

MATHEMATISCHE MODELLBILDUNG

G. WITTERSTEIN (gw@ma.tum.de)

Technische Universität München, SS 2015

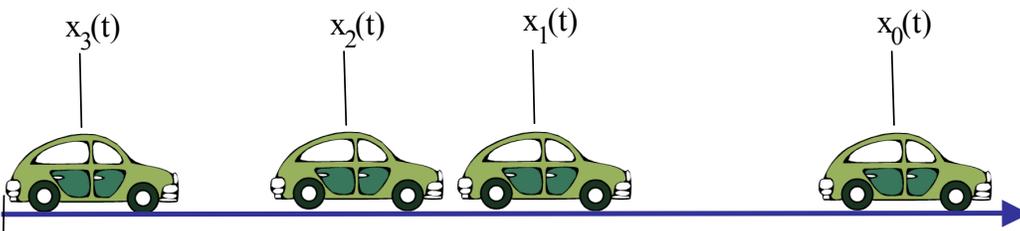
1. Lineare Modelle

1.1 Verkehrsflußmodelle

Fahrzeugfolgemodelle sind mikroskopische Modelle, in welchen wir das Verhalten einer Fahrzeugkolonne modellieren wollen. Für jedes Fahrzeug stellen wir dazu eine Bewegungsgleichung auf. Sei $x_n = x_n(t)$ die Position des n -ten Fahrzeuges zum Zeitpunkt t . Für das n -te Fahrzeug schreiben wir folgende DGL:

$$x_n'(t) = \gamma_n(t)(x_{n-1}(t) - x_n(t)) \quad \text{mit} \quad x_n(t) < x_{n-1}(t). \quad (1)$$

Die Geschwindigkeit des n -ten Fahrzeuges richtet sich nach dem Abstand zum vorausfahrenden $(n-1)$ -ten Fahrzeug. Der Koeffizient $\gamma_n = \gamma_n(t)$ beschreibt das individuelle Verhalten des n -ten Fahrzeuges zum Zeitpunkt t . Die Fahrzeuge bewegen sich von links nach rechts.



Wir werden hier hauptsächlich den Fall

$$\gamma_n(t) = \gamma = \text{konstant} \quad (2)$$

betrachten. Dieses Modell wurde auch in TA 2 behandelt.

Bemerkung 1. 1. Es gibt an sich im Modell einen Minimalabstand $\Delta_0 > 0$, welcher einer durchschnittlichen Fahrzeuglänge entspricht. Die Differentialgleichung ist dann zu ersetzen durch

$$x_n'(t) = \gamma_n(t)(x_{n-1}(t) - x_n(t) - \Delta_0) \quad \text{mit} \quad x_n(t) < x_{n-1}(t) - \Delta_0.$$

Es kann Δ_0 auch vom Fahrer abhängen. Dies werden wir hier nicht weiter betrachten.

2. Berücksichtigt man im Modell eine gewisse Reaktionszeit $t_R > 0$ der Fahrer, so ist das Ausgangsmodell (1) zu ersetzen durch

$$x'_n(t) = \gamma_n(t)(x_{n-1}(t - t_R) - x_n(t - t_R)).$$

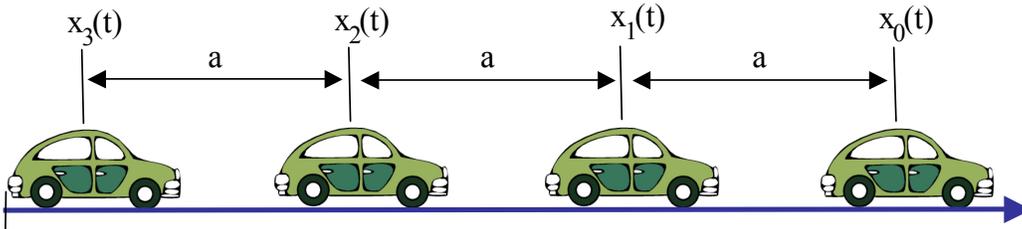
Es kann t_R^n auch vom Fahrer abhängen. Auch dies werden wir hier nicht weiter betrachten.

3. Es kann auch $\gamma_n = \gamma_n(t)$ vom Fahrer abhängen oder es kann folgendes auftreten

$$\gamma_n(t) := \gamma(|x_{n-1}(t) - x_n(t)|). \quad \square$$

Wir betrachten nun die folgenden in der Realität auftretenden Fälle, wobei wir die Eigenschaft (2), $\gamma_n(t) = \gamma = \text{konstant}$, voraussetzen.

1. Fall: Gleichförmiger ("homogener") Verkehr



Es sind die Funktionen

$$x_n(t) = ct - na \quad a > 0, c > 0$$

Lösungen der Differentialgleichungen (1), falls gilt

$$c = \gamma a.$$

Das bedeutet bei gegebenen γ : Große Geschwindigkeiten = großer Abstand.

Bemerkung: Wenn die $\gamma_n = \text{konstant}$ für jeden Fahrer verschieden sind, dann sind $x_n(t) = ct - na_n$ Lösungen von (1), falls $c = \gamma_n \tilde{a}_n$ gilt, wobei $\tilde{a}_n := n(a_{n-1} - a_n) + a_{n-1}$ der Abstand vom n -ten zum $(n-1)$ -ten Fahrzeug. Das bedeutet, der Abstand \tilde{a}_n hängt vom Fahrverhalten γ_n des n -ten Fahrers ab, die Geschwindigkeit c bleibt aber konstant.

2. Fall: Das "nullte" Auto unternimmt eine Aktion

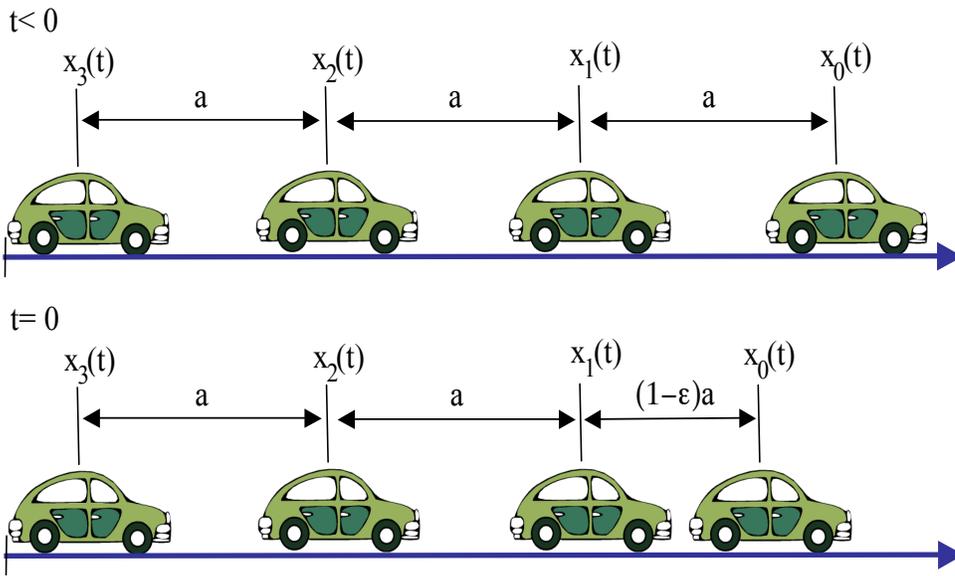
Wir betrachten

$$\begin{aligned} n \geq 1: & \quad x_n(t) = ct - na \quad \text{für } t \leq 0, \\ n = 0: & \quad x_0(t) = ct - \varepsilon a \quad \text{für } t > 0, \end{aligned}$$

