VU Physikalische Konzepte
SS 2016

Ernst Dorfi, Leopold Haimberger, Florian Ragossnig, Daniel Steiner

Blatt 1

1. Zeigen Sie, dass die Integration der Planckfunktion

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

über die Frequenz ν den bekannten Ausdruck

$$B(T) = aT^4 \;, \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{2\pi^4 k^4}{15 c^2 h^3}$$

liefert. Dazu verwenden Sie $x \equiv h\nu/kT$ als dimensionslose Variable, heben den Ausdruck $exp(-x)$ heraus, entwickeln die Planck-Funktion in eine Potenzreihe und integrieren die einzelnen Terme partiell. Für die verbleibende Summe gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \;.$$

2. Mit Hilfe der Größen $\beta P = P_\mathrm{g} = \mathcal{R}\rho T/\mu$ und $(1-\beta)P = P_\mathrm{rad}$ lässt sich der Gesamtdruck P auch über eine Polytrope $P = K\rho^{1+1/n}$ mit $n = 3$ ausdrücken. Zeigen sie, dass für die Konstante K gilt

$$K = \left(\frac{\mathcal{R}^4}{\mu^4} \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta^4} \right)^{1/3} \;.$$

3. In einem azimuthal-symmetrischen Strahlungsfeld mit $\mu = \cos\theta$ lassen sich Momente durch

$$M_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\nu(r,\mu) \mu^n \, d\mu$$

definieren. Berechnen sie im Falle einer einfachen Intensitätsverteilung $I_\nu(r,\mu) = a_\nu(r) + b_\nu(r)\mu$ die Momente M_0, M_1 und M_2 und zeigen sie daraus

$$\frac{M_2}{M_0} = \frac{1}{3} \;.$$

4. Zeigen sie durch partielle Integration und den Definitionen aus dem vorherigen Beispiel, dass sich aus der Strahlungstransportgleichung

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} + \kappa_\nu \rho (I_\nu - S_\nu) = 0.$$

für das 1. Moment die folgende Relation ableiten lässt

$$\frac{1}{c}\frac{\partial M_1}{\partial t} + \frac{\partial M_2}{\partial r} - \frac{3M_2 - M_0}{r} + \kappa_\nu \rho \, M_1 = 0 \;.$$

5. Die Lösungen der Strahlungstransportgleichung lassen sich mit Hilfe der sog. Expontialintegrale $E_n(x)$ darstellen. Es gilt

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-xt)}{t^n}\, dt \,.$$

Beweisen sie die folgenden Relationen

$$E_n(x) = x^{n-1} \int_x^\infty \frac{\exp(-t)}{t^n}\, dt \quad \text{und} \quad E_n(x) = \frac{1}{n-1}\left[e^{-x} - xE_{n-1}(x)\right] \,.$$