

VU Physikalische Konzepte

SS 2016

Ernst Dorfi, Leopold Haimberger, Florian Ragossnig, Daniel Steiner

Blatt 7

1. Betrachten Sie die zeitabhängige 1D-Schrödinger-Gleichung (Konstanten auf 1 gesetzt),

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V(x) \psi ,$$

wobei $\psi = \psi(x, t)$ die Wellenfunktion und $V(x)$ ein Potential darstellt. Wenn die Annahme getroffen wird, dass die Amplitude von ψ zeitunabhängig ist, kann ein Separationsansatz gemacht werden,

$$\psi(x, t) = e^{i E t} X(x) ,$$

wobei $X(x)$ die Amplitudenfunktion und E die im System enthaltene Energie darstellen. Mit diesem Ansatz ist zu zeigen, dass die Schrödingergleichung (partielle Differentialgleichung PDE) auf eine gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) zurückgeführt werden kann, nämlich

$$X'' + (E - V)X = 0 .$$

Für welche Art von Wellen macht der Separationsansatz Sinn?

2. Nehmen Sie nun als Potential das eines ungedämpften, harmonischen Oszillators an,

$$V(x) = \frac{x^2}{4} .$$

Weiters verwenden Sie die Variablentransformation $X(x) = e^{-V(x)} y(x)$, welche, physikalisch gesprochen, die Amplitudenanteile der Lösung berechnen lässt, ohne explizit auf das Potential einzugehen (ist durch die Variablentransformation bereits inkorporiert). Mit dieser Transformation ist zu zeigen, dass die vorherige ODE auf die Hermit'sche ODE (vgl. Bsp. 4, Zettel 6, nur anders normiert) zurückzuführen ist,

$$y'' - xy' + \lambda y = 0 ,$$

mit $\lambda = E - \frac{1}{2}$.

3. Angenommen, die Lösung $y(x)$ lässt sich als Polynom aufschreiben, also

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m .$$

Finden Sie durch Einsetzen in die angegebene Hermit'sche ODE die Rekursionsformel

$$a_{m+2} = \frac{(m - \lambda)a_m}{(m + 1)(m + 2)} .$$

4. Die Rekursionsformel des vorherigen Beispiels führt auf *endliches* Polynom für $y(x)$, wenn für $\lambda = n$, $n \in \mathbb{N}_0$ bestimmte Bedingungen an a_0 und a_1 geknüpft werden für die beiden Fälle von n ist gerade oder ungerade. Welche Bedingungen sind das?
5. Eine geringfügig anders normierte Variante der Hermit'schen Polynome und ihrer Rekursionsformeln (vgl. Bsp 3, Zettel 6) sieht folgendermaßen aus,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2} \right) ,$$

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x) .$$

Zeigen Sie, mit Verwendung der in Bsp. 3 und 4 gefundenen Rekursionsformel für a_m und den hier aufgeführten Eigenschaften der Hermit'schen Polynome für $n = 2, 3, \dots, 5$, dass $y(x)$ die Hermit'schen Polynome realisiert.