Man beachte hierbei der 0-te Fahrer verhält sich nach

$$x_0(t) = ct - (0 + \varepsilon)a \quad \text{für } t > 0.$$

Das bedeutet der 0-te Fahrer ist ab dem Zeitpunkt $t=0$ nach hinten um εa , $\varepsilon > 0$ versetzt, fährt dann aber mit derselben Geschwindigkeit c weiter.



Behauptung: Für Lösungen x_n der DGL (1) gibt es Funktionen y_n , so dass

$$\begin{aligned} n \geq 1: & \quad x_n(t) = ct - (n + \varepsilon)a + y_n(t) & \text{für } t \geq 0, \\ n = 0: & \quad x_0(t) = ct - \varepsilon a & \text{für } t > 0, \end{aligned}$$

wobei $y_n(0) = \delta$, $\delta = \varepsilon a$, und $y_n(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$.

Die Behauptung besagt, dass die Fahrzeuge, welche dem 0-ten Fahrzeug folgen, die Aktion des ersten Fahrzeuges auch ausführen.

Beweis: Für y_n muss für $n \geq 1$ gelten

$$c + y_n'(t) = x_n'(t) = \gamma(x_{n-1}(t) - x_n(t)) = \gamma(a + y_{n-1}(t) - y_n(t)).$$

Da $c = \gamma a$ ergibt sich folgendes Problem

$$\begin{aligned} n = 0: & \quad y_0(t) = 0, \\ n \geq 1: & \quad y_n'(t) = \gamma(y_{n-1}(t) - y_n(t)), \quad y_n(0) = \delta. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\tilde{z}_n(t) := \frac{e^{\gamma t} y_n(t)}{\delta},$$

mit

$$\tilde{z}_n'(t) = \frac{1}{\delta} (e^{\gamma t} y_n(t))' = \frac{e^{\gamma t}}{\delta} (y_n'(t) + \gamma y_n(t)) = \frac{e^{\gamma t}}{\delta} \gamma y_{n-1}(t) = \gamma \tilde{z}_{n-1}(t),$$

folgt

$$\begin{aligned} n = 0: & \quad \tilde{z}_0(t) = 0, \\ n \geq 1: & \quad \tilde{z}_n'(t) = \gamma \tilde{z}_{n-1}(t), \quad \tilde{z}_n(0) = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Lösung zu (3) lautet

$$\tilde{z}_n(t) = \sum_{0 \leq i < n} \frac{(\gamma t)^i}{i!}.$$

Nebenrechnung: Wir setzen $z_n(s) := \tilde{z}_n\left(\frac{s}{\gamma}\right)$ und lösen

$$z'_n(s) = z_{n-1}(s), \quad z_n(0) = 1, \quad n \geq 1, \quad \text{mit } z_0(s) = 0.$$

Das heisst, $z'_1(s) = 0 \Rightarrow z_1(s) = 1$, $z'_2(s) = 1 \Rightarrow z_2(s) = 1 + s$, $z'_3(s) = 1 + s \Rightarrow z_3(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2}$,
Damit ist die Lösung

$$z_n(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2} + \dots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{0 \leq i < n} \frac{s^i}{i!} .$$

Damit ergibt sich die Lösung

$$y_n(t) = \delta e^{-\gamma t} \sum_{0 \leq i < n} \frac{(\gamma t)^i}{i!},$$

welche $y_n(0) = \delta$ und $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_n(t) = 0$ erfüllt.

3. Fall: Das "nullte" Auto fährt langsamer als die nachfolgenden Autos

Wir betrachten

$$\begin{aligned} n \geq 1: & \quad x_n(t) = c_2 t - n a_2 & \text{für } t \leq 0, \\ n = 0: & \quad x_0(t) = c_1 t & \text{für } t > 0, \end{aligned}$$

wobei vorausgesetzt ist

$$0 \leq c_1 < c_2 = \gamma a_2.$$

Behauptung: Für Lösungen x_n der DGL (1) gibt es Funktionen y_n , so dass

$$\begin{aligned} n \geq 1: & \quad x_n(t) = c_1 t - n a_1 - y_n(t) & \text{für } t \geq 0, \\ n = 0: & \quad x_0(t) = c_1 t & \text{für } t > 0, \end{aligned}$$

mit $a_1 := c_1 / \gamma$. Hierbei ist $y_n(0) = n(a_2 - a_1)$ und $y_n(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$.

Beweis: Für y_n muss gelten

$$y'_n(t) = c_1 - x'_n(t) = c_1 - \gamma(x_{n-1}(t) - x_n(t)) = \underbrace{c_1 - \gamma a_1}_{=0} + \gamma(y_{n-1}(t) - y_n(t)) = \gamma(y_{n-1}(t) - y_n(t))$$

und

$$-n a_2 = x_n(0) = -n a_1 - y_n(0) \quad \Rightarrow \quad y_n(0) = n(a_2 - a_1).$$

Es ergibt sich für y_n folgendes Problem

$$\begin{aligned} n = 0: & \quad y_0(t) = 0, \\ n \geq 1: & \quad y'_n(t) = \gamma(y_{n-1}(t) - y_n(t)), \quad y_n(0) = n b, \end{aligned}$$

wobei $b := a_2 - a_1 > 0$, da $c_1 < c_2$. Wir setzen

$$\tilde{z}_n(t) := \frac{e^{\gamma t} y_n(t)}{b},$$

und erhalten das folgende Problem

$$\begin{aligned} n = 0: & \quad \tilde{z}_0(t) = 0, \\ n \geq 1: & \quad \tilde{z}'_n(t) = \gamma \tilde{z}_{n-1}(t), \quad \tilde{z}_n(0) = n. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Lösung zu (4) lautet
$$\tilde{z}_n(t) = \sum_{0 \leq i < n} (n-i) \frac{(\gamma t)^i}{i!}$$

und damit ergibt sich die Lösung

$$y_n(t) = b e^{-\gamma t} \sum_{0 \leq i < n} (n-i) \frac{(\gamma t)^i}{i!},$$

welche $y_n(0) = nb$ und $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_n(t) = 0$ erfüllt.

