*Beweis.* 1) AN:  $\exists u' \in X$  mit  $\mathcal{F}(u') < \mathcal{F}(u)$ .

Da  $\mathcal{F} = \Gamma - \lim \mathcal{F}_n : \exists$  Folge  $u'_n \rightarrow u'$  mit  $\lim \mathcal{F}_n(u'_n) = \mathcal{F}(u')$ .

Setze  $\delta := \frac{1}{4}(\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u'))$ .

Für  $n$  groß gilt  $\varepsilon_n < \delta$ , und:

$$\mathcal{F}_n(u'_n) < \mathcal{F}(u') + \delta, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{F}_n(u_n) > \mathcal{F}(u) - \delta \quad (\text{lt. (i) von Def. 6.4}) \quad (6.7)$$

Da  $u_n$   $\varepsilon_n$ -Minimierer von  $\mathcal{F}_n$ :

$$\mathcal{F}_n(u'_n) > \mathcal{F}_n(u_n) - \varepsilon_n > \mathcal{F}_n(u_n) - \delta \stackrel{(6.7)}{>} \mathcal{F}(u) - 2\delta. \quad (6.8)$$

Aus (6.6), (6.8)  $\mathcal{F}(u) < \mathcal{F}(u') + 3\delta = \frac{3}{4}\mathcal{F}(u) + \frac{1}{4}\mathcal{F}(u')$ , also Wid. zur AN.

$\Rightarrow u$  ist Minimierer von  $\mathcal{F}$ .

2) AN:  $\mathcal{F}(u) \neq \lim \mathcal{F}_n(u_n)$  (oder  $\exists \lim$ )

$\Rightarrow$  Für Teilfolge gilt  $\mathcal{F}(u) < \lim \mathcal{F}_n(u_n)$  (wegen (i), Def. 6.4).

Aus (ii) von Def. 6.4:  $\exists$  Folge  $u'_n \rightarrow u$  mit  $\mathcal{F}(u) = \lim \mathcal{F}_n(u'_n)$

$\Rightarrow$  ähnlicher Wid. wie oben zur  $\varepsilon_n$ -Minimierer-Eigenschaft von  $u_n$ . ■

**Korollar 6.1.**  $X$  erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Seien  $\mathcal{F}, \mathcal{F}_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und  $\mathcal{F} = \Gamma - \lim \mathcal{F}_n$ . Sei  $u_n$  Minimierer von  $\mathcal{F}_n$ .

Falls  $u_n \rightarrow u \Rightarrow u$  minimiert  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_n)$ .

**Satz 6.4.**  $X$  erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Sei  $\mathcal{F} = \Gamma - \lim \mathcal{F}_n$ .

$\Rightarrow \mathcal{F}$  ist UHS.

*Beweis.* Andernfalls  $\exists u \in X$  und eine Folge  $u_m \rightarrow u$  mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_m) < \mathcal{F}(u). \quad (6.9)$$

Wegen  $\Gamma$ -Konvergenz:  $\forall m$  gilt:  $\exists$  Folge  $u_{m,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_m$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(u_{m,n}) = \mathcal{F}(u_m).$$

Der Einfachheit halber sei  $-\infty < \lim \mathcal{F}(u_m), \mathcal{F}(u) < \infty$ .

Sei  $\delta := \frac{1}{4}(\mathcal{F}(u) - \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_m)) \stackrel{(6.9)}{>} 0$

$\forall m \in \mathbb{N} : \exists n_m$  mit

$$\mathcal{F}_{n_m}(u_{m,n_m}) - \mathcal{F}(u_m) < \delta, \quad (6.10)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_{m,n_m} = u, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} n_m = \infty.$$

$\Rightarrow$  Wegen  $\Gamma$ -Konvergenz von  $(\mathcal{F}_{n_m})$ :

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{n_m}(u_{m,n_m}) \quad (6.11)$$

Aus (6.9): wähle  $\tilde{m}$  so groß, dass

$$\mathcal{F}(u_{\tilde{m}}) < \mathcal{F}(u) - 3\delta, \quad (6.12)$$

und aus (6.11):

$$\mathcal{F}_{n_{\tilde{m}}}(u_{\tilde{m},n_{\tilde{m}}}) > \mathcal{F}(u) - \delta. \quad (6.13)$$

(6.10),(6.12),(6.13) liefern Wid.  $\Rightarrow \mathcal{F}$  ist UHS. ■

Referenzen: [Jo] §II.6.1, [DM]

### 6.3 Anwendung der $\Gamma$ -Konvergenz: Homogenisierung

Ziel: Variationsproblem auf Gebiet mit vielen kleinen Löchern durch Homogenisierung (d.h.  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) lösen (z.B. poröses Medium)

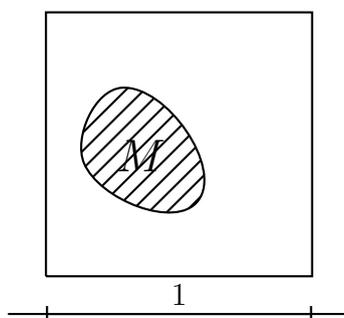


Abbildung 6.2: Loch  $M \subset (0, 1)^d$  auf Längenskala 1

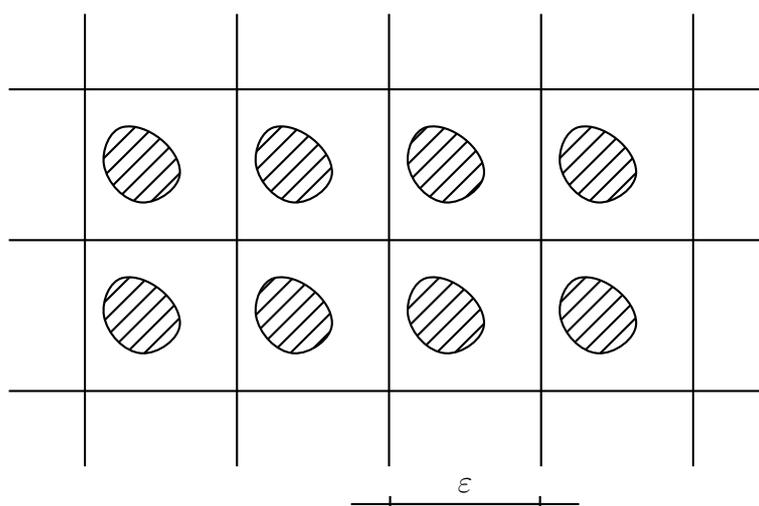


Abbildung 6.3:  $M_\varepsilon := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^d} \varepsilon(M + m)$  ... periodisches Gitter von Löchern der Skala  $\varepsilon$

sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ;  $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus (M_\varepsilon \cap \Omega)$  ... beschränktes Gebiet mit vielen kleinen Löchern

sei

$$\alpha(x) := \chi_{\mathbb{R}^d \setminus M_1}(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus M_1 \\ \infty & , \quad x \in M_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  ... "charakteristische" Funktion von  $\mathbb{R}^d \setminus M_\varepsilon$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u) := \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^2(x) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Sei  $f \in L^2(\Omega)$  geg.  $\Rightarrow$

Minimierer von

$$\mathcal{G}_\varepsilon(u) := \mathcal{F}_\varepsilon(u) - \int_{\Omega} f u dx$$

erfüllen

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{f}{\varepsilon^2} & , \quad \Omega_\varepsilon \\ u = 0 & , \quad \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}$$

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup (\partial M_\varepsilon \cap \Omega)$$

Die RB auf  $\partial\Omega$  folgt aus  $u \in H_0^1(\Omega)$ , die RB auf  $\partial M_\varepsilon$  wird durch  $\alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u^2(x)$  im Funktional erzwungen.

**Satz 6.5.** *Bez. der schwachen  $L^2(\Omega)$ -Konvergenz gilt*

$$\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F},$$

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\mu(M)} \int_{\Omega} u^2(x) dx,$$

$$\text{mit } \mu(M) := \int_{(0,1)^d} \eta(x) dx \stackrel{\text{part. Int. (6.14)}}{=} \int_{(0,1)^d \setminus M} |\nabla \eta(x)|^2 dx > 0 .$$

$\eta \geq 0$  löst:

$$\begin{cases} \Delta \eta = -1 & , \quad (0,1)^d \setminus M \\ \eta = 0 & , \quad M \\ \text{periodische RBen auf } \partial(0,1)^d \end{cases} \quad (6.14)$$

$\eta$  wird  $\mathbb{Z}^d$ -periodisch auf  $\mathbb{R}^d$  fortgesetzt,  $\eta \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Bem:  $\int f u dx$  ist schwach stetig (also insbes. UHS). Laut Bsp. 6.6 darf konstanter Term von  $\lim \mathcal{F}_\varepsilon$  abgezogen werden  $\Rightarrow \mathcal{G}_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{G}$  mit

$$\mathcal{G}(u) = \frac{1}{2\mu(M)} \int_{\Omega} [u - \mu(M)f]^2 dx - \frac{\mu(M)}{2} \int_{\Omega} f^2 dx \xrightarrow{!} \min$$

$\mathcal{G}$  lässt sich in  $L^2(\Omega)$  minimieren (aber i.A. nicht in  $H_0^1(\Omega)$ ):  $u_{\min}(x) = \mu(M)f(x)$ .

*Beweisidee.*

$$\eta_\varepsilon(x) := \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\eta} \equiv \int_{(0,1)^d} \eta(x) dx = \mu(M) \text{ in } L^2(\Omega) \quad (\text{detaillierter Bew.: §II.5.2, [Jo]})$$

Teil (ii) der  $\Gamma$ -Konvergenz-Def:

Sei  $u \in L^2(\Omega) =: X$ .

zz:  $\exists$  Folge  $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$  in  $L^2(\Omega)$  mit  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathcal{F}(u)$ .

Durch Approximation sei sogar  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

$$u_\varepsilon := \frac{1}{\mu(M)} \eta_\varepsilon u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \text{ in } L^2(\Omega)$$

und  $u_\varepsilon = 0$  auf  $M_\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{1}{\mu(M)^2} \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} (u^2 |\nabla \eta_\varepsilon|^2 + 2u \eta_\varepsilon \nabla u \cdot \nabla \eta_\varepsilon + \eta_\varepsilon^2 |\nabla u|^2) dx \end{aligned}$$

Limes vom 1. Term:

Sei  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  offen:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx &\stackrel{\varepsilon \text{ klein}}{\sim} \frac{\text{vol}(\tilde{\Omega})}{\varepsilon^d} \int_{(0,\varepsilon)^d \setminus M_\varepsilon} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx = \frac{\text{vol}(\tilde{\Omega})}{\varepsilon^2} \int_{(0,1)^d \setminus M} |\nabla \eta|^2 dx \\ \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx &= \text{vol}(\tilde{\Omega}) \int_{(0,1)^d \setminus M} |\nabla \eta|^2 dx = \text{vol}(\tilde{\Omega}) \mu(M) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Sei  $u$  (lt. AN stetig) durch Stufenfunktion approximiert ( $u$  jeweils const. auf Mengen  $\tilde{\Omega}_j$ ).

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} u^2 |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx = \mu(M) \int_{\tilde{\Omega}} u^2 dx \quad (6.16)$$

Limes vom 3. Term:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} \eta_\varepsilon^2 |\nabla u|^2 dx = 0, \quad (6.17)$$

da  $\eta_\varepsilon \in L^\infty$  (glm. in  $\varepsilon$ ).

Limes vom 2. Term:

Mit Cauchy-Schwarz und (6.16), (6.17):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u \eta_\varepsilon \nabla u \cdot \nabla \eta_\varepsilon dx = 0$$

insges:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2\mu(M)} \int_{\Omega} u^2 dx = \mathcal{F}(u) \quad (6.17)$$

Teil (i) der  $\Gamma$ -Konvergenz-Def:

Sei Folge  $v_\varepsilon$  so, dass  $v_\varepsilon|_{M_\varepsilon} \equiv 0$  und  $v_\varepsilon \rightharpoonup u$  in  $L^2(\Omega)$ .

z.z.:

$$\frac{1}{2\mu(M)} \int_{\Omega} u^2 = \mathcal{F}(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon) \quad (6.18)$$

Durch Approximation sei sogar  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Sei (wie oben)  $u_\varepsilon := \frac{1}{\mu(M)} \eta_\varepsilon u$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon) + \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \geq \varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\mu(M)} \underbrace{\int_{\Omega_\varepsilon} (\eta_\varepsilon \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla u + u \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon) dx}_{(*)} \end{aligned}$$

Mit (6.17) für  $\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon)$ :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon) + \frac{1}{2\mu(M)} \int_{\Omega} u^2 dx \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{\mu(M)} \int_{\Omega_\varepsilon} u \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla \eta_\varepsilon dx, \quad (6.19)$$

da (\*) gegen 0 geht, weil:

$$(*) \stackrel{\text{part.Int.}}{=} \underbrace{- \frac{\varepsilon^2}{\mu(M)} \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon [\nabla \eta_\varepsilon \cdot \nabla u + \eta_\varepsilon \Delta u] dx}_{(**)}$$

Für (\*\*) gilt mit Cauchy-Schwarz und (6.15):

$$\left| \varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon \nabla u \cdot \nabla \eta_\varepsilon dx \right| \leq \varepsilon \left( \int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{|\nabla u|^2}_{\in L^\infty} \underbrace{v_\varepsilon^2}_{\text{glm. beschr. in } L^1} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \underbrace{\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \eta_\varepsilon|^2 dx}_{\lim=\text{vol}(\Omega)\mu(M)} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad (6.20)$$

Für den 2. Term von (\*) gilt:

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \underbrace{v_\varepsilon}_{\text{glm. beschr. in } L^2} \underbrace{\eta_\varepsilon}_{\text{glm. beschr. in } L^\infty} \underbrace{\Delta u}_{\in L^2} dx \rightarrow 0.$$

Aus (6.14) folgt

$$\varepsilon^2 \Delta \eta_\varepsilon = -1 \text{ in } \Omega_\varepsilon \quad (6.21)$$

part. Integration in (6.19):

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon(v_\varepsilon) + \underbrace{\frac{1}{2\mu(M)} \int u^2 dx}_{=\mathcal{F}(u)} &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{\varepsilon^2}{\mu(M)} \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon (\nabla u \cdot \nabla \eta_\varepsilon + u \Delta \eta_\varepsilon) dx \right) \\ &\stackrel{(6.20),(6.21)}{=} \frac{1}{\mu(M)} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon u dx \\ &\stackrel{v_\varepsilon \rightharpoonup u}{=} \frac{1}{\mu(M)} \int_{\Omega} u^2 dx = 2\mathcal{F}(u) \end{aligned}$$

⇒ (6.18) folgt. ■

Referenzen: [Jo] §II.6.2, [Bra] §6.1

## 6.4 Young Maße

Ziel: beschreibe makroskopische Limes-Eigenschaften von Minimalfolgen  $w_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , aber ohne “unnötige (mikroskopische) Details”

Forderung an ‘‘Grenzobjekt’’ ( $\rightarrow$  Young Maß): richtige Darstellung der Limiten von

$$\int_{\tilde{\Omega}} f(w_n) dx \quad \forall \text{ stetigen } f, \forall \text{ messbaren } \tilde{\Omega} \subset \Omega.$$

Motivation: Seien  $\{w_n\} \subset L^\infty(\Omega)$  beschränkt und  $f \in C(\mathbb{R})$ . Dann ist auch  $\{f(w_n)\} \subset L^\infty(\Omega)$  beschränkt und  $\exists \{w_{n_k}\}$ :

$$w_{n_k} \xrightarrow{*} w, \quad f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f} \quad \text{in } L^\infty(\Omega).$$

Problem: I.A. gilt *nicht*  $\bar{f} = f(w)$ .