1.2 Schwingungen

Gedämpfte/Ungedämpfte Schwingung: Betrachte das folgende Anfangswertproblem (AWP) auf einem beschränktem Intervall $I = [0, T]$:

$$x'' + \varepsilon x' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad (5)$$

wobei ε ein gegebener, kleiner positiver Parameter ist. Die gesuchte Lösung $x_\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto x_\varepsilon(t)$ ist somit von $\varepsilon > 0$ abhängig.

Wir schreiben nun AWP (5) als Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Hierzu setzen wir $y(t) := x'(t)$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Die exakte Lösung von Problem (6) können wir nach TA1 explizit berechnen. Sie lautet

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}} e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \sin\left(t \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\right). \quad (7)$$

Betrachten wir Problem (5) mit $\varepsilon = 0$, das heißt

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad (8)$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

so ist die Lösung von (8) ist trivial und lautet

$$x_0(t) = \sin t. \quad (10)$$

Wir sehen der Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ ist der Übergang der gedämpften zur ungedämpften Schwingung. Wir bezeichnen Problem (6) als ein durch den Parameter ε **gestörtes Problem** im Vergleich zum **ungestörten Problem** (8). \square

- **Physikalische Interpretation: Das Fadenpendel**

Die Größe $x = x(t) \in \mathbb{R}$ beschreibe die (kleine) horizontale Auslenkung des Pendelkörpers eines Fadenpendels (in erster Näherung) für einen Zeitpunkt t . Auf den Pendelkörper wirkt

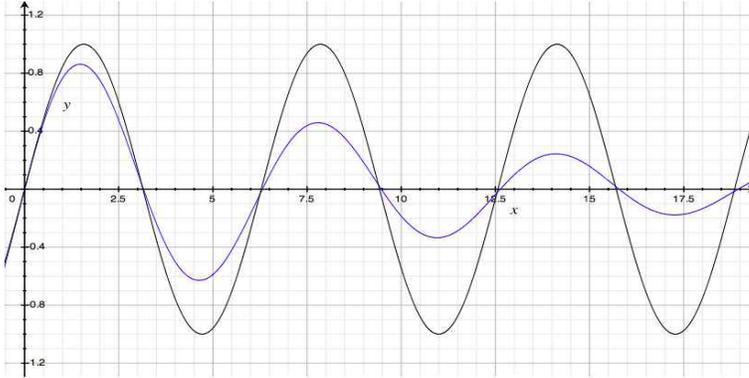


Abbildung 1: Die blaue Kurve ist x_ε für $\varepsilon=0.2$ und die schwarze Kurve ist x_0 .

eine Kraft F , welche vom Ort und der Geschwindigkeit abhängt. Die Bewegungsgleichung lautet in erster Näherung

$$m\ddot{x}(t)=F(t,x(t),\dot{x}(t)).$$

Wir nehmen an $F=F_H+F_R$. Für die Kraft F_H , welche den Pendelkörper zurück zur Ruhelage bei $x=0$ treibt, nehmen wir an, dass sie proportional zur Masse m und zur Auslenkung x ist. Das heißt, $F_H=-\alpha mx$. Für die Reibungskraft F_R nehmen wir an, dass F_R proportional zur Geschwindigkeit ist, das heißt $F_R=-\gamma\dot{x}$. Damit ist $m\ddot{x}=-\alpha mx-\gamma\dot{x}$ und folglich

$$\ddot{x}=-\alpha x-\varepsilon\dot{x}$$

für $\varepsilon:=\gamma/m$. Im Falle $\alpha=1$ ergibt sich Gleichung (5) (oder durch Transformation der Zeitkoordinaten).

Für eine ausführliche Herleitung der Bewegungsgleichung des Fadenpendels ohne Reibungskraft, verweisen wir bei Interesse auf Kapitel 2.3. \square

1.3 Wachstums- und Zerfallsgesetz

Das "Zerfallsgesetz ist die in der Physik übliche Bezeichnung der Gleichung, die eine exponentielle zeitliche Abnahme" einer "Größe beschreibt. Als Wachstumsrate bezeichnet man die durchschnittliche relative Zunahme einer Größe pro Zeiteinheit." [Wikipedia] Die beschreibende Differentialgleichung lautet:

$$x'(t)=\mu x(t), \quad \text{für alle } t \in I, \quad x(\bar{t})=\bar{x}, \quad (11)$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$ die spezifische **Wachstums-** oder **Zerfallsrate** ist, und $\bar{x} \in \mathbb{R}$ der Startwert zum Zeitpunkt $t=\bar{t}$. Es sei I ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall in \mathbb{R} .

Die exakte Lösung für konstantes μ lautet: $x(t)=\bar{x}e^{\mu(t-\bar{t})}$.

Die exakte Lösung für $\mu=\mu(t)$ lautet: $x(t)=\bar{x}\exp\left(\int_{\bar{t}}^t \mu(s)ds\right)$.

- **Betriebswirtschaftliche Interpretation: Zinsrechnung**

(Übergang von einem zeitdiskreten Modell zu einem in der Zeit kontinuierlichen Modell)

Sei φ_k das Kapital zum Zeitpunkt $k \in \mathbb{N}$, sei z der Jahreszinssatz und $a = z/100$. Die jährliche Verzinsung bei festem Zinssatz z wird modelliert durch $\varphi_{k+1} = (1+a)\varphi_k$. Also ist das Startkapital φ_0 nach k Jahren angewachsen auf

$$\varphi_k = (1+a)^k \varphi_0.$$

Bei einer Verzinsung in Zeitintervallen der Länge $1/n$ ist die Zeitspanne $t = k/n$, $t \in \mathbb{Q}$ und der prozentuale Zinssatz a/n . Der Gesamtbetrag nach $nt = k$ Jahren gleich

$$\varphi^n(t) := \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{nt} \varphi_0 = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}at} \varphi_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{at} \varphi_0 := \varphi^\infty(t).$$

Den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ nennt man "kontinuierliche Verzinsung". Die Funktion φ^∞ löst die Differentialgleichung (11) mit $\mu = a$ und $x_0 = \varphi_0$.

- **Biologische Interpretation: Populationswachstum**

$$N'(t) = (\Gamma - \Sigma)N(t),$$

wobei $\Gamma > 0, \Sigma > 0$, Γ Geburtenrate und Σ Sterberate.

- **Physikalische Interpretation: Kernphysik**

"In der Kernphysik gibt das Zerfallsgesetz die Anzahl N , der zu einem Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Atomkerne einer radioaktiven Substanzprobe an. Diese Anzahl beträgt, $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, wobei N_0 die Anzahl der am Anfang ($t=0$) vorhandenen Atomkerne und λ die Zerfallskonstante des betreffenden Nuklids ist." [Wikipedia] \square

2. Nichtlineare Modelle

2.1 Existenz einer Lösung für nichtlineare Modelle

Beispiel 2 (Nichtlineares Problem). Wir betrachten

$$x'(t) = x^2(t) \quad t \in I, \quad x(0) = \bar{x}.$$

Dieses Problem hat eine eindeutige Lösung

$$x(t) = \frac{\bar{x}}{1 - t\bar{x}},$$

welche nur in $(-\infty, 1/\bar{x})$ definiert ist. \square

Wir betrachten in diesem Abschnitt allgemein ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung von der Gestalt

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in I. \tag{12}$$

Hierbei ist I eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R} und $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, z) \mapsto f(t, z)$ eine beliebige Funktion.

Definition 3 (Schwache Lösung einer Differentialgleichung). Es sei $I = [\bar{t}, T]$. Gegeben sei ein Differentialgleichungssystem mit Anfangswerten (AWP=Anfangswertproblem)

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in I, \quad x(\bar{t}) = \bar{x}. \quad (13)$$

Wir nennen eine Funktion $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, welche das AWP (13) löst, eine **starke Lösung**.

Wir nennen eine Funktion $x \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine **schwache Lösung** von AWP (13), falls gilt

$$x(t) = \bar{x} + \int_{\bar{t}}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{für fast alle } t \in I. \quad (14)$$

□

Notation 4. Wenn wir allgemein von einer Lösung einer Differentialgleichung sprechen, so meinen wir hiermit eine starke Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Sollte es sich um eine schwache Lösung handeln, so wird das explizit erwähnt.

Folgerung 5. Jede starke Lösung von AWP (13) ist auch eine schwache Lösung. □

Bemerkung 6. 1. Aus der Analysis wissen wir, falls f stetig, dann erfüllt die starke Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ die Integralform (14) auf jeden Fall, insbesondere ist die Integralform (14) äquivalent zum AWP (13) (denn: 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

2. Ausserdem gilt: Ist f stetig und $x \in C^0(I, \mathbb{R})$ ist eine schwache Lösung von DGL (13), das heisst x erfülle Gleichung (14), dann ist $x \in C^1(I, \mathbb{R})$. □

Zu Beginn möchten wir uns mit der Lösbarkeit eines solchen Systems (12) (mit vorgegebenen Anfangsdaten) befassen und beweisen hierzu den Satzes von Picard-Lindelöf.

Voraussetzung 7 (Lipschitz-Bedingung). Es sei I ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall. Es sei $D \subset I \times \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ und $f: D \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Wir setzen voraus: Für jede abgeschlossene, beschränkte Menge $K \subset D$ existiert eine nicht-negative Funktion $\varphi \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ mit

$$\|f(t, z_2) - f(t, z_1)\| \leq \varphi(t) \|z_2 - z_1\| \quad \text{für alle } (t, z_1), (t, z_2) \in K. \quad \square$$

Theorem 8 (Satz von Picard-Lindelöf). Es sei $I = [\bar{t}, T]$. Die Funktion $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und erfülle die Voraussetzung 7. Es existieren positive Funktionen $M \in L^1(I; \mathbb{R})$ und $R \in C^0(I; \mathbb{R})$, $R > 0$ und eine Konstante $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. **Beschränktheit:** Für alle $t \in I$

$$\|z - \bar{x}\| \leq R(t) \quad \Rightarrow \quad \|f(t, z)\| \leq M(t).$$

2. **Kleinheit:** Für alle $t \in I$

$$\int_{\bar{t}}^t M(s) ds < R(t).$$

Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung $x \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in I, \quad x(\bar{t}) = \bar{x}. \quad (15)$$

Diese Lösung erfüllt

$$\|x(t) - \bar{x}\| < R(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis. Es ist $Y = \mathbb{R}^n$ und

$$\mathcal{M} := \{x \in C^0(I; Y) : \|x(t) - \bar{x}\| \leq R(t) \text{ für } t \in I\}$$

eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge des $C^0(I; Y)$. Wir definieren auf \mathcal{M} den Operator

$$F(x)(t) := \bar{x} + \int_{\bar{t}}^t f(s, x(s)) ds.$$

Der Operator F ist wohldefiniert, da f stetig und nach *Bed. 1* mit M eine Majorante besitzt. Nach Definition ist die Existenz einer schwachen Lösung äquivalent zur Existenz eines Fixpunktes von F . Wir wollen diesen mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes zeigen.

1. F ist eine Selbstabbildung, denn aus

$$\|F(x)(t) - \bar{x}\| \stackrel{1. \text{ Bed.}}{\leq} \int_{\bar{t}}^t M(s) ds \stackrel{2. \text{ Bed.}}{\leq} R(t)$$

folgt $F(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$.

2. F ist eine Kontraktion: Für $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ nutzen wir die Lipschitz-Bedingung (*Vor. 7*)

$$\|F(x_2)(t) - F(x_1)(t)\| \leq \int_{\bar{t}}^t \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\| ds \leq \int_{\bar{t}}^t \varphi(s) \|x_2(s) - x_1(s)\| ds. \quad (16)$$

Es sei $\omega \in C^0(I; \mathbb{R})$ eine strikt positive Funktion. Wir definieren auf $C^0(I; Y)$ die Norm

$$\|x\|_{\omega} := \sup_{t \in I} \frac{1}{\omega(t)} \|x(t)\| \quad \text{für } x \in C^0(I; Y),$$

welche äquivalent zur Standardnorm $\|\cdot\|_{\infty}$ ist.¹ Das impliziert, dass der Vektorraum $(C^0(I, Y), \|\cdot\|_{\omega})$ ein Banachraum.² Da \mathcal{M} eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von $C^0(I, Y)$, somit ist auch \mathcal{M} ein vollständiger metrischer Raum mit der Norm $\|\cdot\|_{\omega}$.

Mit (16) gilt

$$\frac{1}{\omega(t)} \|F(x_2)(t) - F(x_1)(t)\| \leq \int_{\bar{t}}^t \frac{\omega(s)}{\omega(t)} \varphi(s) \frac{1}{\omega(s)} \|x_2(s) - x_1(s)\| ds \leq \int_{\bar{t}}^t \frac{\omega(s)}{\omega(t)} \varphi(s) ds \|x_2 - x_1\|_{\omega},$$

und mit dem Supremum über alle t erhalten wir

$$\|F(x_2) - F(x_1)\|_{\omega} \leq \kappa \|x_2 - x_1\|_{\omega} \quad \text{mit } \kappa := \sup_{t \in I} \int_{\bar{t}}^t \frac{\omega(s)}{\omega(t)} \varphi(s) ds.$$

Wir betrachten

$$\omega(t) := \exp\left(\lambda \int_{\bar{t}}^t \varphi(s) ds\right), \quad \lambda \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \kappa < 1, \quad ^3$$

und somit ist F eine Kontraktion. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz existiert ein eindeutiger Fixpunkt x in \mathcal{M} , und damit eine schwache Lösung $x \in \mathcal{M}$ von (15). Da $x \in \mathcal{M}$ liegt, gilt $\|x(t) - \bar{x}\| \leq R(t)$ für alle $t \in I$.