Ausweg: Verallgemeinere ‘‘ $f(w)$ ’’, so dass  $\bar{f} = f(w)$  gilt ( $\rightarrow$  Young Maß).

Bem: Wenn  $\{w_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ ,  $f \in C(\mathbb{R})$  und  $w_n \rightarrow w$  f.ü., dann gilt  $f(w_n) \rightarrow f(w)$  f.ü. und damit wegen  $f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f}$  in  $L^\infty(\Omega)$ :  $\bar{f} = f(w)$ .

Wir haben jedoch nur  $w_{n_k} \xrightarrow{*} w$ , was schwächer als  $w_n \rightarrow w$  f.ü. ist.

Notationen:

$C_0(\mathbb{R})$  ... stetige Funktionen mit kompaktem Träger (Alternative: deren  $L^\infty$ -Abschluss);

$\mathcal{M}(\mathbb{R})$  ... signierte Radon Maße<sup>2</sup> mit endlicher Masse; können mit  $C_0(\mathbb{R})'$  identifiziert werden - mit Dualitätsklammer  $\langle \mu, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f d\mu$  (siehe [Bre], Kommentare zu §IV).

**Definition 6.6.** Die Abbildung  $\mu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})$  heißt schwach\* messbar, wenn  $x \mapsto \langle \mu(x), f \rangle$  messbar ist  $\forall f \in C_0(\mathbb{R})$ .

**Satz 6.6** (Fundamentalsatz für Young Maße). Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K \subset \mathbb{R}$  beschränkt und offen, sei  $w_n : \Omega \rightarrow K$  eine Folge von  $L^\infty(\Omega)$ -Funktionen.

$\Rightarrow \exists$  Teilfolge  $w_{n_k}, \exists$  schwach\* messbare Abbildung  $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\bar{K})$  mit

$$i) \nu(x) \geq 0, \quad \int_{\bar{K}} d\nu(x) = 1 \quad \text{für f.a. } x \in \Omega \quad (\text{also Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen})$$

ii)  $\forall f \in C(\bar{K}) \subset C_0(\mathbb{R})$  gilt:

$$f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f} \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad \text{mit } \bar{f}(x) := \langle \nu(x), f \rangle = \int_{\bar{K}} f d\nu(x), \quad \text{für f.a. } x \in \Omega \quad (6.22)$$

$$\text{d.h. } \forall g \in L^1(\Omega) : \int_{\Omega} g(x) f(w_{n_k}(x)) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x) \bar{f}(x) dx$$

<sup>2</sup>Ein Maß  $\mu$  auf einer  $\sigma$ -Algebra von Borel Mengen eines topologischen Hausdorff Raumes ist Radon Maß, wenn es *innen regulär* (d.h.  $\forall$  Borel Mengen  $B$  gilt:  $\mu(B) = \sup_{K \subset B, K \text{ kompakt}} \mu(K)$ ) und *lokal endlich* ist (d.h. jeder Punkt hat eine Umgebung mit endlichem Maß).

*Beweis-Idee:* definiere  $W_n(x) := \delta_{w_n(x)}$ ,  $x \in \Omega$

$$\Rightarrow \|W_n(x)\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} dW_n(x) = 1, \quad x \in \Omega$$

$$\langle W_n(x), f \rangle = f(w_n(x)) \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}) \quad (6.23)$$

also:  $\{W_n\} \subset L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$  ... schwach\* messbare Abbildungen, die (essentiell) beschränkt sind

es gilt:  $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R})) = L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}))'$  mit Dualität

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \langle \mu(x), \varphi(x) \rangle dx.$$

lt. Satz von Alaoglu:  $\exists$  Teilfolge

$$W_{n_k} = \delta_{w_{n_k}(\cdot)} \xrightarrow{*} \nu \text{ in } L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R})) \quad (6.24)$$

Norm ist schwach\* UHS  $\Rightarrow \|\nu(x)\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} \leq 1$  für f.a.  $x \in \Omega$ .

es gilt sogar  $\|\nu(x)\|_{\mathcal{M}(\bar{\mathbb{R}})} = 1$  (siehe Ref. in [Mü] Th. 3.1, [RR] §10.2).

Seien  $g \in L^1(\Omega)$ ,  $f \in C_0(\mathbb{R})$ .

bezeichne  $g \otimes f \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}))$ , mit  $x \mapsto g(x)f$ .

$$\int_{\Omega} g(x)f(w_{n_k}(x))dx \stackrel{(6.23)}{=} \langle W_{n_k}, g \otimes f \rangle \stackrel{(6.24)}{\longrightarrow} \int_{\Omega} g(x)\langle \nu(x), f \rangle dx \quad (6.25)$$

also gilt (ii).

betrachte (6.25)  $\forall f \geq 0, g \geq 0 \Rightarrow \nu(x) \geq 0$  f.ü.

**Bem.:**  $g \otimes f$  mit  $g \in L^1(\Omega)$ ,  $f \in C_0(\mathbb{R})$  ist dicht in  $L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R})) \Rightarrow$  (6.25) ist äquivalent zu  $W_{n_k} \xrightarrow{*} \nu$  in  $L_w^\infty(\Omega; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ . ■

**Bemerkung 6.3.** 1) Die Abbildung  $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})$  heißt das durch  $\{w_{n_k}\}$  erzeugte *Young Maß*. Das ist ein parametrisiertes Maß (mit Parameter  $x \in \Omega$ ).

2) TF  $\{w_{n_k}\}$  und Limes  $\nu$  i.A. *nicht* eindeutig.

3) Die Funktionen  $w_n$  haben Werte in  $\mathbb{R}$ , deren "Limes" aber in  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  - also nur Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Werten.

4)  $\nu(x_0) \dots$  Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Wert in der Folge  $w_{n_k}(x)$ ,  $x \in B_r(x_0)$  zu finden, im Limes  $k \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$ .

- 5) In (6.22): richtiger Limes von allen nichtlinearen Funktionen  $f$  einer oszillatorischen/schwach konvergenten Folge  $\{w_{n_k}\}$ . Das ist hier möglich, da der Limes  $\nu$  in einem "höher dimensionalen Raum" liegt als  $\{w_{n_k}\}$ .

**Korollar 6.2.** Die Folge  $\{w_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ ,  $w_n : \Omega \rightarrow K$  erzeuge das Young Maß  $\nu : \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\bar{K})$ . Dann gilt:

$$w_n \rightarrow w \text{ im Maß}^3 \Leftrightarrow \nu(x) = \delta_{w(x)} \quad f.\ddot{u}.$$

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : Sei  $w_n \rightarrow w$  im Maß  $\Rightarrow f(w_n) \rightarrow f(w)$  im Maß  $\forall f \in C_0(\mathbb{R})$  (da jedes  $f$  glm. stetig auf  $\text{supp } f$ )

andererseits aus (6.22):  $f(w_n) \xrightarrow{*} \langle \nu(\cdot), f \rangle$  in  $L^\infty(\Omega)$

$\Rightarrow \forall f \in C_0(\mathbb{R}) : \langle \nu(x), f \rangle = f(w(x))$  f.ü. in  $\Omega \Rightarrow \nu(x) = \delta_{w(x)}$

$\Leftarrow$ : [Mü] Cor. 3.2 ■

**Bemerkung 6.4.** 1) Sei  $\{w_n\} \subset L^\infty(\Omega; K)$  und zusätzlich  $w_n \rightarrow w$  im Maß. Dann:  $\nu(x) = \delta_{w(x)}$  (also ein *triviales* Young Maß) und für  $f \in C(\bar{K})$ :

$$f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f} \text{ in } L^\infty(\Omega) \quad \text{mit} \quad \bar{f}(x) := \int_{\bar{K}} f d\nu(x) = \int_{\bar{K}} f d\delta_{w(x)} = f(w(x)).$$

Das obige Ziel,  $\bar{f}$  mit  $f(w)$  zu identifizieren, ist also (trivialerweise) erreicht.

- 2) Sei  $\{w_n\} \subset L^\infty(\Omega; K)$ . Dann:  $w_{n_k} \xrightarrow{*} w$  in  $L^\infty(\Omega)$  und nach dem Fundamentalsatz für  $f := id$ :

$$w_{n_k} = f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f} = \bar{id}, \quad \bar{id}(x) := \int_{\bar{K}} id d\nu(x) = \int_{\bar{K}} y d\nu_x(y),$$

wobei  $\nu_x = \nu(x) \in \mathcal{M}(\bar{K})$ .  $\Rightarrow w(x) = \int_{\bar{K}} y d\nu_x(y)$ .

Andererseits für  $f \in C(\bar{K})$ :

$$f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f}, \quad \bar{f}(x) := \int_{\bar{K}} f d\nu(x) = \int_{\bar{K}} f(y) d\nu_x(y).$$

In diesem Sinne *definieren* wir

$$f(w(x)) := \int_{\bar{K}} f(y) d\nu_x(y), \quad \text{motiviert durch } w(x) = \int_{\bar{K}} y d\nu_x(y).$$

Also:  $f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} f(w)$  in  $L^\infty(\Omega)$ , aber " $f(w)$ " geeignet definiert!

---

<sup>3</sup> $w_n \rightarrow w$  im Maß:  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \text{vol} \{x \in \Omega \mid |w_n(x) - w(x)| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Beispiel 6.1** (Fortsetzung).

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 u^2 + (u^2 - 1)^2 dx$$

Sei  $\{u_n\}$  beliebige Minimalfolge mit:

$$\mathcal{F}(u_n) \rightarrow 0, u_n(0) = u_n(1) = 0. \quad (6.26)$$

Ziel: identifiziere Young Maß

Sei  $w_n := u'_n \Rightarrow \{w_n\}$  glm. beschränkt in  $L^4(0, 1)$ .

Sei zusätzlich  $\{u_n\}$  so, dass  $\{w_n\}$  glm. beschränkt in  $L^\infty(0, 1)$ ; zB Zick-Zack-Funktionen (6.2) mit  $K = (-2, 2)$ .

Diese AN kann durch Verallgemeinerung von Satz 6.6 (für messbare  $\{w_n\}$ ) entfernt werden (siehe [Mü]).

$\Rightarrow \exists$  TF  $\{w_{n_k}\}$ , die ein Young Maß  $\nu$  erzeugt.

Sei  $f(p) := \min((p^2 - 1)^2, 1) \in C(\bar{K}) \Rightarrow$

$$\underbrace{\mathcal{F}(u_n)}_{\rightarrow 0} = \int_0^1 u_n^2 + (w_n^2 - 1)^2 dx \geq \int_0^1 \underbrace{f(w_n)}_{\geq 0} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (6.27)$$

andererseits aus Satz 6.6:  $f(w_{n_k}) \xrightarrow{*} \bar{f} \geq 0$  in  $L^\infty(0, 1)$ , also speziell mit  $g \equiv 1$ :

$$\int_0^1 f(w_{n_k}(x)) dx \rightarrow \int_0^1 \bar{f}(x) dx \quad (6.28)$$

aus (6.27), (6.28):  $\bar{f}(x) = \langle \nu(x), f \rangle = \int_{\bar{K}} f d\nu(x) = 0$  für f.a.  $x \in (0, 1)$ .

Da  $f(p) > 0$  für  $|p| \neq 1$ :  $\text{supp } \nu(x) \subset \{-1, 1\}$  für f.a.  $x$ .

$$\Rightarrow \nu(x) = \lambda(x)\delta_{-1} + (1 - \lambda(x))\delta_1 \quad \text{f.ü.}$$

Identifikation von  $\lambda$ :

wähle  $\tilde{f}(p) := p$  in Satz 6.6:

$$\tilde{f}(w_{n_k}) = w_{n_k} \xrightarrow{*} \langle \nu(x), \tilde{f} \rangle = \int_{\bar{K}} \tilde{f} d\nu(x) = 1 - 2\lambda(x),$$

also speziell mit  $g \equiv \chi_{(0,a)} \in L^1(0,1)$ ,  $a \in (0,1)$  beliebig:

$$\int_0^a 1 \cdot w_{n_k} dx = u_{n_k}(a) \rightarrow \int_0^a 1 \cdot (1 - 2\lambda(x)) dx$$

Aus (6.26):  $u_n \rightarrow 0$  in  $L^2(0,1) \Rightarrow \lambda(x) = \frac{1}{2}$  f.ü.

$\Rightarrow \{w_{n_k}\}$  erzeugt das eindeutige (homogene) Young Maß

$$\nu(x) = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1.$$

Wegen Eindeutigkeit des Limes (hier möglich, da  $\{u_n\}$  Min.Folge von  $\mathcal{F}$ )  $\Rightarrow$  ganze Folge  $\{w_n\}$  erzeugt  $\nu$ .

Bem:  $\nu$  beschreibt eine wesentliche Eigenschaft der Minimalfolgen: deren Ableitungen sind (nahe bei)  $\pm 1$ , zu gleichen Teilen, in immer feinerer Mischung.

Das Paar  $(u, \nu)$  kann als verallgemeinerte Lösung von  $\mathcal{F}(u) \rightarrow \min$  gesehen werden.  $u'$  wird durch Wahrscheinlichkeitsmaß ersetzt; Kopplung an  $u$  via  $u'(x) = \langle \nu_x, id \rangle$  (siehe Satz 6.7).  $\square$

Anwendung: Längenberechnung (vgl. Bsp. 5.1):

Funktional für Funktionen:

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx \quad ; \quad \text{also } f(p) = \sqrt{1 + p^2}$$

Für Zick-Zack-Minimalfolge (6.2):  $\mathcal{L}(u_n) = \sqrt{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; aber für glm. Limesfunktion:  $\mathcal{L}(0) = 1$ .

Sei nun  $w_n := u'_n$  und  $\mathcal{L}(u_n) = \int_0^1 g(x) f(w_n) dx$  mit  $g \equiv 1$ . Richtige Länge des infinitesimalen Zick-Zack-Limes kann mit Young Maß erhalten werden. Wie in Bsp. 6.1:  $\nu(x) = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$  und  $f(w_n) \xrightarrow{*} \bar{f}$  in  $L^\infty(0,1)$  mit

$$\bar{f}(x) = \int_{\bar{K}} \sqrt{1 + y^2} d\nu_x(y) = \sqrt{2}, \quad x \in (0,1)$$

Erweiterung des Funktionals für Young Maße liefert:

$$“\mathcal{L}(\nu)” = \int_0^1 \underbrace{g(x)}_{\equiv 1} \bar{f}(x) dx = \sqrt{2} \quad \checkmark \quad \square$$

Betrachte

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} (f_1(\nabla u) + f_2(u)) \, dx, \quad u \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Sei  $\{u_n\} \subset W^{1,\infty}$  eine Minimalfolge mit  $u_n \xrightarrow{*} u$  in  $W^{1,\infty}(\Omega)$ . Dann generiert  $\{\nabla u_n\}$  das *Gradienten Young Maß*  $\nu: \Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

Frage: Gibt es einen Zusammenhang zwischen  $\nabla u$  und  $\nu$ ?