¹Denn es gilt:

$$\inf_{t \in I} \frac{1}{\omega(t)} \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_{\omega} \leq \sup_{t \in I} \frac{1}{\omega(t)} \|x\|_{\infty} \quad \text{for all } x \in C^0(I, Y).$$

²Aus Analysis 2 wissen wir, dass $(C^0(I, Y), \|\cdot\|_{\infty})$ ein Banachraum ist.

³Aus Kapitel 1.3 wissen wir, dass ω die eindeutige Lösung des Wachstumsgesetzes

$$\omega'(t) = \lambda \varphi(t) \omega(t), \quad \omega(\bar{t}) = 1$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\|x(t) - \bar{x}\| < R(t)$ für alle $t \in I$ gilt. Wir nehmen an, es gibt ein Intervall $[\bar{t}, t^*]$ mit $\|x(t) - \bar{x}\| \leq R(t)$ und $\|x(t^*) - \bar{x}\| = R(t^*)$. Dann gilt für alle $t \in [\bar{t}, t^*]$

$$\|x(t) - \bar{x}\| = \left\| \int_{\bar{t}}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq \int_{\bar{t}}^t \|f(s, x(s))\| ds \stackrel{1. \text{Bed.}}{\leq} \int_{\bar{t}}^t M(s) ds \stackrel{2. \text{Bed.}}{<} R(t).$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme im Falle $t = t^*$. Wegen $x(\bar{t}) = \bar{x}$ und x stetig gilt für alle $t \in I$ die Ungleichung $\|x(t) - \bar{x}\| < R(t)$. \square

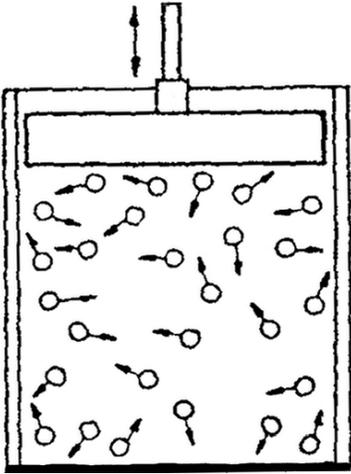
Bemerkung 9. Mit Bemerkung 6 folgt, da f in der Voraussetzung zum Theorem 8 stetig ist (siehe insbesondere Vor. 7), dass die eindeutige Lösung x von DGL (15) stetig differenzierbar ist, d.h. $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. \square

2.2 Bewegung von Massenpunkten

Beispiel 10 (Ideales Gasgesetz).

$$pV = nRT,$$

wobei $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{Kmol}}$ die ideale Gaskonstante, T die Temperatur, p der Druck und V das Volumen ist.



”Modell des idealen Gases:

Im Modell des idealen Gases der klassischen Physik werden alle Gasteilchen als ausdehnungslose Massepunkte angenommen, welche sich frei durch das ihnen zur Verfügung stehende Volumen bewegen können. Mit frei ist gemeint, dass die Teilchen keinerlei Kräfte verspüren. Allerdings dürfen (und müssen) sich die Teilchen untereinander und an der Wand des Volumens stoßen. Ein Gasteilchen bewegt sich also geradlinig mit einer konstanten Geschwindigkeit, bis ein Stoß es in eine andere Richtung lenken und dabei beschleunigen oder abbremsen kann. Die Annahme von Stößen bei ausdehnungslosen Teilchen ist im Grunde paradox, stellt jedoch eine formale Notwendigkeit dar. Ließe man keine Stöße zu, so könnte man das Gas zum einen nicht in ein Volumen einsperren, da es die Wand nicht bemerkte, und zum anderen behielte jedes Gasteilchen für alle Zeiten seine Anfangsgeschwindigkeit. Letzteres würde verhindern, dass sich die Energie des Gases im Mittel gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade verteilen könnte. Ein solches System kann sich aber nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befinden, welches eine zwingende Voraussetzung für Anwendbarkeit der thermodynamischen Hauptsätze ist. Durch die Stöße bewegen sich die Teilchen nur eine kurze Weglänge frei. Damit es zu Stößen kommt, muss ein Stoßquerschnitt angenommen werden.“

[Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Ideales_Gas]

Wir betrachten N Massenpunkte, welche sich nach den **Newtonschen Bewegungsgleichungen** (inklusive der Massenerhaltung (17)) verhalten, das heisst es gilt

$$\frac{d}{dt} m_i(t) = r_i(t), \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt} \left(m_i(t) \dot{\mathbf{x}}_i(t) \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) + f_i(t). \tag{18}$$

ist. Integrieren wir die Differentialgleichung von \bar{t} bis t , so erhalten wir $\omega(t) - \omega(\bar{t}) = \lambda \int_{\bar{t}}^t \varphi(s) \omega(s) ds$. Wir multiplizieren die Identität mit $1/(\lambda \omega(t))$ und bilden das Supremum über I , dann ist

$$\underbrace{\frac{1}{\lambda} \sup_{t \in I} \left(1 - \frac{1}{\omega(t)} \right)}_{< 1} = \sup_{t \in I} \int_{\bar{t}}^t \varphi(s) \frac{\omega(s)}{\omega(t)} ds = \kappa.$$

Falls nun $\lambda \geq 1$, so ist $\kappa < 1$.

Es ist $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ der Ort des i -ten Massenpunktes zum Zeitpunkt t und $m_i(t) \in \mathbb{R}$ dessen Masse. Es sind weiter $g_{ij}, g_{ij}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, mit $g_{ij}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) = -g_{ji}(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t))$ die Wechselwirkungskräfte zwischen den i -ten und j -ten Massenpunkt, f_i alle anderen Kräfte, die auf den i -ten Massenpunkt wirken, und r_i die Massenproduktion (Massenreaktionsrate) des i -ten Massenpunktes.

Gleichung (17) ist die Massenerhaltung. Der Impuls des i -ten Massenpunktes ist $m_i(t)\dot{\mathbf{x}}_i(t)$. Somit repräsentiert Gleichung (18) die Impulserhaltung.

Im Spezialfall $r_i \equiv 0, i=1, \dots, N$ sind die Massen m_i konstant. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen (17)-(18) reduzieren sich zum 2. Newtonschen Gesetz: $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$ (auch *lex secunda* oder *Aktionsprinzip* genannt).