Ja (siehe [Ca], Th. 2.5; [Mü], § 4):

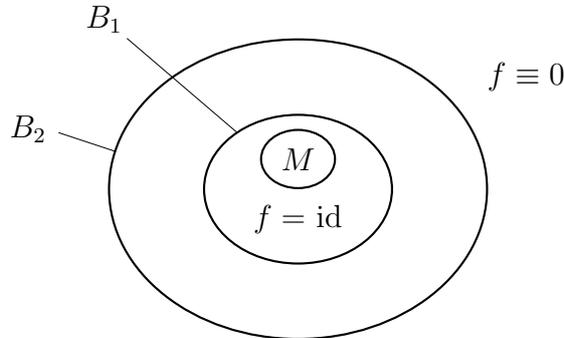
**Satz 6.7.** Seien (1)  $u_n \xrightarrow{*} u$  in  $W^{1,\infty}(\Omega)$  (für  $n \rightarrow \infty$ ),  
 (2)  $\nabla u_n \rightarrow M$  im Maß, mit  $M \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  
 d.h.:  $\forall U \supset M$  offen:  $\text{vol} \{x \in \Omega \mid \nabla u_n(x) \notin U\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

$$\Rightarrow \text{supp } \nu_x \subset M, \quad \nabla u(x) = \langle \nu_x, \text{id} \rangle \quad \text{für f.a. } x \in \Omega.$$

*Beweis.* analog zu Korollar 6.2:  $\nabla u_n \rightarrow M$  im Maß  $\Rightarrow \text{supp } \nu_x \subset M$  ( $M$  kann auch “zu groß” gewählt sein)

Seien  $B_1 \subset B_2$  offene Kugeln mit  $M \subset B_1 \subset B_2$ . Sei  $f \in C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $f = \text{id}$  in  $B_1$ ,  $f \equiv 0$  in  $\mathbb{R}^n \setminus B_2$  und

$$|f(p) - p| \leq |p| \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \tag{6.29}$$



Sei  $\omega \subset \Omega$  messbar,  $\omega_n := \{x \in \omega \mid \nabla u_n(x) \notin B_1\}$ . Aus (2) folgt  $\text{vol } \omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .  
 Laut Satz 6.6 (da  $\nabla u_n \xrightarrow{*} \nabla u$  in  $L^\infty$ ):

$$f(\nabla u_n) \xrightarrow{*} \bar{f} \text{ mit } \bar{f}(x) := \langle \nu_x, f \rangle$$

also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega} f(\nabla u_n) \, dx = \int_{\omega} \langle \nu_x, f \rangle \, dx \tag{6.30}$$

Nun ist (da  $\nabla u_n = f(\nabla u_n)$  in  $\omega \setminus \omega_n$ )

$$\left| \int_{\omega} (\nabla u_n - f(\nabla u_n)) \, dx \right| \leq \int_{\omega_n} |\nabla u_n - f(\nabla u_n)| \, dx$$

$$\stackrel{(6.29)}{\leq} \int_{\omega_n} |\nabla u_n| \, dx \leq \text{vol}(\omega_n) \underbrace{\|\nabla u_n\|_{L^\infty}}_{\text{beschr.}} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_{\omega} \langle \nu_x, f \rangle \, dx \stackrel{(6.30)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega} ([f(\nabla u_n) - \nabla u_n] + \nabla u_n) \, dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega} \nabla u_n \, dx = \int_{\omega} \nabla u \, dx.$$

Da  $\omega$  beliebig  $\Rightarrow \langle \nu_x, f \rangle = \nabla u(x)$ . Da  $\text{supp } \nu_x \subset M \subset B_1 \Rightarrow \langle \nu_x, \text{id} \rangle = \nabla u(x)$ . ■

Referenzen: [Mü] §3.1-2, [RR] §10.2, [Ev2] §1.5.3



# 7 Sattelpunktprobleme

Sattelpunktprobleme in Anwendungen:

- instabile Equilibria in physikalischen Systemen
- Variationsformulierung der stationären Stokes Gleichung (§4.3)
- periodische Trajektorien von Hamiltonschen Systemen als SPP des Wirkungsfunktionals (z.B. wenn *nicht* nach unten beschränkt) [St]

generelle Annahmen für §7:

Sei  $H$  Hilbertraum mit innerem Produkt  $(\cdot, \cdot)$ ,  $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{R}$  nichtlineares Funktional.

Sei  $\mathcal{F} \in C^1(H, \mathbb{R})$ , d.h.  $\forall u \in H : \mathcal{F}$  ist Fréchet differenzierbar an  $u$  (siehe Def. 2.4) und  $D\mathcal{F} : H \rightarrow H$  (mit Riesz-Identifikation des lin. Funktionals) ist stetig.

Notation:

1.  $\mathcal{C} := C_{loc}^{1,1}(H, \mathbb{R})$ , also  $D\mathcal{F}$  lokal Lipschitz stetig
2. Sei  $c \in \mathbb{R}$ :

$$A_c := \{u \in H \mid \mathcal{F}(u) \leq c\} \quad \dots \quad \text{sub-Niveaumenge (sub level set),}$$
$$K_c := \{u \in H \mid \mathcal{F}(u) = c, D\mathcal{F}(u) = 0\}$$

**Definition 7.1.** (a)  $u_0 \in H$  heißt kritischer Punkt von  $\mathcal{F}$ , wenn  $D\mathcal{F}(u_0) = 0$ .

(b)  $c \in \mathbb{R}$  heißt kritischer Wert von  $\mathcal{F}$ , wenn  $\exists u_0 \in H$  mit  $D\mathcal{F}(u_0) = 0$  und  $\mathcal{F}(u_0) = c$  (also  $K_c \neq \{\}$ ).

(c)  $u_0 \in H$  heißt Sattelpunkt, wenn  $D\mathcal{F}(u_0) = 0$  und für jede Umgebung  $U(u_0)$  gilt:  $\exists u_{1,2} \in U(u_0)$ , sodass  $\mathcal{F}(u_1) < \mathcal{F}(u_0) < \mathcal{F}(u_2)$ .

kritische Punkte: lokale Extrema oder Sattelpunkte.

## 7.1 “Mountain-Pass” Theorem

**Satz 7.1** (endlich-dim. MPT). Sei  $\mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  koerziv (im Sinn von Def. 6.2: jede Folge in  $A_c$  hat HP).  $\mathcal{F}$  habe 2 strikte lokale Minimalstellen  $x_1 \neq x_2$ .

$\Rightarrow \mathcal{F}$  hat einen 3. kritischen Punkt  $x_3$ , der keine lokale Minimalstelle ist und durch das Minimax Prinzip charakterisiert ist:

$$\mathcal{F}(x_3) = \inf_{g \in \Gamma} \max_{x \in g} \mathcal{F}(x)$$

mit

$$\Gamma = \{g \subset \mathbb{R}^n \mid x_1, x_2 \in g; g \text{ ist kompakt, zusammenhängend}\}$$

die Menge der Pfade von  $x_1$  nach  $x_2$ .

*Beweis.* [St] §II.1; Spezialfall von Satz 7.3 ■

- MPT ist eines der wenigen Ergebnisse über Existenz von Sattelpunkten.
- Startpunkt für robusten numerischen Algorithmus (“Mountain-Pass Algorithmus”)

**Beispiel 7.1.**  $\mathcal{F}(x, y) := e^{-y} - x^2$ .  $A_0 := \{(x, y) \mid \mathcal{F}(x, y) \leq 0\}$  nicht zusammenhängend.  
 $\exists$  Pfadfolge  $g_m$ , die beide Komponenten von  $A_0$  verbindet, und fallendem Max:  $\max_{z \in g_m} \mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z_m)$ ,  $z_m = (0, m)$ ,

$$\mathcal{F}(z_m) = e^{-m} \rightarrow 0, \quad D\mathcal{F}(z_m) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-m} \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

Also ist  $\{z_m\}$  kritische Folge, aber  $\nexists$  “Mountain Pass” der minimalen Höhe 0.

Grund: fehlende Kompaktheit von  $\{z_m\}$  bzw. fehlende Koerzivität von  $\mathcal{F}$ . □

Kompaktheitsbed. für kritische Folgen für  $\dim H = \infty$ :

**Definition 7.2.**  $\mathcal{F} \in C^1(H, \mathbb{R})$  erfüllt die Palais-Smale Kompaktheitsbed. (PS), falls jede Folge  $\{u_n\} \subset H$  mit

(i)  $\{\mathcal{F}(u_n)\}$  beschränkt und

(ii)  $D\mathcal{F}(u_n) \rightarrow 0$  in  $H$

in  $H$  präkompakt ist (also eine konvergente Teilfolge enthält).

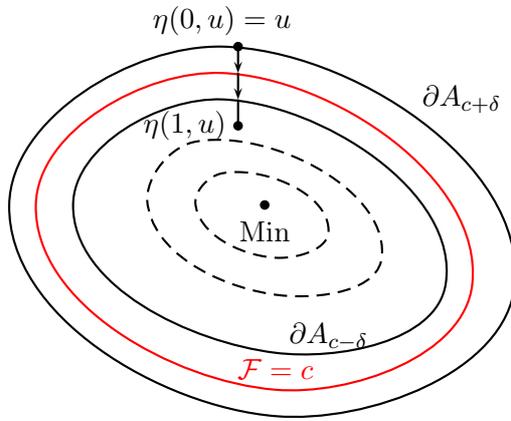
**Bemerkung 7.1.** 1. Sei  $u_0$  Limes solch einer TF  $\Rightarrow D\mathcal{F}(u_0) = 0$ . (also kritischer Punkt), wegen Stetigkeit von  $D\mathcal{F}$ .

2. (PS) viel schwächer als Koerzivität: Präkompaktheit wird nur für viel speziellere “Palais-Smale Folgen” gefordert.

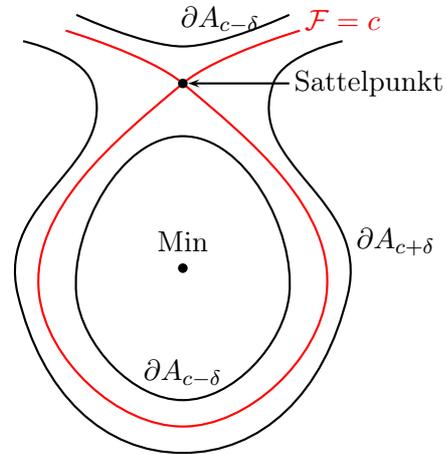
**Lemma 7.1.**  $\mathcal{F} \in C^1(H, \mathbb{R})$  erfülle (PS).  $\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}$  gilt:  $K_c = \{\mathcal{F}(u) = c, D\mathcal{F}(u) = 0\}$  ist kompakt.

*Beweis.* trivial aus Def. 7.2 ■

Niveaulinien von  $\mathcal{F}$ :



$K_c = \{\}$  :  $\exists$  stetige Deformation  
von  $A_{c+\delta}$  in  $A_{c-\delta}$



$K_c \neq \{\}$  :  $\nexists$  stetige Deformation

Idee vom Deformationsatz:

Falls  $c$  kein kritischer Wert von  $\mathcal{F}$  ist, kann die Sub-Niveaumenge  $A_{c+\delta}$  stetig in  $A_{c-\delta}$  deformiert werden.

Deformationsabbildung:  $\eta(t, u), t \in [0, 1] : \eta(0, u) = u$ .

Deformation jeweils in Gradientenrichtung  $-\text{D}\mathcal{F}(\eta(t))$

$\Rightarrow$  Pfade mit steilstem Abstieg

**Satz 7.2** (Deformationsatz).  $\mathcal{F} \in \mathcal{C} := C_{\text{loc}}^{1,1}(H, \mathbb{R})$  erfülle (PS). Sei  $K_c = \{\}$ .  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$  hinreichend klein:  $\exists 0 < \delta < \varepsilon, \exists$  Fkt.  $\eta = \eta(t, u), \eta \in C([0, 1] \times H, H)$  mit

- (i)  $\eta(0, u) = u \quad \forall u \in H,$
- (ii)  $\eta(1, u) = u \quad \forall u \in H \setminus \mathcal{F}^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]),$
- (iii)  $\mathcal{F}(\eta(t, u)) \leq \mathcal{F}(u) \quad \forall u \in H, 0 \leq t \leq 1,$
- (iv)  $\eta(1, A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}.$

Beweis. Schritt 1:

Beh:  $\exists \sigma, \varepsilon \in (0, 1)$  mit

$$\|\text{D}\mathcal{F}(u)\| \geq \sigma \quad \forall u \in A_{c+\varepsilon} \setminus A_{c-\varepsilon} \tag{7.1}$$

Gegenannahme:  $\exists$  Folgen  $\sigma_k \rightarrow 0, \varepsilon_k \rightarrow 0$  und  $u_k \in A_{c+\varepsilon_k} \setminus A_{c-\varepsilon_k}$  mit  $\|\text{D}\mathcal{F}(u_k)\| \leq \sigma_k.$

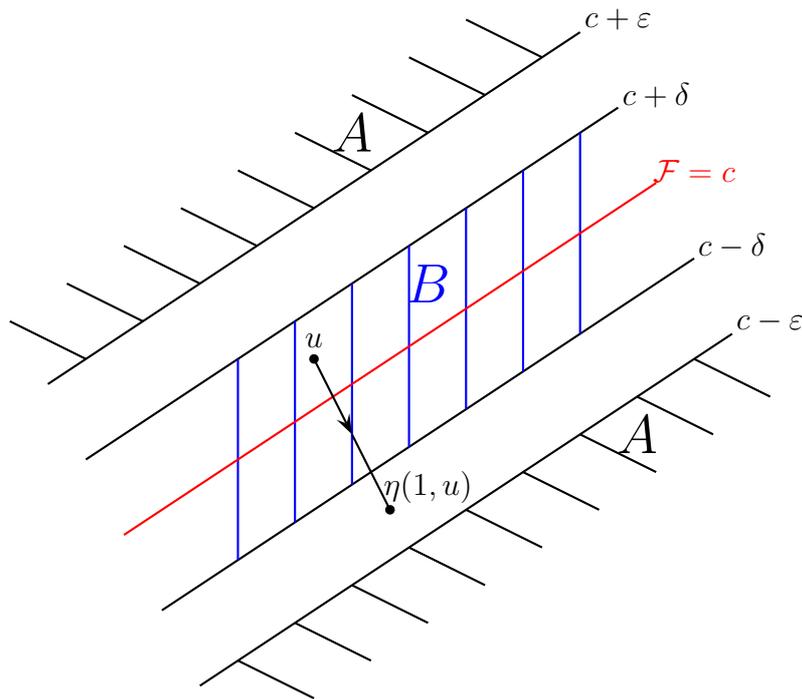
Laut (PS):  $\exists u \in H, \exists$  Teilfolge  $u_{k_j} \rightarrow u$  in  $H$ .

Da  $\mathcal{F} \in C^1(H, \mathbb{R}) : \mathcal{F}(u) = c, D\mathcal{F}(u) = 0 \Rightarrow K_c \neq \{\} \Rightarrow$  Wid.

Schritt 2: Wähle  $\delta \in (0, \varepsilon)$ , sodass  $\delta \leq \frac{\sigma^2}{2}$ .

$$A := \{u \in H \mid \mathcal{F}(u) \leq c - \varepsilon \text{ oder } \mathcal{F}(u) \geq c + \varepsilon\},$$

$$B := \{u \in H \mid c - \delta \leq \mathcal{F}(u) \leq c + \delta\}$$



Da  $D\mathcal{F}$  beschränkt auf beschr. Mengen: Abb.  $u \mapsto \text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)$  nach unten beschr. durch pos. Konst.  $\forall$  beschr. Menge von  $H$ .

$$g(u) := \frac{\text{dist}(u, A)}{\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)} \quad \forall u \in H$$

erfüllt:  $0 \leq g \leq 1, g \equiv 0$  auf  $A, g \equiv 1$  auf  $B$

Sei

$$h(\tau) := \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq 1 \\ \frac{1}{\tau}, & \tau \geq 1 \end{cases} \quad (7.2)$$

def. Vektorfeld in Abstiegsrichtung,  $V : H \rightarrow H$ ,

$$V(u) := - \underbrace{g(u)h(\|D\mathcal{F}(u)\|)}_{\leq 1} D\mathcal{F}(u) \quad , \quad \forall u \in H.$$

$V \dots$  nichtlin. beschränkte Abb. (da  $D\mathcal{F}$  beschr. auf beschr. Mengen)

Schritt 3: Konstruktion von  $\eta(t) = \eta(t, u)$ : Betrachte  $\forall u \in H$  die GDGL:

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt}(t) = V(\eta(t)) & , \quad t > 0 \\ \eta(0) = u. \end{cases}$$

da  $V$  beschr, Lip.-stetig auf beschr. Mengen (da  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ ):  $\exists!$  Lösung  $\forall t > 0$ .

$\eta \in C([0, 1] \times H, H)$  erfüllt (i), (ii), da  $V \equiv 0$  auf  $A$  (da  $g|_A \equiv 0$ ).

Schritt 4: Mit  $\eta = \eta(t, u)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(\eta) &= \left( D\mathcal{F}(\eta), \frac{d}{dt}\eta \right) \\ &= (D\mathcal{F}(\eta), V(\eta)) \\ &= - \underbrace{g(\eta)h(\|D\mathcal{F}(\eta)\|)}_{\geq 0} \|D\mathcal{F}(\eta)\|^2 \leq 0, 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  (iii)  $\checkmark$ .

Schritt 5: für (iv) wähle  $u \in A_{c+\delta}$  fest.

z.z:  $\eta(1, u) \in A_{c-\delta}$ , also  $\mathcal{F}(\eta(1, u)) \leq c - \delta$ .

Sei  $u \in B \subset A_{c+\delta}$ , sonst nichts z.z.

AN: Sei ganze Trajektorie in  $B$  (also insbes.  $\mathcal{F}(\eta(1, u)) \geq c - \delta$ ), sonst nichts mehr z.z.  
Dort ist  $g \equiv 1$ , also

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\eta) = -h(\|D\mathcal{F}(\eta)\|)\|D\mathcal{F}(\eta)\|^2, \quad 0 < t < 1. \quad (7.3)$$

(a) für jene  $\eta$  auf Trajektorie, mit  $\|D\mathcal{F}(\eta)\| \geq 1$  gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\eta) \stackrel{(7.2)}{=} -\|D\mathcal{F}(\eta)\|^2 \stackrel{(7.1)}{\leq} -\sigma \stackrel{\sigma \leq 1}{\leq} -\sigma^2 \quad (7.4)$$

(b) für jene  $\eta$  auf Trajektorie, mit  $\|D\mathcal{F}(\eta)\| \leq 1$  gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(\eta) \stackrel{(7.2)}{=} -\|D\mathcal{F}(\eta)\|^2 \leq -\sigma^2 \quad (7.5)$$

aus (7.3)-(7.5):

$$\mathcal{F}(\eta(1, u)) \leq \mathcal{F}(u) - \sigma^2 \leq c + \delta - \sigma^2 \stackrel{\delta \leq \frac{\sigma^2}{2}}{\leq} c - \delta \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

**Satz 7.3** (Mountain-Pass Theorem).  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$  erfülle (PS). Weiters gelte

(i)  $\mathcal{F}(0) = 0$ ,

(ii)  $\exists$  Konstanten  $r, a > 0$  mit  $\mathcal{F}(u) \geq a$  für  $\|u\| = r$ ,

(iii)  $\exists u_1 \in H$  mit  $\|u_1\| > r, \mathcal{F}(u_1) \leq 0$ .

$$\Rightarrow c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{F}(g(s))$$

ist kritischer Wert, mit

$$\Gamma := \{g \in C([0, 1], H) \mid g(0) = 0, g(1) = u_1\}.$$

**Bemerkung 7.2.** MPT liefert nur einen kritischen Punkt mit Funktionalwert  $c$ ; muss nicht notwendigerweise Sattelpunkt sein.

*Beweis.* Klarerweise  $c \geq a$ .

AN: Sei  $c$  kein kritischer Wert von  $\mathcal{F}$ , also  $K_c = \{\}$ . Wähle  $0 < \varepsilon < \frac{a}{2}$  hinr. klein.

laut Satz 7.2:  $\exists 0 < \delta < \varepsilon$  und Homöomorphismus  $\eta = \eta(t = 1, \cdot) : H \rightarrow H$  mit  $\eta(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$  und

$$\eta(u) = u \quad \forall u \in H \setminus \mathcal{F}^{-1}(\underbrace{[c - \varepsilon, c + \varepsilon]}_{> 0}). \quad (7.6)$$

Wähle ein  $g \in \Gamma$  mit

$$\max_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{F}(g(s)) \leq c + \delta \quad (7.7)$$

$\Rightarrow \hat{g} := \eta \circ g \in \Gamma$ , da  $\eta(g(0)) = \eta(0) = 0$  und  $\mathcal{F}(0) = 0$ ,  $\eta(g(1)) = \eta(u_1) = u_1$  wegen  $\mathcal{F}(u_1) \leq 0$ , (7.6).

aus (7.7) und  $\eta(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$ :

$$\max_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{F}(\hat{g}(s)) \leq c - \delta,$$

also  $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{F}(g(s)) \leq c - \delta \dots$  Widerspruch. ■

Referenzen: [Ev1] §8.5, [St] II.1-2, II.6, [Gr] §4

## 7.2 Anwendung des MPT: semilineare elliptische PDGI

Wir suchen nichttriviale Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{m-2}u =: f(u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad (7.8)$$

mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, und  $2 < m < \frac{2n}{n-2} =: 2^*$  (bzw.  $m < \infty$  falls  $n = 1, 2$ ).

Lösung  $u \neq 0$  wird erhalten als Sattelpunkt (via MPT) von

$$\mathcal{F}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{m} \int_{\Omega} |u|^m dx =: \mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(u), \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad (7.9)$$

(wohldefiniert wegen Sobolev Einbettung (5.1)). (7.8) ist zugehörige EL-Gl.

**Bemerkung 7.3.**

$$\inf_{H_0^1} \mathcal{F} = -\infty, \quad \sup_{H_0^1} \mathcal{F} = \infty \quad \rightarrow \text{Übung}$$

**Satz 7.4.**  $\exists$  schwache Lösung  $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$  von (7.8) (und damit auch  $-u$ ).

*Beweis.* Sei  $H = H_0^1(\Omega)$  mit  $\|u\|_H^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  und

$$(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx. \quad H' =: H^{-1}(\Omega).$$

Schritt 1: z.z:  $\mathcal{F} \in \mathcal{C} := C_{loc}^{1,1}(H, \mathbb{R})$ .

$D\mathcal{F}_1(u) = u \in H$  (mit Riesz-Identifikation bez.  $(\cdot, \cdot)$  !!), also

$$D\mathcal{F}_1(u)(v) = (u, v) \quad \left( = - \int_{\Omega} \Delta u v dx \right) \quad \forall v \in H.$$

$\Rightarrow \mathcal{F}_1 \in \mathcal{C}$ .

$\mathcal{F}_2$  ist Fréchet diff.bar mit

$$D\mathcal{F}_2(u)(v) = \int_{\Omega} \underbrace{|u|^{m-2} u}_{=f(u)} v dx \quad \forall v \in H \quad (\text{zunächst nur formale Rechnung}).$$

Da

$$(m-1) \frac{2n}{n+2} < \frac{n+2}{n-2} \cdot \frac{2n}{n+2} = 2^* \quad (= \text{kritischer Sobolev Exponent}) : \quad (7.10)$$

$$\forall u \in H \subset L^{2^*}(\Omega) : f(u) \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega); \quad (7.11)$$

Inklusion gilt, da  $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$  und daher für die Dualräume  $L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ .

Präzisere Fassung der letzten Inklusion: Sei  $w \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ , dann ist das lineare Funktional  $w^* := K^{-1}w$  in  $H^{-1}(\Omega)$ , mit

$$H^{-1} \langle w^*, u \rangle_{H_0^1} := \int_{\Omega} w u dx, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Dabei ist die Isometrie (wegen Riesz)  $K : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ ,  $H^{-1}(\Omega) \ni v^* \mapsto v = Kv^* \in H$  als eindeutige schwache Lösg. von

$$\begin{cases} -\Delta v = v^*, & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Also  $D\mathcal{F}_2 : H \rightarrow H$  mit  $D\mathcal{F}_2(u) = K(|u|^{m-2}u) \in H$ , da:

$$D\mathcal{F}_2(u)(v) = (Kf(u), v) = \int \nabla(Kf(u)) \cdot \nabla v dx = - \int \Delta(Kf(u))v dx = \int f(u)v dx.$$

$$\begin{aligned} \|D\mathcal{F}_2(u)\|_H &= \|f(u)\|_{H^{-1}} \stackrel{(7.11)}{\leq} C \|f(u)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \\ &\stackrel{(7.10)}{\leq} C \|u\|_{L^{2^*}}^{m-1} \stackrel{\text{Sobolev}}{\leq} C \|u\|_{H_0^1}^{m-1} \end{aligned}$$

Analog:  $D\mathcal{F}_2 : H \rightarrow H$  ist lokal Lipschitz.

Schritt 2: zz:  $\mathcal{F}$  erfüllt (PS).

Sei  $\{u_k\} \subset H_0^1(\Omega)$  eine PS-Folge, also  $\{\mathcal{F}(u_k)\}$  beschränkt und

$$D\mathcal{F}(u_k) \rightarrow 0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega). \tag{7.12}$$

Also

$$D\mathcal{F}_1(u_k) - D\mathcal{F}_2(u_k) = u_k - K(f(u_k)) \rightarrow 0 \text{ in } H. \tag{7.13}$$

$\forall \varepsilon > 0$  gilt:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla v - f(u_k)v dx \right| = |(D\mathcal{F}(u_k), v)| \stackrel{(7.12)}{\leq} \varepsilon \|v\|_H$$

für  $k$  groß genug (glm. in  $v \in H$ ).

Setze  $v = u_k$ .  $\Rightarrow$

$$\left| \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 - f(u_k)u_k dx \right| \leq \varepsilon \|u_k\|_H, \quad k \text{ groß.}$$

Sei speziell  $\varepsilon = 1$ :

$$\int_{\Omega} \underbrace{f(u_k)u_k}_{=|u_k|^m} dx \leq \|u_k\|_H^2 + \|u_k\|_H, \quad k \text{ groß.} \tag{7.14}$$

Lt. VS gilt

$$\mathcal{F}(u_k) = \frac{1}{2} \|u_k\|_H^2 - \frac{1}{m} \int_{\Omega} |u_k|^m dx \leq \frac{C}{2} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|u_k\|_H^2 \leq C + \frac{2}{m} \int_{\Omega} |u_k|^m dx \stackrel{(7.14)}{\leq} C + \frac{2}{m} (\|u_k\|_H^2 + \|u_k\|_H)$$

Da  $\frac{2}{m} < 1$ :  $\{u_k\}$  beschränkt in  $H$ .

Lt. Alaoglu:  $\exists$  TF  $\{u_{k_j}\}$  mit  $u_{k_j} \rightharpoonup u \in H$ .

Lt. Rellich-Kondrachov (5.3):  $u_{k_j} \rightarrow u$  in  $L^m(\Omega)$ , da  $m < 2^*$ .

$\Rightarrow$  (mit (7.10), (7.11)):  $f(u_{k_j}) \rightarrow f(u)$  in  $L^{\frac{2n}{n+2}} \subset H^{-1}(\Omega)$ ,

$K(f(u_{k_j})) \rightarrow K(f(u))$  in  $H_0^1(\Omega)$

$\Rightarrow$  (mit (7.13)):  $u_{k_j} \rightarrow K(f(u))$  in  $H_0^1(\Omega)$ ,

also (PS) ✓

Schritt 3: weitere VSen für MPT:

$$\mathcal{F}(0) = 0 \quad \checkmark$$

Sei  $u \in H$  mit  $\|u\|_H = r > 0$ ;  $r$  wird unten gewählt.

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}_1(u) - \mathcal{F}_2(u) = \frac{r^2}{2} - \mathcal{F}_2(u).$$

$$|\mathcal{F}_2(u)| = \frac{1}{m} \|u\|_{L^m}^m \stackrel{m < 2^*, \text{Sobolev}}{\leq} C \|u\|_{H_0^1}^m = Cr^m$$

$\Rightarrow \mathcal{F}(u) \geq \frac{r^2}{2} - Cr^m \stackrel{2 < m}{\geq} \frac{r^2}{4} =: a > 0$  für  $r$  klein genug und  $\forall u$  mit  $\|u\|_H = r$ .

Wähle ein  $0 \neq u \in H$ . Sei  $u_1 := tu$ ,  $t > 0$ .

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u_1) = t^2 \mathcal{F}_1(u) - \frac{t^m}{m} \int_{\Omega} |u|^m dx < 0 \quad \text{und} \quad \|u_1\|_H > r \quad \text{für } t \text{ groß, da } 2 < m.$$

Schritt 4: Lt. MPT (Satz 7.3):  $\exists 0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$D\mathcal{F}(u) = u - K(f(u)) = 0, \text{ d.h.}$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(u) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Also,  $u \neq 0$  ist schwache Lösung von (7.8). ■

**Bemerkung 7.4.** Für  $m = \frac{2n}{n-2} = 2^*$  erfüllt  $\mathcal{F}$  (PS) *nicht*. Folgt aus nächstem Satz (sonst gäbe es auch für  $m = \frac{2n}{n-2}$  nicht-triviale Lösung von (7.8)).

**Satz 7.5.** Sei  $\lambda \geq 0$ ;  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) beschränkt, sternförmig bez.  $0 \in \mathbb{R}^n$  (d.h.  $x \cdot \nu(x) > 0$ ,  $\forall x \in \partial\Omega$ ) mit  $\partial\Omega$  glatt.  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= |u|^{\frac{4}{n-2}} u, & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad (7.15)$$

hat nur die schwache Lösung  $u \equiv 0$ .

*Beweis.* aus elliptischer Regularität:  $u$  ist glatt auf  $\bar{\Omega}$ .

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta u - \lambda u + |u|^{\frac{4}{n-2}} u) x \cdot \nabla u \\ &= \operatorname{div} \left[ \nabla u (x \cdot \nabla u) - \frac{x}{2} |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} x |u|^2 + \frac{n-2}{2n} x |u|^{\frac{2n}{n-2}} \right] \\ &\quad + \frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda n}{2} |u|^2 - \frac{n-2}{2} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \quad \left| \int_{\Omega} dx \right. \\ \Rightarrow \quad \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda n}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx - \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu dS}_{\text{Randterm zu ersten beiden Termen}} &= 0, \end{aligned} \quad (7.16)$$

da  $u|_{\partial\Omega} = 0$  (also  $\partial\Omega$  Niveaulinie);  $\nabla u \parallel \nu$ ,  $|\nabla u| = \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|$  auf  $\partial\Omega$

$$\Rightarrow x \cdot \nabla u = x \cdot \nu \frac{\partial u}{\partial \nu} \Rightarrow \left[ \nabla u (x \cdot \nabla u) - \frac{x}{2} |\nabla u|^2 \right] \cdot \nu = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu \text{ auf } \partial\Omega$$

Multipliziere (7.15) mit  $u$ :

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx = 0 \quad (7.17)$$

aus (7.16), (7.17):

$$2\lambda \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu dS = 0$$

falls  $\lambda > 0 \Rightarrow u \equiv 0$

falls  $\lambda = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} \equiv 0$ . Mit  $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$  läßt sich  $u \equiv 0$  zeigen.

Details: [Jo] Th. II.9.3.4, [St] §III.1 ■

Referenzen: [Ev1] §8.5.2, [Gr] §4, [St] §II.6



# 8 Parameter-abhängige Variationsprobleme, Verzweigungstheorie

Inhalt: parameter-abhängige Euler-Lagrange Gleichungen; Verzweigungstheorie  
 Frage: Ausgehend von einem parameter-abhängigen Variationsproblem, studieren wir die Struktur der Lösungen für die Euler-Lagrange Gleichungen.

## 8.1 Verzweigungsprobleme in der Variationsrechnung

generelle Annahmen für §8.1:

Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein beschränktes Intervall;  $u \in X := C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$  und

$1-\text{Graph}(u) := \{(x, u(x), Du(x)) \mid x \in [a, b]\} \dots$  kompakt.