2.3 Das Fadenpendel (ausführlich) – nicht in der Vorlesung

Das Fadenpendel ist eine Zwangsbewegung hervorgerufen durch den (starren) Faden. Deshalb ist die Bewegung des Massenpunktes, wenn \mathbb{R}^2 die Ebene der Bewegung ist, durch

$$\xi(t) \in \mathbb{R}^2, \quad \|\xi(t)\| = l$$

gegeben, wobei l die Länge des Fadens ist. Die Zwangsbedingung zwingt also den Massenpunkt auf den Rand des Kreises $B_l(0)$. Für $\xi \in \partial B_l(0)$ ist $\tau(\xi) = l\xi / \|\xi\|$ ein tangentialer Vektor. Nun ist die Newtonsche Bewegungsgleichung (als ein Grundgesetz der Physik für die Bewegung eines Massenpunktes) mit dieser Zwangsbedingung gleich

$$\langle m\ddot{\xi} - F(\xi), \tau(\xi) \rangle = 0, \quad \|\xi(t)\| = l.$$

Mit der Schwerkraft $F(\xi) = -mge_2$ gilt also

$$\langle m\ddot{\xi}, \tau(\xi) \rangle = \langle -mge_2, \tau(\xi) \rangle.$$

Der Massenpunkt $\xi(t)$ hat die Darstellung

$$\xi = l(\sin\varphi e_1 - \cos\varphi e_2)$$

weshalb nun $\tau(\xi) = \sin\varphi e_1 - \cos\varphi e_2$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= l\dot{\varphi}(\cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2) \\ \ddot{\xi} &= l\dot{\varphi}^2(-\sin\varphi e_1 + \cos\varphi e_2) + l\ddot{\varphi}(\cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2) \end{aligned}$$

Also ist $\langle \ddot{\xi}, \tau(\xi) \rangle = l\ddot{\varphi}$ und $\langle e_2, \tau(\xi) \rangle = \sin\varphi$. Wir erhalten

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi.$$

Mit $x(t) = l\varphi(t)$ erhalten wir

$$\ddot{x} = -g\sin\frac{x}{l}.$$

Daraus ergibt sich für die Linearisierung um $x_0 = 0$ (siehe auch Sinusreihenentwicklung)

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x.$$

3. Linearisierung von Modellen

Wir betrachten auf $I=[\bar{t}, T]$ die Differentialgleichung

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{für alle } t \in I \quad (19)$$

mit einer allgemeinen nichtlinearen Funktion $(t, z) \mapsto f(t, z)$, $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine mathematisch einfach zu behandelnde Unterklasse von Modellen sind lineare Modelle, das heisst in diesem Fall, f erfüllt

$$f(t, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 f(t, z_1) + \alpha_2 f(t, z_2) \quad \text{für alle } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n, t \in I.$$

Oft ist es sinnvoll die nichtlineare Differentialgleichung (das heisst das nichtlineare Modell) durch deren Linearisierung zu approximieren.

Definition 11 (Linearisierung). Es sei ein Intervall $I=[\bar{t}, T]$ und eine Funktion $(t, z) \mapsto f(t, z)$, $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Abbildung f ist stetig differenzierbar in z .

Wenn $x_0 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von

$$x'_0(t) = f(t, x_0(t)) \quad \text{für alle } t \in I, \quad (20)$$

dann bezeichnen wir das Problem

$$y'(t) = \frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t)) y(t) \quad \text{für alle } t \in I \quad (21)$$

als die **Linearisierung der Differentialgleichung (19) um die Lösung x_0** . \square

Hierbei ist

$$\frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t)) := \begin{pmatrix} \partial_{z_1} f_1(t, x_0(t)) & \cdots & \partial_{z_n} f_1(t, x_0(t)) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{z_1} f_n(t, x_0(t)) & \cdots & \partial_{z_n} f_n(t, x_0(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

die Jacobi-Matrix von f nach z im Punkt $(t, x_0(t))$.

Wir betrachten nun Problem (21) mit Anfangswerten, das heisst

$$y'(t) = \frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t)) y(t) \quad \text{für alle } t \in I, \quad y(\bar{t}) = \bar{y}^{(0)}$$

für ein $\bar{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Die exakte Lösung y von Problem (30) ist im Eindimensionalen ($n=1$) einfach berechenbar

$$y(t) = \bar{y}^{(0)} \exp\left(\int_{\bar{t}}^t \frac{\partial}{\partial z} f(s, x_0(s)) ds\right).$$

Im Mehrdimensionalen kennen wir die Lösung auch falls $A := (\partial/\partial z) f(t, x_0(t))$ eine Matrix mit konstanten Koeffizienten ist, das heisst also unabhängig von der Zeit (siehe TA1, im Fall dass A diagonalisierbar). Im Falle für veränderliches $A=A(t)$ liefert uns der Existenzsatz 8 von Picard-Lindelöf die Existenz einer Lösung.

Lemma 12. Sei $I=[\bar{t}, T]$. Es seien $A: I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen und $\bar{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann existiert eine eindeutige Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ des (affin) linearen Problems

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \text{für alle } t \in I, \quad y(\bar{t}) = \bar{y}^{(0)} \quad (22)$$

und es gibt eine Konstante $R_\infty > 0$ mit $\sup_{t \in I} \|y(t)\| \leq R_\infty$.

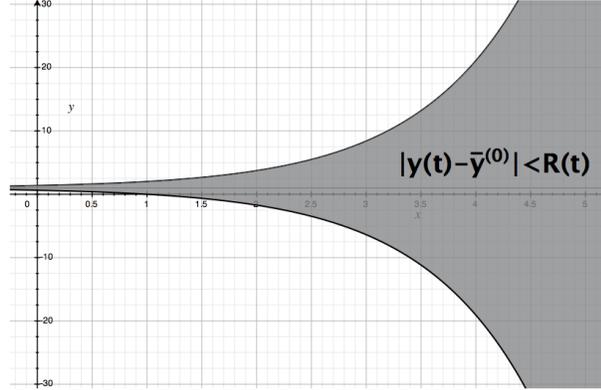
Beweis. Wir wenden das Theorem 8 von Picard-Lindelöf an. Wir wählen

$$R(t) := S \exp(a_\infty(t - \bar{t})) \quad \text{mit} \quad S := 2(T - \bar{t})(a_\infty \|\bar{y}^{(0)}\| + b_\infty) > 0,$$

$$M(t) := a_\infty(R(t) + \|\bar{y}^{(0)}\|) + b_\infty,$$

wobei $a_\infty := \sup_{t \in I} \|A(t)\|$, $b_\infty := \sup_{t \in I} \|b(t)\|$.