Seien  $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  und  $\Lambda \subset \mathbb{R}^l$  offene Teilmengen, die Lagrange Funktion  $F \in C^1(V \times \Lambda, \mathbb{R})$  und  $U = \{u \in X \mid 1-\text{Graph}(u) \subset V\}$ .

Definiere das Variationsintegral

$$\mathcal{F} : U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(u, \lambda) \mapsto \mathcal{F}(u, \lambda) := \int_a^b F(x, u(x), Du(x), \lambda) dx,$$

welches nun vom Parameter  $\lambda \in \Lambda$  abhängt.

**Satz 8.1.** *Zusätzlich zu den generellen Annahmen, gelte  $\frac{\partial F}{\partial p_i} \in C^1(V \times \Lambda)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Sei  $\lambda_0 \in \Lambda$  und  $u_0 \in C^2((a, b), \mathbb{R}^N) \cap C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$  eine Funktion, sodass*

$$\delta \mathcal{F}(u_0, \lambda_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in C_0^\infty((a, b), \mathbb{R}^N).$$

(i) *Dann erfüllt  $u_0$  die Euler-Lagrange Gleichungen (EL-Gl.) von  $\mathcal{F}$  :*

$$L_F(u_0, \lambda_0) = 0 \tag{8.1}$$

*mit dem Euler-Operator  $L_F(\cdot, \lambda_0) : C^s((a, b), \mathbb{R}^N) \rightarrow C^{s-2}((a, b), \mathbb{R}^N)$ ,  $s \geq 2$ :*

$$(L_F(u, \lambda_0))_i(x) = \frac{\partial F}{\partial z_i}(x, u(x), Du(x), \lambda_0) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, u(x), Du(x), \lambda_0), \quad i = 1, \dots, N.$$

(ii) Im Falle  $\det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} (x, u(x), Du(x), \lambda_0) \right) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  kann die Euler-Lagrange Gleichung nach  $u''(x)$  aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} u_j''(x) &= - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_i} \right)^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial z_j \partial p_i} u_j' + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial z_i} \right\} (x, u(x), Du(x), \lambda_0) \\ &=: f_j(x, u(x), Du(x), \lambda_0). \end{aligned} \quad (8.2)$$

*Beweis.* siehe Satz 2.1 und die nachfolgende Zusammenfassung. ■

Zielsetzung: Studiere die Parameterabhängigkeit der Lösungen von (8.1) mittels Verzweigungstheorie. Identifiziere Verzweigungspunkte von  $\lambda$ , d.h. Werte für  $\lambda$ , für die sich die Struktur der Lösungsmenge ändert und studiere diese Struktur.

Sei  $\lambda_0 \in \Lambda$  und  $u_0$  ein stationärer Punkt von  $\mathcal{F}(u, \lambda_0)$ , sodass die strikte Legendre-Hadamard Bedingung, i.e.

$$\exists \kappa > 0 : \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} (x, u_0(x), Du_0(x), \lambda_0) \chi_i \chi_k \geq \kappa |\chi|^2 \quad \forall x \in [a, b], \chi \in \mathbb{R}^N, \quad (8.3)$$

bzw. die äquivalente Bedingung

$$\det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} (x, u_0(x), Du_0(x), \lambda_0) \right) \neq 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad (8.4)$$

erfüllt ist. In Anbetracht von Satz 3.6 entscheidet die strikte Jacobi-Bedingung über die Minimierungseigenschaft von  $u_0$ . Wir definieren analog zu den Definitionen 3.3 und 3.4.

**Definition 8.1.** Sei  $\lambda_0 \in \Lambda$  und  $u_0$  ein stationärer Punkt von  $\mathcal{F}(u, \lambda_0)$ .

1. Das akzessorische Integral von  $\mathcal{F}$  bezüglich  $u_0$  ist für  $\xi \in X_0$  definiert als

$$\mathcal{Q}(\xi) := \delta^2 \mathcal{F}(u_0, \xi) \stackrel{(3.3)}{=} \int_a^b Q(x, \xi(x), \xi'(x)) dx$$

mit der akzessorischen Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} Q(x, z, p) &= z^T \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} (x, u_0(x), u_0'(x), \lambda_0) z \\ &\quad + 2z^T \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial p} (x, u_0(x), u_0'(x), \lambda_0) p + p^T \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} (x, u_0(x), u_0'(x), \lambda_0) p. \end{aligned}$$

2. Eine Fkt.  $\varphi \in X$  heißt Jacobi-Feld längs  $u_0$ , wenn  $\varphi$  die Jacobi-Gleichung von  $\mathcal{F}$  bzgl.  $u_0$  erfüllt, d.h.

$$0 = -\frac{1}{2} L_Q(u_0, \lambda_0) \varphi = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial Q}{\partial p} (x, \varphi, \varphi') \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial z} (x, \varphi, \varphi'). \quad (8.5)$$

**Bemerkung 8.1.** Der Jacobi-Operator  $L_Q$  ist die Linearisierung des Euler-Operators  $L_F$ , d.h.  $L_Q(u_0, \lambda_0)\varphi = D_u L_F(u_0, \lambda_0)\varphi = \frac{d}{ds} L_F(u_0 + s\varphi, \lambda_0)|_{s=0}$ .

Unter der Annahme der strikten Legendre-Hadamard Bedingung (8.3), ist die strikte Jacobi-Bedingung äquivalent zu der positiven Definitheit der zweiten Variation, d.h.  $\delta^2 \mathcal{F}(u_0, \lambda_0, \xi) > 0$  für alle  $\xi \in X_0$ . In endlich-dimensionalen Problemen deutet die Existenz von Jacobi-Feldern entweder auf die Existenz einer parameterisierbaren Familie von Lösungen für (8.1) oder auf ein Verzweigungsphänomen hin.

**Lemma 8.1.** Sei  $u(x, \tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , eine Familie von Lösungen für (8.1). Dann ist  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  ein Jacobi-Feld längs  $u(x, \tau)$ .

*Beweis.* Die Funktionen  $u(x, \tau)$  erfüllen die EL-Gleichung  $L_F(u(x, \tau)) = 0$ . Die Ableitung der EL-Gleichung nach  $\tau$  und Verwendung der Bemerkung 8.1 berechnet sich zu

$$L_Q(u(x, \tau)) \frac{\partial u}{\partial \tau} = D_u L_F(u(x, \tau)) \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0.$$

Somit ist  $\frac{\partial u}{\partial \tau}$  ein Jacobi-Feld. ■

Unter bestimmten Bedingungen bleibt dieser Zusammenhang im unendlich-dimensionalen Kontext bestehen. Das Verzweigungsproblem wird in diesem Fall durch eine Lyapunov-Schmidt Reduktion auf ein endlich-dimensionales Problem zurückgeführt.

### 8.1.1 Fredholm Operatoren

**Definition 8.2.** Sei  $V$  ein Vektorraum, wir bezeichnen  $V$  als die Summe,  $V = V_0 \oplus V_1$ , der abgeschlossenen Teilräume  $V_0 \subset V$  und  $V_1 \subset V$ , falls für jedes  $v \in V$  eindeutige  $v_0 \in V_0$  und  $v_1 \in V_1$  existieren, sodass  $v = v_0 + v_1$ .

**Definition 8.3.** Sei  $V$  ein Vektorraum und  $N$  ein Teilraum von  $V$ . Der Quotientenraum  $V/N$  ist definiert als die Menge der Äquivalenzklassen  $V/\sim$  mit der Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $V$ , sodass für  $x, y \in V$  gilt  $x \sim y$  falls  $x - y \in N$ .

Äquivalenzklassen für  $x \in V$  werden durch  $[x] = \{x + n \mid n \in N\}$  oder  $[x] = x + N$  bezeichnet.

**Lemma 8.2.** Sei  $V$  ein Banachraum und  $N$  ein abgeschlossener Teilraum von  $V$ . Dann ist der Quotientenraum  $V/N$  mit der Norm  $\|[x]\|_{V/N} = \inf_{n \in N} \|x + n\|_V$  ein Banachraum.

**Definition 8.4.** Seien  $V, W$  Banachräume. Ein stetiger linearer Operator  $T : V \rightarrow W$  wird als Fredholm Operator bezeichnet, falls

- (i)  $\dim(\text{Kern}(T)) = n_K < \infty$
- (ii)  $\text{codim}(\text{Bild}(T)) = \dim(W/\text{Bild}(T)) = n_{\text{coB}} < \infty$

Der Index des Fredholm Operators ist als Differenz  $n_K - n_{\text{coB}}$  definiert.

**Bemerkung 8.2.** In der allgemeinen Definition eines Fredholm Operators sind die Vektorräume  $V$  und  $W$  (nicht notwendigerweise vollständige) normierte Vektorräume und es wird (muss) zusätzlich die Abgeschlossenheit vom  $\text{Bild}(T) = T(V) \subset W$  angenommen werden.

**Beispiel 8.1.**  $l_2 = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{R}\}$  ist ein Hilbertraum mit Norm  $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2)^{1/2}$ . Der Shift-Operator  $T : l_2 \rightarrow l_2, x = (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$  ist eine surjektive Abbildung mit ein-dimensionalem  $\text{Kern}(T) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_1 \in \mathbb{R}; x_{j+1} = 0, j \in \mathbb{N}\}$ .  
 $\Rightarrow$  Der Shift-Operator  $T$  ist ein Fredholm Operator mit Index 1.

**Satz 8.2.** Seien  $V, W$  Banachräume und  $T : V \rightarrow W$  ein Fredholm Operator. Der Banachraum  $V$  ist die Summe  $V = V_0 \oplus V_1$  der abgeschlossenen Teilräume  $V_0 = \text{Kern}(T) \subset V$  und  $V_1 \subset V$ . Der Banachraum  $W$  ist die Summe  $W = W_0 \oplus W_1$  der abgeschlossenen Teilräume  $W_1 = \text{Bild}(T)$  und  $W_0 \subset W$ .

Der eingeschränkte Operator  $T : V_1 \rightarrow W_1$  ist ein Isomorphismus, d.h. der inverse Operator  $T^{-1}$  ist ein stetiger linearer Operator.

**Lemma 8.3.** Sei  $F \in C^2(V \times \Lambda, \mathbb{R}), \lambda_0 \in \Lambda, u_0$  ein stationärer Punkt von  $\mathcal{F}(u, \lambda_0)$  und es gelte (8.4). Dann bilden die Jacobi-Felder einen endlich-dimensionalen Vektorraum.

*Beweis.* Die Jacobi-Gleichung  $L_Q(u, \lambda) \varphi = 0$  ist eine lineare Differentialgleichung für  $\varphi$   
 $\Rightarrow$  Lösungen bilden einen Vektorraum.

Aus den Annahmen (8.4) und  $F \in C^2(V \times \Lambda, \mathbb{R}) \Rightarrow$  Jacobi-Gleichung ist äquivalent zu

$$\varphi'' - g(x, u, u', \varphi, \varphi', \lambda) = 0 \tag{8.6}$$

mit  $g$  linear in  $\varphi$  und  $\varphi'$  und stetig in jeder Variable.

Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkte Folge von Lösungen von (8.6) in  $C^2([a, b])$ .

$\Rightarrow$  Die Fkten.  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind gleichgradig stetig in  $C^1([a, b])$ .

Satz v. Arzela-Ascoli  $\xrightarrow{\implies} \exists$  gleichmäßig konvergente Teilfolge  $\varphi_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi_0 \in C^1([a, b])$  bzgl.  $C^1([a, b])$ .

Gleichung (8.6) und Stetigkeit von  $g \Rightarrow \varphi_n''$  konvergiert gleichmäßig in  $C^0([a, b])$

$\Rightarrow$  Grenzwert der Ableitungen  $\varphi_n''$  entspricht Ableitung des Grenzwertes  $\varphi_0$  von  $\varphi_n$ .

$\Rightarrow \varphi_0 \in C^2([a, b])$  und  $\varphi_0$  ist Lösung von (8.6).

Die Menge der Jacobi Felder ist (folgen)kompakt und es folgt die Behauptung.

Woraus folgt die endliche Dimension des Lösungsraumes? ■

In der folgenden Analysis werden wir annehmen, daß der Jacobi-Operator ein Fredholm Operator mit Index Null ist. Das erste Resultat bezieht sich auf Jacobi-Operatoren mit trivialem Kern.

**Satz 8.3.** Sei  $F \in C^2(V \times \Lambda), \lambda_0 \in \Lambda, u_0$  ein stationärer Punkt von  $\mathcal{F}(u, \lambda_0)$  und es gelte die strikte Legendre-Hadamard Bedingung (8.3). Der Jacobi-Operator  $L_Q(u_0, \lambda_0)$  sei ein Fredholm Operator mit Index 0 und  $\text{Kern}(L_Q(u_0, \lambda_0)) = \{0\}$ . Dann existieren Umgebungen  $U(\lambda_0)$  von  $\lambda_0$  in  $\Lambda$  und  $U(u_0)$  von  $u_0$  in  $X$ , sodass für alle  $\lambda \in U(\lambda_0)$  eine eindeutige Lösung  $u(\lambda) \in U(u_0)$  von  $L_F(u, \lambda) = 0$  existiert.

*Beweis.* Die Abbildung  $L_F : X \times \Lambda \rightarrow W$ ,  $(u, \lambda) \mapsto L_F(u, \lambda)$  erfüllt  $L_F(u_0, \lambda_0) = 0$  und  $D_u L_F(u, \lambda)|_{u=u_0} = L_Q(u_0, \lambda_0)$ .

Laut Annahme ist  $L_Q(u_0, \lambda_0)$  ein Fredholm Operator mit Index 0 und  $\text{Kern}(L_Q) = \{0\}$ .

$\xrightarrow{\text{Satz 8.2}} L_Q(u_0, \lambda_0)$  ist ein Isomorphismus.

Satz über implizite Fkten.  $\Rightarrow \exists$  Umgebungen  $U(\lambda_0) \subset \Lambda$  und  $U(u_0) \subset X$  und eine eindeutige Lösung  $u : U(\lambda_0) \rightarrow U(u_0)$ ,  $\lambda \mapsto u(\lambda)$  für  $L_F(u, \lambda) = 0$  mit  $u(\lambda_0) = u_0$ .  $\blacksquare$

Im nächsten Schritt betrachten wir für  $\lambda_0 \in \Lambda$  einen stationären Punkt  $u_0 \in X$ , wobei der Jacobi-Operator ein Fredholm Operator mit Index 0 und  $\dim(\text{Kern}(L_Q(u_0, \lambda_0))) = 1$  ist.

**Satz 8.4.** Sei  $F \in C^2(V \times \Lambda)$ ,  $\lambda_0 \in \Lambda$ ,  $u_0$  ein stationärer Punkt von  $\mathcal{F}(u, \lambda_0)$  und es gelte die strikte Legendre-Hadamard Bedingung (8.3). Der Jacobi-Operator  $L_Q(u_0, \lambda_0) : X \rightarrow W$  sei ein Fredholm Operator mit Index 0.

Es existieren Zerlegungen

$$X = K \oplus X_1 \quad \text{mit} \quad K = \text{Kern}(L_Q(u_0, \lambda_0)) \quad \text{und} \quad X_1 \subset X$$

bzw.

$$W = W_0 \oplus W_1 \quad \text{mit} \quad W_1 = \text{Bild}(L_Q(u_0, \lambda_0)) \quad \text{und} \quad W_0 \subset W$$

und Projektionen

$$\Pi : X = K \oplus X_1 \rightarrow K, \quad x = x_0 + x_1 \mapsto x_0$$

bzw.

$$\Pi_W : W = W_0 \oplus W_1 \rightarrow W_0, \quad w = w_0 + w_1 \mapsto w_0.$$

Sei  $\dim K = 1$  und  $W_0 \equiv K$ , dann ist  $\Pi_W \circ \Pi : W \rightarrow K$  eine wohldefinierte Projektion. Sei  $\xi_0 \in K$  und

$$a_1 = -\Pi_W \left( \left. \frac{d^2}{ds^2} L_F(u_0 + s \xi_0, \lambda_0) \right|_{s=0} \right) \neq 0, \quad (8.7)$$

sowie  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^l$ , sodass  $\lambda_0 + \bar{\mu} \in \Lambda$  und

$$a_0 = -\Pi_W \left( \left. \frac{d}{ds} L_F(u_0, \lambda_0 + s \bar{\mu}) \right|_{s=0} \right) \neq 0. \quad (8.8)$$

Für  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein und  $0 < t < \varepsilon$  existieren Umgebungen  $U_t(u_0)$  von  $u_0$  in  $X$ , sodass die Anzahl der Lösungen  $u \in U_t(u_0)$  von  $L_F(u, \lambda_0 + t \bar{\mu}) = 0$  der Anzahl der reellen Lösungen der quadratischen Gleichung  $a_0 + a_1 \tau^2 = 0$  entspricht.

*Beweis.* Es sei oBdA  $u_0 \equiv 0$ , ansonsten betrachte  $\tilde{L}(\tilde{u}, \lambda) := L(u_0 - \tilde{u}, \lambda)$  mit  $\tilde{L}(0, \lambda_0) = L(u_0, \lambda_0) = 0$ .

1. Reduktion der EL-Gleichungen auf ein endlich-dimensionales Problem:

**Lemma 8.4.** Die Abbildung  $A_{\lambda_0} : X \rightarrow W$ ,  $u \mapsto L_F(u, \lambda_0) + \Pi u$  ist ein lokaler Diffeomorphismus an  $u = 0$ .

*Beweis.* Die Ableitung von  $A_{\lambda_0}$  an  $u_0 = 0$  ist ein linearer Operator

$$D_u A_{\lambda_0}(0) : X \rightarrow W, v \mapsto L_Q(0, \lambda_0)v + \Pi v.$$

Satz 8.2  $\Rightarrow L_Q(0, \lambda_0) : X_1 \rightarrow W_1$  ist Isomorphismus.

Annahme  $W_0 \equiv K \Rightarrow$  Projektion  $\Pi|_K : K \subset V \rightarrow K \subset W$  ist Isomorphismus.

$$\Rightarrow D_u A_{\lambda_0}(0) \text{ ist Isomorphismus zwischen } X \text{ und } W.$$

$$\Rightarrow A_{\lambda_0}(u) \text{ ist Diffeomorphismus an } u = 0.$$

■

**Lemma 8.5.** Seien  $V$  und  $W$  Banachräume,  $T \in L(V, W)$  und bijektiv, und  $S \in L(V, W)$  mit  $\|T - S\| \leq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ . Dann ist  $S$  notwendigerweise bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung  $S^{-1}$ .

*Beweis.* siehe [Jo, Lemma II.2.3.4].

■

Betrachte Abbildung

$$\begin{aligned} A : X \times \Lambda &\rightarrow W \\ (u, \lambda) &\mapsto A(u, \lambda) := L_F(u, \lambda) + \Pi u \end{aligned}$$

Aus Lemma 8.4, Lemma 8.5 und der stetigen Abhängigkeit des Operators  $L_F$  von  $\lambda$   $\Rightarrow \exists$  hinreichend kleine Umgebung  $U(\lambda_0)$  von  $\lambda_0$  in  $\Lambda$ , sodass  $\forall \lambda \in U(\lambda_0)$  die Abbildung  $A(u, \lambda)$  lokaler Diffeomorphismus an  $u = 0$  ist.

Betrachte implizite Funktion

$$A(u, \lambda) = w \in W \quad \text{mit} \quad A(0, \lambda_0) = 0 \quad \text{und} \quad D_u A(0, \lambda_0) \text{ ein Isomorphismus.}$$

$\Rightarrow$  (Satz über implizite Funktionen)

$\exists$  Umgebungen  $U(0)$  von  $u = 0$  in  $X$  und  $U_W(0)$  von  $w = 0$  in  $W$ , sodass  $\forall \lambda \in U(\lambda_0)$  und  $w \in U_W(0)$ :

$\exists! u : U_W(0) \times U(\lambda_0) \rightarrow U(0)$ ,  $(w, \lambda) \mapsto u(w, \lambda)$  mit  $u(0, \lambda_0) = 0$  und  $A(u(w, \lambda), \lambda) = w$ .

$$\Rightarrow \text{Lösungen } u(w, \lambda) \text{ mit } L_F(u(w, \lambda), \lambda) = 0 \text{ erfüllen } \Pi u(w, \lambda) = w. \quad (8.9)$$

$$\Pi: X \xrightarrow{K} K \quad w \in K.$$

Das unendlich-dimensionale Problem

$$\text{''Gegeben } \lambda \in U(\lambda_0) \text{ finde } u \in X \text{ mit } L_F(u, \lambda) = 0.\text{''} \quad (8.10)$$

wurde auf ein endlich-dimensionales Problem

$$\text{''Gegeben } \lambda \in U(\lambda_0) \text{ finde } w \in K \text{ mit } \Pi u(w, \lambda) = w.\text{''} \quad (8.11)$$

reduziert.

2. Analyse des reduzierten Problems (8.11):

Annahme  $\dim(K) = 1 \Rightarrow \exists w_0 \in K$  mit  $K = \text{span}\{w_0\}$

$$\Rightarrow \text{Betrachte } w = \alpha w_0 \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } u(\alpha, \lambda) = u(\alpha w_0, \lambda) = u(w, \lambda).$$

Asymptotische Entwicklung von

$$\Pi u(\alpha w_0, \lambda) = \alpha w_0 \quad (8.12)$$

in hinreichend kleiner Umgebung von  $\alpha = 0, \lambda = \lambda_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} w = \alpha w_0 &= \Pi(u(\alpha w_0, \lambda_0 + t\mu)) \\ &= \underbrace{\Pi(u(0, \lambda_0))}_{=0} + \Pi \frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) \alpha + \Pi \frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Pi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) \alpha^2 \right) + \Pi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, \lambda_0) \alpha \mu \right) + \frac{1}{2} \Pi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2}(0, \lambda_0) (\mu, \mu) \right) + \\ &\quad + \text{Terme h\"oherer Ordnung in } \alpha \text{ und } \mu. \end{aligned}$$

- Behauptung:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = w_0$$

Differenziere

$$L_F(u(\alpha w_0, \lambda), \lambda) + \Pi u(\alpha w_0, \lambda) = \alpha w_0$$

nach  $\alpha$  an  $(\alpha, \lambda) = (0, \lambda_0) \Rightarrow$

$$L_Q(0, \lambda_0) \frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) + \Pi \frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = w_0.$$

Es gilt auch  $\underbrace{L_Q(0, \lambda_0)w_0}_{=0} + \underbrace{\Pi w_0}_{=w_0} = w_0.$

Lemma 8.4  $\Rightarrow L_Q(0, \lambda_0) + \Pi$  ist Isomorphismus  $\Rightarrow$  Eindeutigkeit der Lösung  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = w_0.$$

- Behauptung:

$$\Pi_W \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) \right) = -\Pi_W(D_u L_Q(0, \lambda_0)(w_0, w_0)) = -\Pi_W \left( \frac{d^2}{d\alpha^2} L_F(\alpha w_0, \lambda_0) \Big|_{\alpha=0} \right)$$

Differenziere

$$L_F(u(\alpha w_0, \lambda), \lambda) + \Pi u(\alpha w_0, \lambda) = \alpha w_0$$

zweimal nach  $\alpha$  an  $(\alpha, \lambda) = (0, \lambda_0)$ .

erste Ableitung:

$$L_Q(u, \lambda) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \Pi \frac{\partial u}{\partial \alpha} = w_0$$

zweite Ableitung ausgewertet an  $(\alpha, \lambda) = (0, \lambda_0)$ :

$$D_u L_Q(0, \lambda_0) \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) (0, \lambda_0) + L_Q(0, \lambda_0) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) + \Pi_x \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda) \right) = 0$$

Wende Projektion  $\Pi_W : W \rightarrow K$  mit  $\Pi_W \circ \Pi = \Pi$  an

$$\Pi_W D_u L_Q \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) (0, \lambda_0) + \Pi_W L_Q \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) + \Pi \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda) = 0$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\Pi_W \circ L_Q(0, \lambda_0) = 0} \\ \frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = w_0 \end{array} -\Pi_W D_u L_Q(0, \lambda_0)(w_0, w_0) = \Pi \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0)$$

**Bemerkung 8.3.** In der Variationsrechnung leitet sich  $L_Q$  von der zweiten Variation und  $D_u L_Q$  wiederum von der dritten Variation des Funktional  $\mathcal{F}(u, \lambda)$  ab.

Behauptung: Sei  $\lambda_0 + \mu \in \Lambda$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Pi \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu \right) &:= \Pi \left( \frac{d}{dt} u(0, \lambda_0 + t\mu) \Big|_{t=0} \right) = \\ &-\Pi_W (D_\lambda L_F(0, \lambda_0) \mu) := -\Pi_W \left( \frac{d}{dt} L_F(0, \lambda_0 + t\mu) \Big|_{t=0} \right) \end{aligned}$$

*Beweis.* Menge  $\Lambda$  ist offen  $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$  hinreichend klein, sodass  $\forall 0 < |t| < \varepsilon$

$$\lambda_t := \lambda_0 + t\mu \in \Lambda$$

und

$$L_F(u(w, \lambda_t), \lambda_t) + \Pi u(w, \lambda_t) = w$$

Differenziere bezüglich  $t$  an  $t = 0, w = 0$

$$\Rightarrow \Pi \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu \right) = -D_u L_F(0, \lambda_0) \frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu - D_\lambda L_F(0, \lambda_0) \mu$$

Wende die Projektion  $\Pi_W : W \rightarrow K$  an

$$\begin{array}{c} D_u L_F = L_Q, \Pi \circ L_Q \equiv 0 \\ \xrightarrow{\Pi_W \circ \Pi = \Pi} \end{array} \Pi \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu \right) = -\Pi_W D_\lambda L_F(0, \lambda_0) \mu$$

■

Die asymptotische Entwicklung von (8.12) vereinfacht sich durch

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = w_0 \quad \text{und} \quad \alpha \Pi \frac{\partial u}{\partial \alpha}(0, \lambda_0) = \alpha \Pi w_0 = \alpha w_0 = w$$

zu

$$\begin{aligned} 0 &= \Pi \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \mu \right) + \frac{1}{2} \Pi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) \alpha^2 \right) \\ &\quad + \text{Terme h\"oherer Ordnung in } \alpha \\ &\quad + \Pi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \lambda}(0, \lambda_0) \alpha \mu \right) \\ &\quad + \text{Terme h\"oherer Ordnung in } \mu \text{ und } \alpha. \end{aligned}$$

Die Annahmen (8.8) und (8.7) stellen mittels der Behauptungen sicher, dass die ersten beiden Koeffizienten der Taylorentwicklung nicht verschwinden.

Die Reskalierung

$$\alpha := t\tau, \quad \mu := t^2 \bar{\mu}, \quad a_0 := \Pi \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) \right) \bar{\mu} \neq 0, \quad a_1 := \frac{1}{2} \Pi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}(0, \lambda_0) \right) \neq 0$$

f\"uhrt zu

$$0 = a_0 t^2 + a_1 t^2 \tau^2 + t^2 \Sigma(t, \tau, \bar{\mu}) \tag{8.13}$$

wobei f\"ur festes  $\tau, \bar{\mu}$  die Funktion  $\Sigma(t, \tau, \bar{\mu}) = O(t)$  f\"ur  $t \rightarrow 0$ .

F\"ur  $t \neq 0$ , ist (8.13) \"aquivalent zu

$$0 = a_0 + a_1 \tau^2 + \Sigma(t, \tau, \bar{\mu}) \tag{8.14}$$

Es bleibt zu zeigen, dass f\"ur hinreichend kleine  $t$  die Struktur der L\"osungen (Verzweigungsverhalten) der Gleichungen (8.14) und

$$0 = a_0 + a_1 \tau^2 \tag{8.15}$$

gleich sind.

Die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  sind laut Annahmen verschieden von Null und es gilt die Fälle  $a_0/a_1 > 0$  und  $a_0/a_1 < 0$  zu unterscheiden. Die Gleichung (8.15) hat für  $a_0/a_1 > 0$  keine reellen Lösungen und für  $a_0/a_1 < 0$  genau zwei verschiedene reelle Lösungen.

Wir halten  $\bar{\mu} \neq 0$  für den Moment konstant und schreiben (8.14) als

$$0 = a_0 + a_1\tau^2 + \Sigma(t, \tau, \bar{\mu}) =: \Phi(t, \tau). \quad (8.16)$$

Im Fall  $a_0/a_1 < 0$ , bezeichnen wir die reellen Lösungen von (8.15) mit  $\tau_1 \neq \tau_2$ . Aufgrund von  $\Sigma(0, \tau, \bar{\mu}) = 0$  gilt

$$\Phi(0, \tau_i) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2$$

und aus (8.8), (8.7) und den Eigenschaften von  $\Sigma$  folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(0, \tau_i) \neq 0 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt die Existenz von  $\varepsilon > 0$  und lokal eindeutiger Lösungen

$$\tau_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \rightarrow \tau_i(t) \quad \text{für } i = 1, 2,$$

sodass

$$\Phi(t, \tau_i(t)) = 0, \quad \text{für } 0 < |t| < \varepsilon,$$

und insbesondere  $\tau_i(0) = \tau_i$  für  $i = 1, 2$ .

Damit haben wir zwei Lösungen  $\tau_1(t), \tau_2(t)$  für (8.16); somit für (8.13); somit für (8.12); somit für (8.11); somit für (8.10) mit  $\lambda_t = \lambda_0 + t^2\bar{\mu}$  und  $0 < |t| < \varepsilon$  gefunden.

Im anderen Fall,  $a_0/a_1 > 0$ , existieren keine Lösungen für (8.15) und aufgrund von den asymptotischen Eigenschaften von  $\Sigma$  für hinreichend kleine  $|t|$  auch keine Lösungen für (8.16) und damit (8.10). Daraus folgt die Behauptung, dass unter den Annahmen die Lösungsstruktur von (8.10) vollständig der Lösungsstruktur von (8.15) entspricht.

Im Fall von  $-\bar{\mu}$  ändern sich die Vorzeichen von  $a_0$  bzw.  $a_0/a_1$ , die Schlußfolgerung bleibt davon unberührt. ■

Referenzen: [Jo] §II.8.1 – §II.8.2, [AP] §5

# A Literaturverzeichnis

- [AP] **A. Ambrosetti, G. Prodi**, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993.
- [Bra] **A. Braides**, *A handbook of  $\Gamma$ -convergence*, in: Handbook of Differential Equations. Stationary Partial Differential Equations, Volume 3 (M. Chipot, P. Quittner, eds.), Elsevier, 2006.
- [Bre] **H. Brezis**, *Analyse Fonctionnelle*, Mason, Paris, 1987.
- [Ca] **C. Carstensen**, *Course B: Modelling and simulation of microstructure evolution*, EPSRC Summer School 2006.
- [Da] **B. Dacorogna**, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer, 1989
- [DM] **G. Dal Maso**, *Introduction to  $\Gamma$ -convergence*, Birkhäuser, 1993
- [DL6] **R. Dautray, J.L. Lions**, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 6: Evolution Problems II*, Springer, 2000.
- [DF] **D.G. De Figueiredo**, *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989.
- [Ev1] **L.C. Evans**, *Partial Differential Equations*, AMS, 1998
- [Ev2] **L.C. Evans**, *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, AMS, 1990
- [GH] **M. Giaquinta, S. Hildebrandt**, *Calculus of Variations I - The Lagrangian Formalism*, Springer, 1996.
- [Gr] **M. Grüter**, *The Principles of the Calculus of Variations*, Skript, Uni Saarbrücken, 2001; <http://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint25.ps.gz>
- [Jo] **J. Jost, X. Li-Jost**, *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, 1998.
- [Ju] **M. Junk**, *Calculus of Variations*, Skript, Uni Kaiserslautern, 2002.
- [KS] **D. Kinderlehrer, G. Stampacchia**, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press (1980).
- [Mü] **S. Müller**, *Variational models for microstructure and phase transitions*, CIME-lecture notes, 1998; [www.mis.mpg.de/preprints/ln/lecturenote-0298.pdf](http://www.mis.mpg.de/preprints/ln/lecturenote-0298.pdf)
- [RS1] **M. Reed, B. Simon**, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, 1980.