Exponentialkegel



Betrachte

$$f(t, z) := A(t)z + b(t).$$

Die Abbildung f erfüllt Voraussetzung 7, denn

$$\|f(t, z_2) - f(t, z_1)\| = \|A(t)(z_2 - z_1)\| \leq \|A(t)\| \|z_2 - z_1\| \leq a_\infty \|z_2 - z_1\|.$$

1. *Beschränktheit:* Es sei $\|z - \bar{y}^{(0)}\| \leq R(t)$, dann $\|z\| \leq R(t) + \|\bar{y}^{(0)}\|$, somit

$$\|f(t, z)\| \leq \|A(t)\| \|z\| + \|b(t)\| \leq a_\infty(R(t) + \|\bar{y}^{(0)}\|) + b_\infty = M(t).$$

2. *Kleinheit:* Es ist

$$\int_{\bar{t}}^t M(s) ds = R(t) - S + (t - \bar{t})(a_\infty \|\bar{y}^{(0)}\| + b_\infty) \leq R(t) - S + \frac{1}{2}S < R(t).$$

Mit dem Satz von Picard-Lindelöf existiert dann eine Lösung des Problems (22) mit $\|y(t) - \bar{y}^{(0)}\| < R(t)$ für $t \in I$. Das heisst $\|y(t)\| \leq R(t) + \|\bar{y}^{(0)}\| \leq R(T) + \|\bar{y}^{(0)}\| =: R_\infty$ für $t \in I$. \square

Spezialfall 13 (Linearisierung um eine stationäre Lösung).

Es sei x_0 eine stationäre Lösung der Differentialgleichung (20)

$$x'_0(t) = f(t, x_0(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Stationäre Lösung bedeutet x_0 hängt nicht von der Zeit t ab. Also gibt es ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0(t) = \tilde{x}$ für alle $t \in I$. Damit gilt

$$f(t, \tilde{x}) = 0 \quad \text{für alle } t \in I = [\bar{t}, T].$$

Es ist

$$y'(t) = \frac{\partial}{\partial z} f(t, \tilde{x}) y(t) \quad \text{für alle } t \in I, \tag{23}$$

die Linearisierung um die Lösung $x_0 = \tilde{x}$ zu $x'(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$. \square

Wir wollen nun untersuchen, wie die Lösung y des linearisierten Problems (21) mit der Lösung x des Ausgangsproblems (19) zusammenhängt. Dazu folgende

Formale Überlegung: Es sei x_0 eine Lösung von $x'_0(t)=f(t,x_0(t))$. Wir nehmen nun an, es seien x_ε auch Lösungen von $x'_\varepsilon(t)=f(t,x_\varepsilon(t))$, die nahe bei x_0 liegen, also

$$x_\varepsilon(t) \rightarrow x_0(t) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{Stetigkeit}).$$

Gilt nun noch weiter

$$\frac{x_\varepsilon(t) - x_0(t)}{\varepsilon} \rightarrow y(t) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{Tangente}),$$

dann ist y Lösung der Linearisierung $y'(t) = (\partial/\partial z)f(t, x_0(t))y(t)$. Denn mit der Taylorreihenentwicklung gilt:

$$\begin{aligned} \underbrace{f(t, x_\varepsilon(t))}_{=x'_\varepsilon(t)} &= \underbrace{f(t, x_0(t))}_{=x'_0(t)} + \frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t)) \underbrace{(x_\varepsilon(t) - x_0(t))}_{\approx \varepsilon y(t)} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

und damit

$$\underbrace{\frac{x'_\varepsilon(t) - x'_0(t)}{\varepsilon}}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} y'(t)} = \frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t)) \underbrace{\frac{x_\varepsilon(t) - x_0(t)}{\varepsilon}}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} y(t)} + \underbrace{\mathcal{O}(1)}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0} \quad \square$$

Wir wollen zuerst ein Beispiel betrachten und danach Satz 15, welcher obige formale Überlegung aufgreift.

Beispiel 14 (Lotka-Volterra-Gleichungen mit beschränkten Ressourcen).

Wir betrachten für $t \in [0, T]$

$$\left. \begin{aligned} x'_B(t) &= x_B(t)(\alpha - \beta x_R(t) - e x_B(t)), & x_B(0) &= \bar{x}_B^{(\varepsilon)} = \tilde{x}_B + \varepsilon \bar{y}_1, \\ x'_R(t) &= -x_R(t)(\gamma - \delta x_B(t)), & x_R(0) &= \bar{x}_R^{(\varepsilon)} = \tilde{x}_R + \varepsilon \bar{y}_2, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, e$ positive Konstanten sind mit $0 < e < (\alpha\delta)/\gamma$.

Es sei hier ε ein beliebiger, reeller Parameter. Zu jedem ε sei $(x_{B,\varepsilon}, x_{R,\varepsilon})$ die eindeutige Lösung zu Problem (24).

• **Biologische Interpretation:**
Räuber-Beute Modell mit beschränkten Ressourcen

Wir möchten ein Modell finden, was die Populationsgröße der Räuber (z.B. Füchse, Wölfe) und der Beute (z.B. Hasen, ..) in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Wir messen für die Populationen

$N_1(t), (N_2(t))$	Anzahl der Beute (Räuber) zu einem Zeitpunkt t
$\alpha_1(U_{11}, U_{12}, \dots),$ $(\alpha_2(U_{21}, U_{22}, \dots))$	Reproduktionsrate der Beute (Räuber) unter dem Einfluß der Umweltfaktoren $U_{11}, U_{12}, \dots, (U_{21}, U_{22}, \dots)$ (z.B. $U_{11}, (U_{21})$ Nahrungsangebot; $U_{12}, (U_{22})$ Klima allgemein, $U_{13}, (U_{23})$ Krankheiten; $U_{14}, (U_{24})$ Fressfeinde; ...)
$\beta_1(U_{11}, U_{12}, \dots),$ $(\beta_2(U_{21}, U_{22}, \dots))$	Sterberate der Beute (Räuber) unter dem Einfluß der Umweltfaktoren $U_{11}, U_{12}, \dots, (U_{21}, U_{22}, \dots)$

Einschränkende Modellannahmen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1(N_1) = \tilde{\alpha}_1(R - N_1) & \text{und} & & \beta_1 &= \beta_1(N_2) = \tilde{\beta}_1 N_2, \\ \alpha_2 &= \alpha_2(N_1) = \tilde{\alpha}_2 N_1 & \text{und} & & \beta_2 &= \tilde{\beta}_2 \text{ sei konstant,} \end{aligned}$$

hierbei ist $R > 0$ eine gegebene Ressource, und $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2$ positive Konstanten. Es gilt

$N_1 < R \Rightarrow \alpha_1 > 0$, d.h. die Reproduktionsrate ist positiv, und N_1 kann sich erhöhen

$N_1 > R \Rightarrow \alpha_1 < 0$, d.h. die Reproduktionsrate ist negativ, und ist damit eigentlich eine Sterberate.