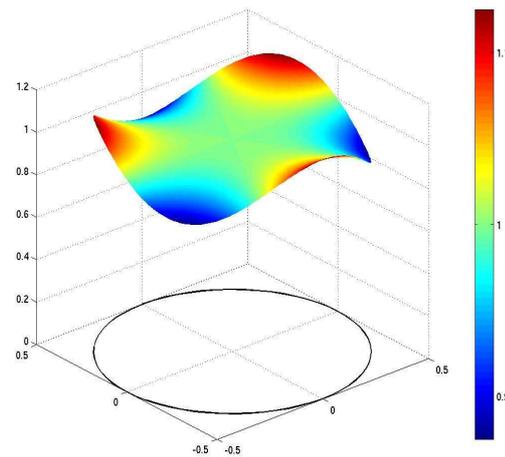
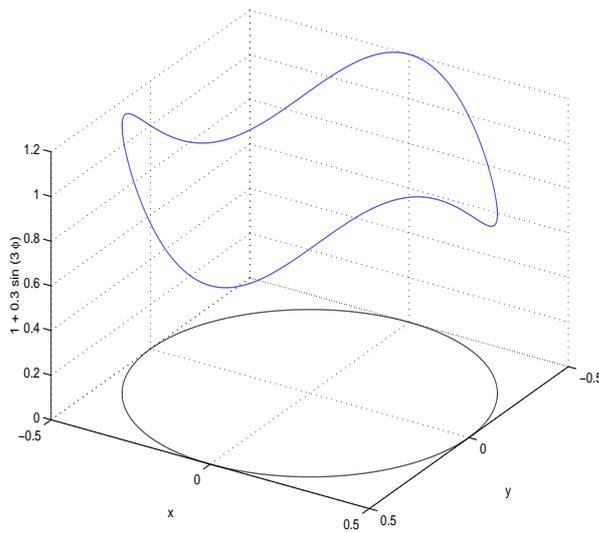
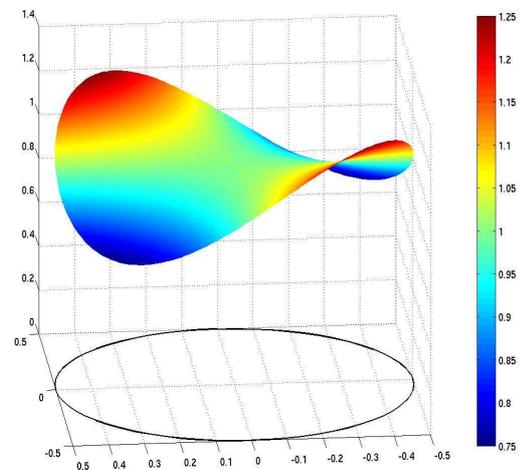
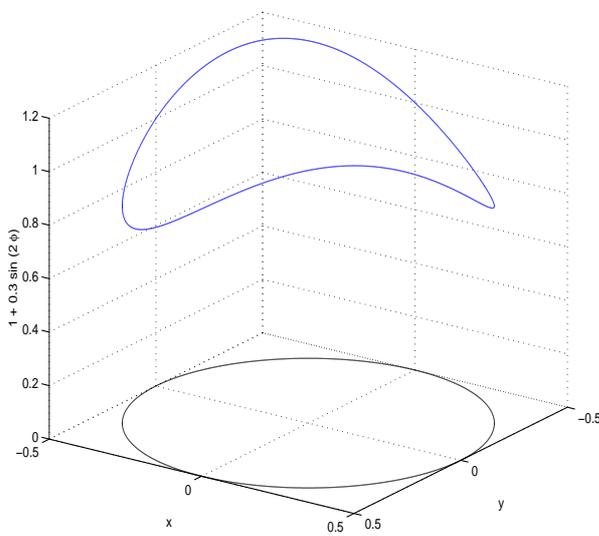
- [RR] **M. Renardy & R.C. Rogers**, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1993
- [Se] **J. Seiler**, *Einführung in die Variationsrechnung*, Skript, Uni Hannover, 2005;  
[http://www.ifam.uni-hannover.de/~seiler/skript/skript\\_var.pdf](http://www.ifam.uni-hannover.de/~seiler/skript/skript_var.pdf)
- [Sh1] **R.E. Showalter**, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Electron. J. Diff. Eqns., 1994; <http://ejde.math.swt.edu/Monographs/01/abstr.htm>
- [St] **M. Struwe**, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian System*, Springer, 1996.
- [vB] **B. van Brunt**, *The Calculus of Variations*, Springer, 2006.
- [vdM] **H. von der Mosel**, *Variationsrechnung I*, Skript, Uni Bonn, 2003;  
<http://www.instmath.rwth-aachen.de/~heiko/VarI.pdf>
- [Ze] **E. Zeidler**, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III - Variational Methods and Optimization*, Springer, 1985.

# B Folien

# Minimalflächen

$$\begin{cases} (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0, & \Omega \\ u = g, & \partial\Omega \end{cases}$$

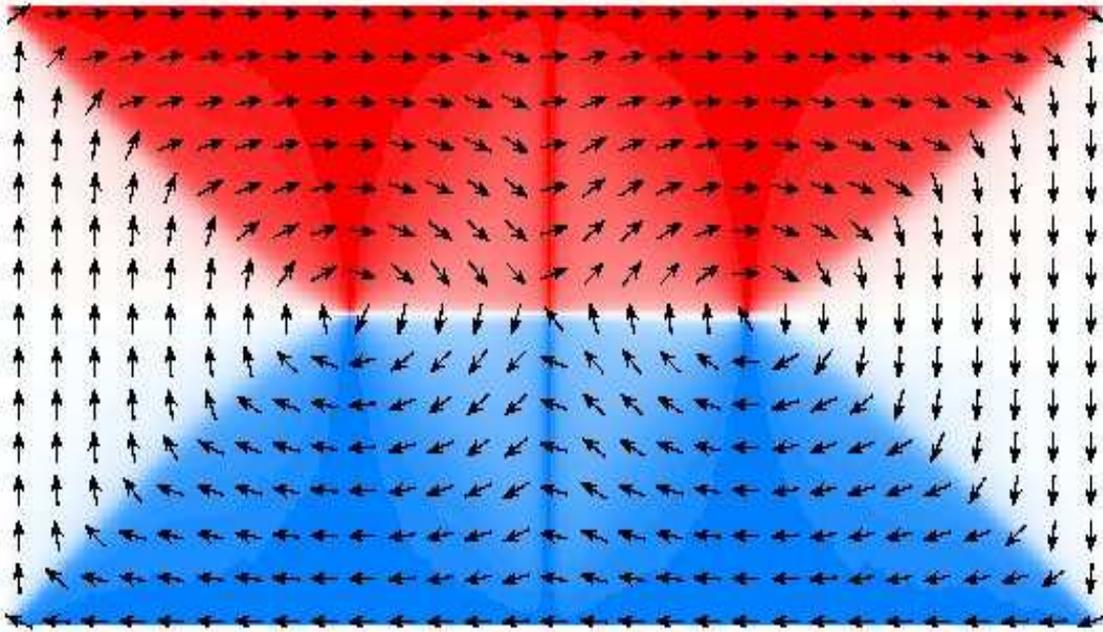
$$\Omega = \{x^2 + y^2 < 0.25\}$$



Randkurve  $g(\phi)$  auf  $\partial\Omega$

Minimalfläche  $u(x,y)$

# Magnetisierungsmuster



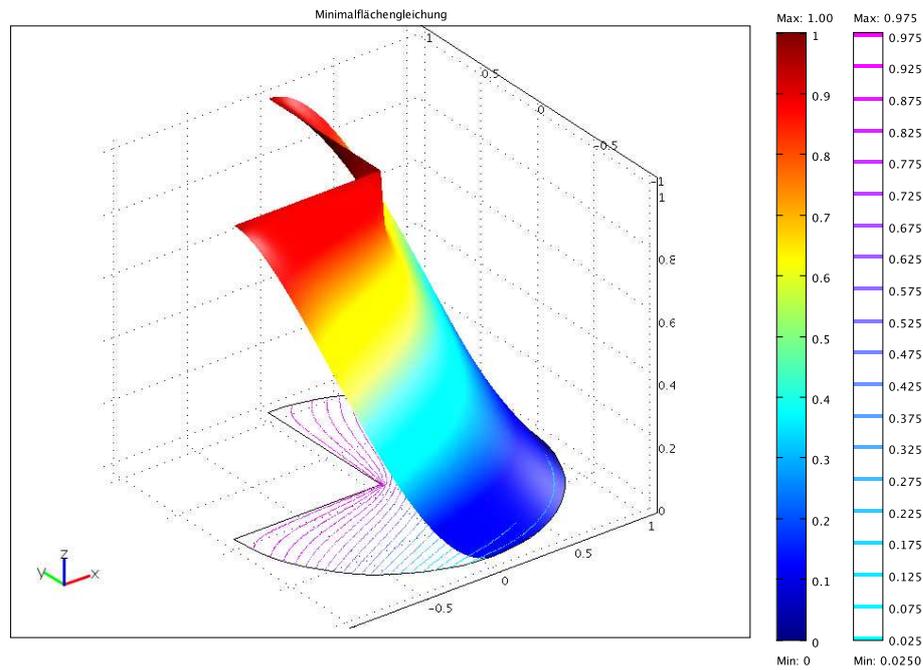
Magnetisierungsmuster einer Eisen-Mikrostruktur ( $1\mu m \times 2\mu m \times 20nm$ ) ohne externes Magnetfeld; inkl. 2 Wirbel- und 1 Antiwirbel-Unstetigkeit

# Minimalflächen über nicht-konvexem Gebiet

Die Minimalflächengleichung

$$(1 + u_{x_2}^2)u_{x_1x_1} - 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + (1 + u_{x_1}^2)u_{x_2x_2} = 0$$

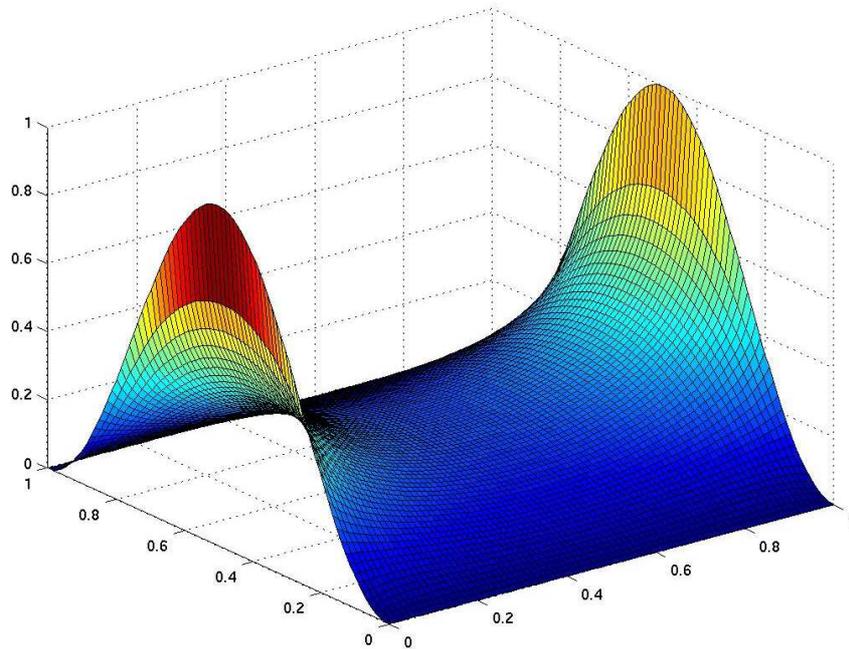
hat bei nicht-konvexem Gebiet nicht immer eine klassische Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .



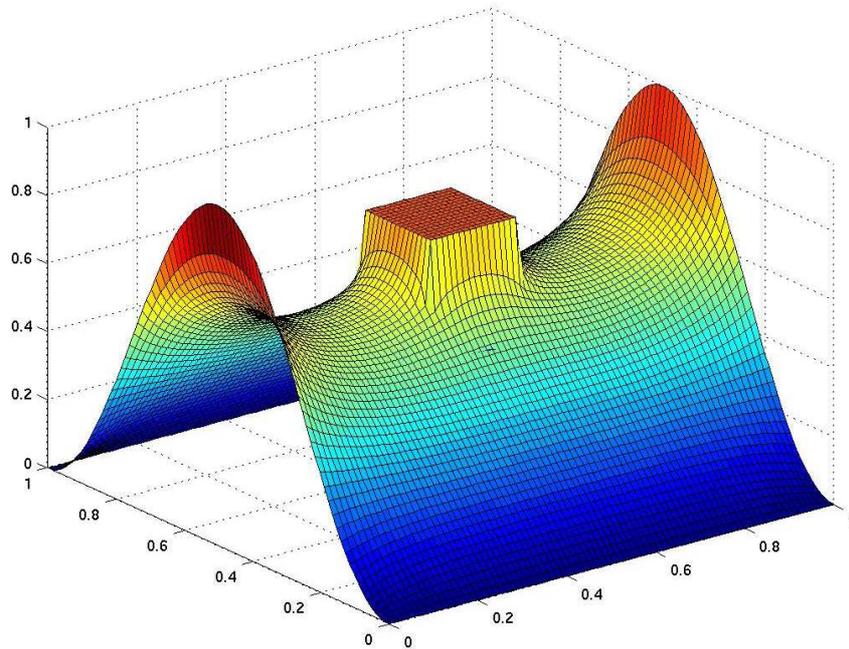
Minimalfläche mit Sinus-Randbedingung

Regularitätsverlust bei einspringender Ecke

## Minimalflächen mit Hindernis



## Minimalfläche mit Sinus-Randbedingung



## Minimalfläche mit Sinus-Randbedingung über Quader-Hindernis

# Hindernisproblem, "Penalty"-Methode

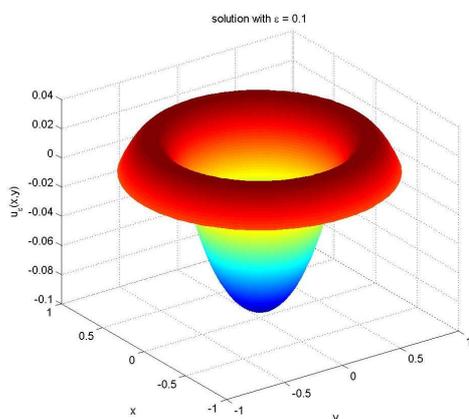
$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \, dx \xrightarrow{!} \min$$

$$\text{in } U := \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0\}, \quad \Omega = K_1(0),$$

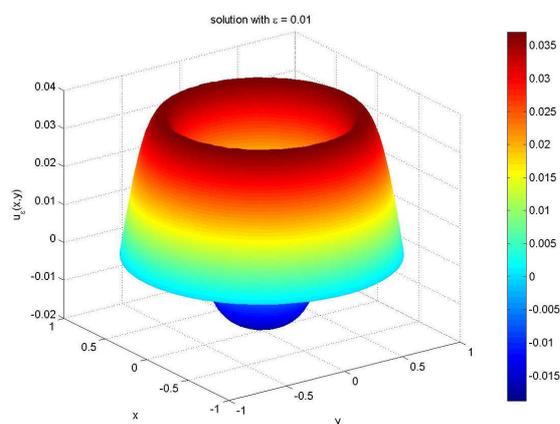
$$f(x) := \begin{cases} 1, & 0.5 < |x| < 1 \\ -2, & |x| < 0.5 \end{cases}$$

"Penalty"-Approximation:  $u^\varepsilon \rightharpoonup u$  in  $H_0^1(\Omega)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

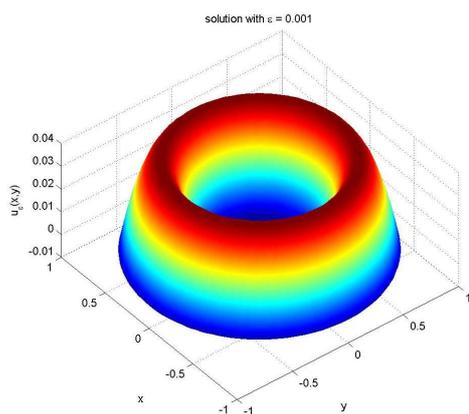
$$\begin{aligned} -\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon H(-u^\varepsilon) &= f, & \Omega \\ u^\varepsilon &= 0, & \partial\Omega \end{aligned}$$



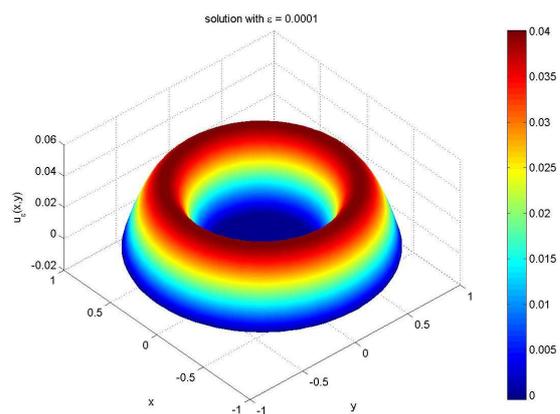
freies Minimum in  $H_0^1(\Omega)$



mit Strafterm,  $\varepsilon = 0.01$

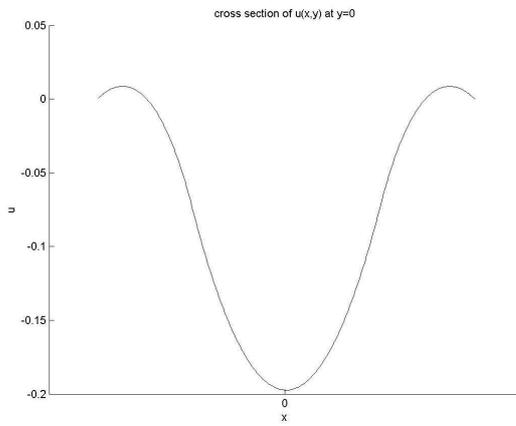


mit Strafterm,  $\varepsilon = 0.001$

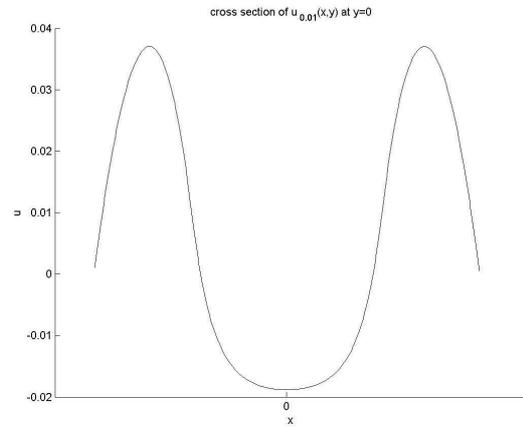


mit Strafterm,  $\varepsilon = 0.0001$

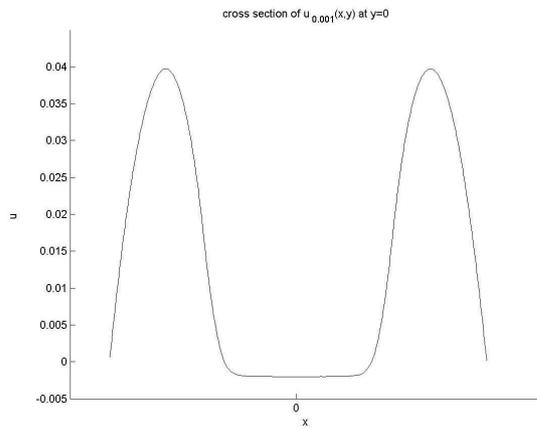
# “Penalty”-Approximationen – Querschnitte



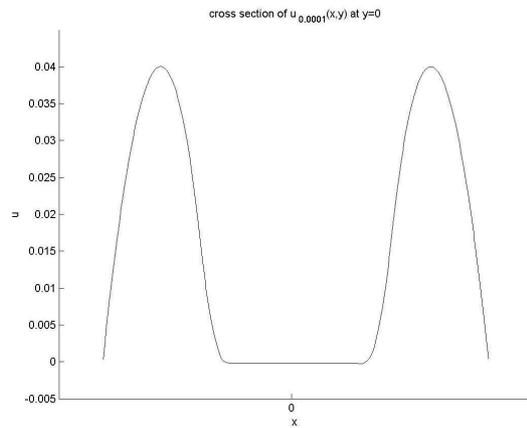
freies Minimum in  $H_0^1(\Omega)$



mit Strafterm,  $\varepsilon = 0.01$



mit Strafterm,  $\varepsilon = 0.001$



mit Strafterm,  $\varepsilon = 0.0001$

Für Minimum an  $x = 0$  (bzw. ‘inneres Plateau’) gilt:  $u_\varepsilon(0) \approx -2\varepsilon$

## “Penalty”-Methode, asymptotisches Verhalten

“Penalty”-Approximation in  $u^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} -\Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon H(-u^\varepsilon) &= f \quad , \quad \Omega \\ u^\varepsilon &= 0 \quad , \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{B.1}$$

- Übereinstimmungsmenge (d.h.  $u_0(x) = 0$ )  $C \subset K_{\frac{1}{2}}(0)$
- asymptotische Entwicklung in  $C$ :

$$u^\varepsilon(x) \approx u_0(x) + \varepsilon u_1(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad H(-u^\varepsilon) = 1$$

- einsetzen in (B.1), Koeffizientenvergleich:

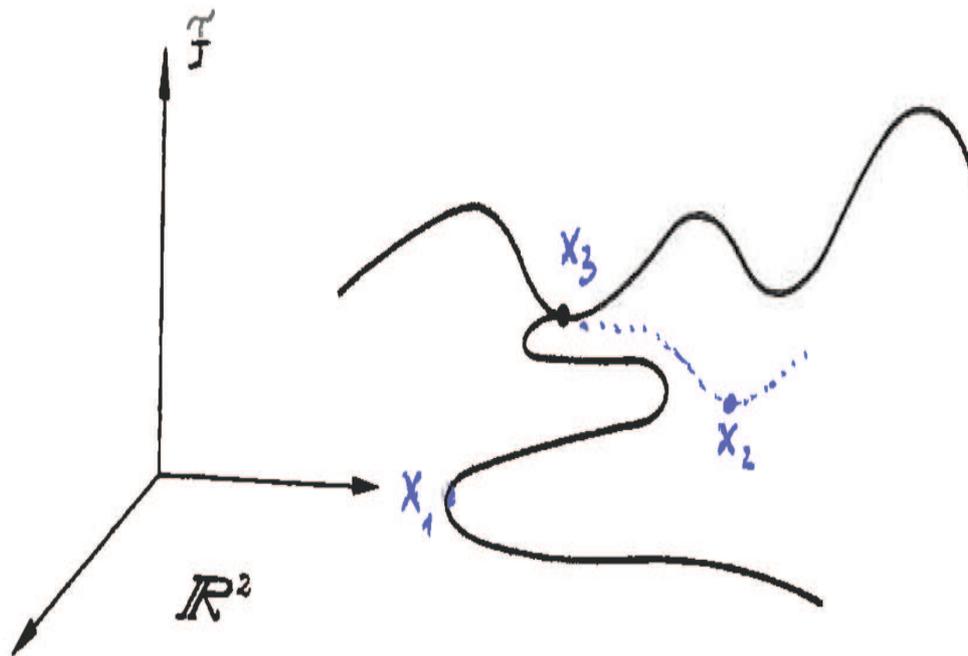
$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) : \quad u_0(x) = 0$$

$$\begin{aligned} O(1) : \quad -\Delta u_0 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon u_1 &= f \\ \Rightarrow u_1 = f &\Rightarrow u^\varepsilon(x) \approx -2\varepsilon, \quad x \in C \end{aligned}$$

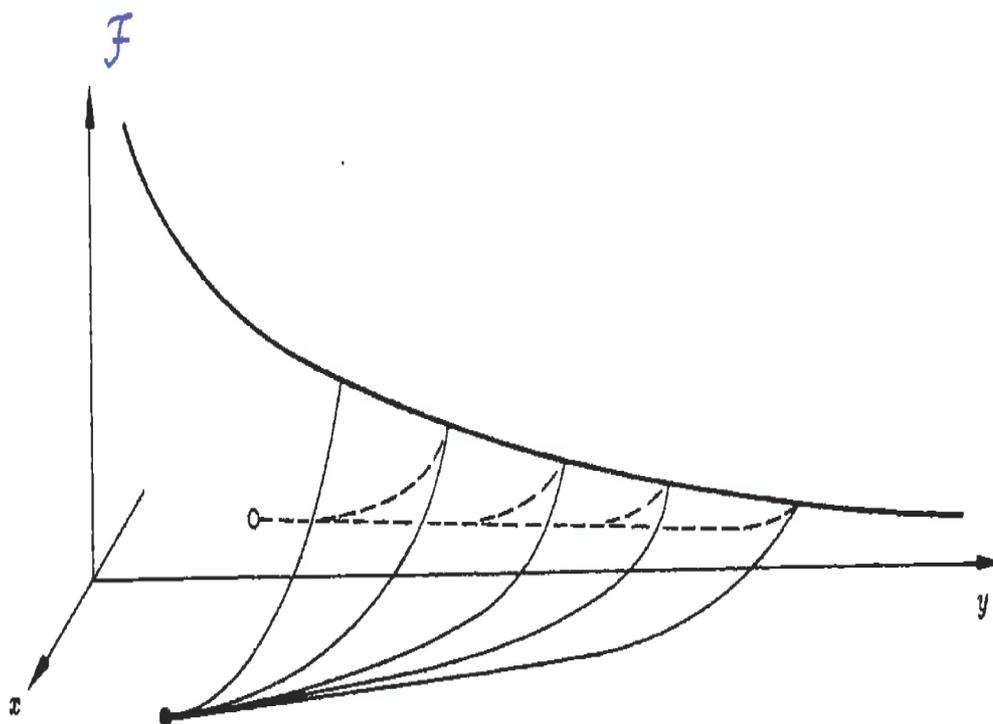
- numerische Lösung am Ursprung:

$\varepsilon$	$u^\varepsilon(0,0)$
0.1	- 0.0954511
0.01	- 0.0188197
0.001	- 0.0020001
0.0001	- 0.0002005

# endlich-dimensionales “Mountain Pass Theorem”

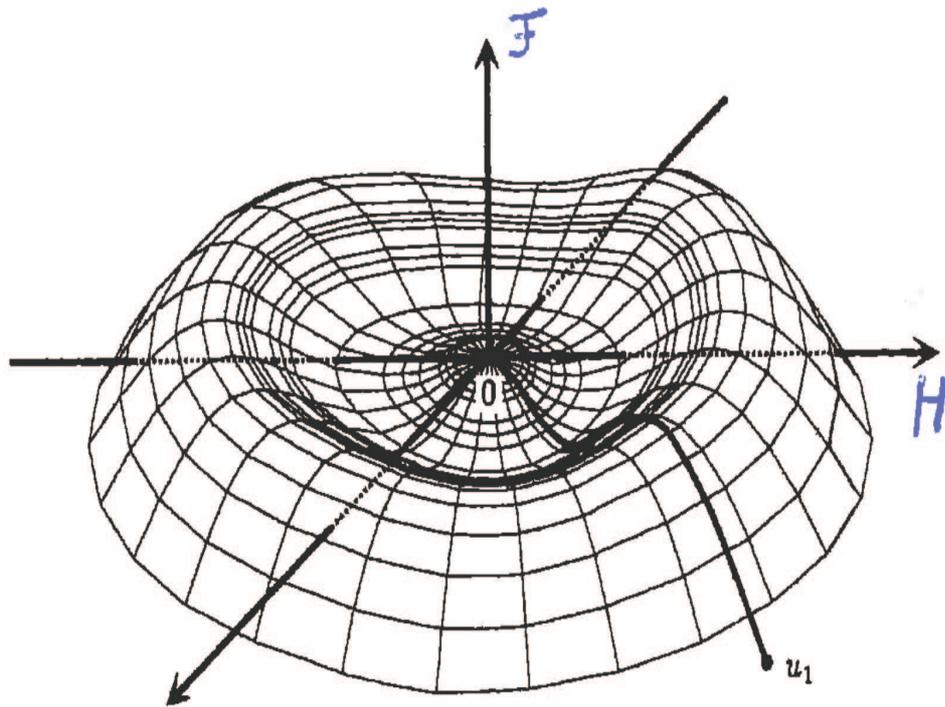


“Mountain Pass” in der  $\mathcal{F}$ -Landschaft [St]



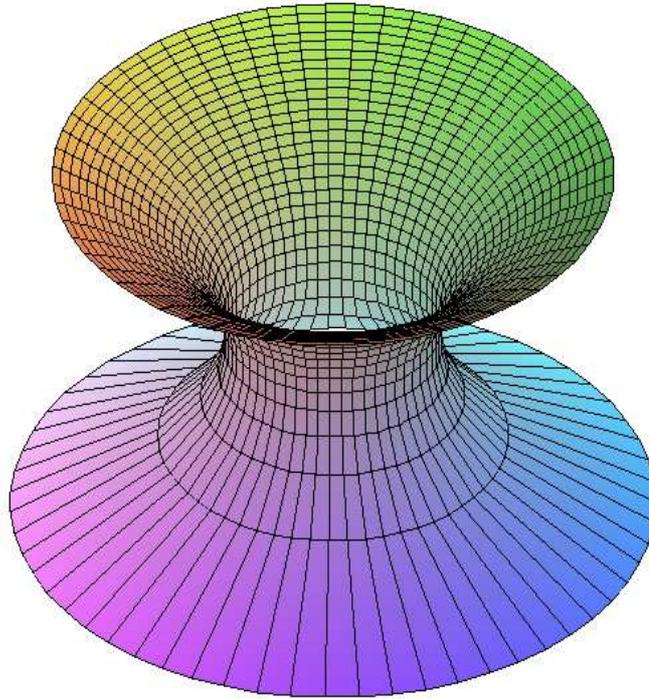
kein “Mountain Pass” wegen fehlender Koerzivität von  $\mathcal{F}(x, y) = e^{-y} - x^2$  [St]

# unendlich-dimensionales “Mountain Pass Theorem”



Bergring um lokales Minimum von  $\mathcal{F}$  an  $u = 0$  [St]

# Katenoid



Katenoid, als Minimalfläche, die zwischen 2 Kreisen eingespannt ist