Mit dem Ansatz aus Kapitel 1.3 ergibt sich

$$\begin{aligned} N_1'(t) &= (\alpha_1(U_{11}, U_{12}, \dots) - \beta_1(U_{11}, U_{12}, \dots))N_1(t) = (\tilde{\alpha}_1(R - N_1(t)) - \tilde{\beta}_1 N_2(t))N_1(t), \\ N_2'(t) &= (\alpha_2(U_{21}, U_{22}, \dots) - \beta_2(U_{21}, U_{22}, \dots))N_2(t) = (\tilde{\alpha}_2 N_1(t) - \tilde{\beta}_2)N_2(t). \end{aligned}$$

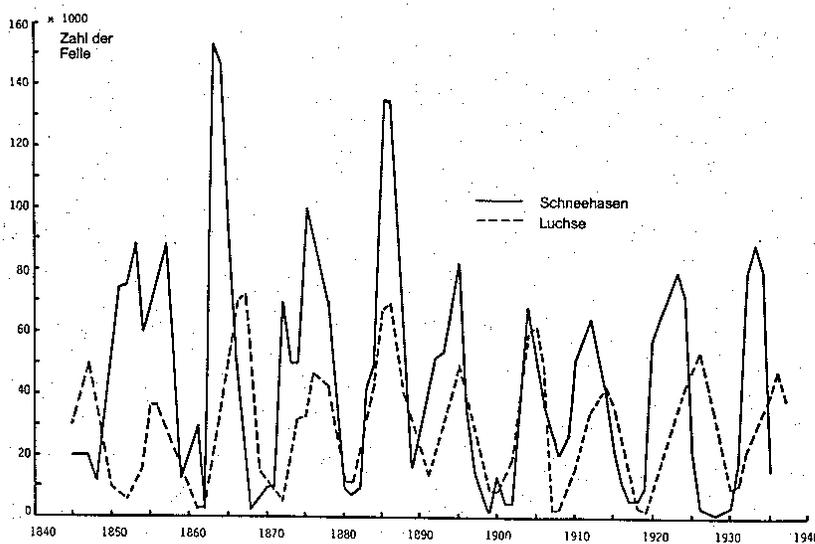


Abbildung 2: Reales Verhalten eines Räuber-Beute Systems. Hudson-Bay-Company über den Eingang von Schneehasen- und Luchsfellen (Aus: Kormondy, E. J., Concepts of Ecology, 2nd Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, 1976)

- Ist das System für die Anwendung brauchbar bzw. "korrekt gestellt"?
Es läßt sich zeigen falls $\bar{y}_1, \bar{y}_2 > 0$, so auch $x_B(t), x_R(t) > 0$ für alle Zeiten t .⁴
- Das System (24) ist nichtlinear. Gibt es eine geeignete Linearisierung, welche den Cha-

⁴Um dies zu zeigen, siehe das Vorgehen HA 1 oder TA 6.

rakter und die Anwendbarkeit für das biologische Beispiel nicht verändern?
Stationäre Lösungen des Systems:

$$\tilde{x}_B = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \tilde{x}_R = \frac{1}{\beta} \left(\alpha - e \frac{\gamma}{\delta} \right). \quad (25)$$

Die Linearisierung des Ausgangsproblems (24) um $(\tilde{x}_B, \tilde{x}_R)$ lautet

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \tilde{x}_R - 2e \tilde{x}_B & -\beta \tilde{x}_B \\ \delta \tilde{x}_R & \delta \tilde{x}_B - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -e \frac{\gamma}{\delta} & -\beta \frac{\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta}{\beta} (\alpha - e \frac{\gamma}{\delta}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}.$$

Das heisst,

$$\left. \begin{aligned} y_1'(t) &= -e \frac{\gamma}{\delta} y_1(t) - \beta \frac{\gamma}{\delta} y_2(t), & y_1(0) &= \bar{y}_1, \\ y_2'(t) &= \frac{\delta}{\beta} (\alpha - e \frac{\gamma}{\delta}) y_1(t), & y_2(0) &= \bar{y}_2. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Hiervon können wir eine explizite Lösung angeben. Durch Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite und umgekehrt erhalten wir jeweils für y_1 und y_2 die Gleichung für die gedämpfte Schwingung (siehe auch Kap. 1.2):

$$\left. \begin{aligned} y_1''(t) + \overbrace{e \frac{\gamma}{\delta}}{=:2D} y_1'(t) + \gamma (\alpha - e \frac{\gamma}{\delta}) y_1(t) &= 0, & y_1(0) &= \bar{y}_1, & y_1'(0) &= -e \frac{\gamma}{\delta} \bar{y}_1 - \beta \frac{\gamma}{\delta} \bar{y}_2 \\ y_2''(t) + e \frac{\gamma}{\delta} y_2'(t) + \gamma (\alpha - e \frac{\gamma}{\delta}) y_2(t) &= 0, & y_2(0) &= \bar{y}_2, & y_2'(0) &= \frac{\delta}{\beta} (\alpha - e \frac{\gamma}{\delta}) \bar{y}_1 \end{aligned} \right\} \quad \overset{=: \Omega^2}{5}$$

mit $2D > 0$ und $\Omega^2 > 0$ nach Voraussetzung. Die explizite Lösung lautet

$$y_i(t) = e^{-Dt} (C_i^1(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \sin(\sqrt{\Omega^2 - D^2} t) + C_i^2(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \cos(\sqrt{\Omega^2 - D^2} t)), \quad i=1,2,$$

wobei C_i^j Konstanten sind, die durch die Anfangswerte \bar{y}_1, \bar{y}_2 eindeutig bestimmt werden. Wir werden in Satz 15 zeigen, dass die Lösung $(x_{B,\varepsilon}, x_{R,\varepsilon})$ des nichtlinearen Problems (24) sich durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_B + \varepsilon y_1(t) \\ \tilde{x}_R + \varepsilon y_2(t) \end{pmatrix}$$

approximieren läßt. □

⁵Wir differenzieren die zweite Gleichung von (26) nach t und setzen die erste Gleichung ein

$$y_2''(t) = \frac{\delta}{\beta} (\alpha - e \frac{\gamma}{\delta}) y_1'(t) = \frac{\delta}{\beta} (\alpha - e \frac{\gamma}{\delta}) (-e \frac{\gamma}{\delta} y_1(t) - \beta \frac{\gamma}{\delta} y_2(t)) = -e \frac{\gamma}{\delta} \cdot \underbrace{\frac{\delta}{\beta} (\alpha - e \frac{\gamma}{\delta}) y_1(t)}_{=: y_2'(t)} - \gamma (\alpha - e \frac{\gamma}{\delta}) y_2(t)$$

nach der 2. Gl. (26)

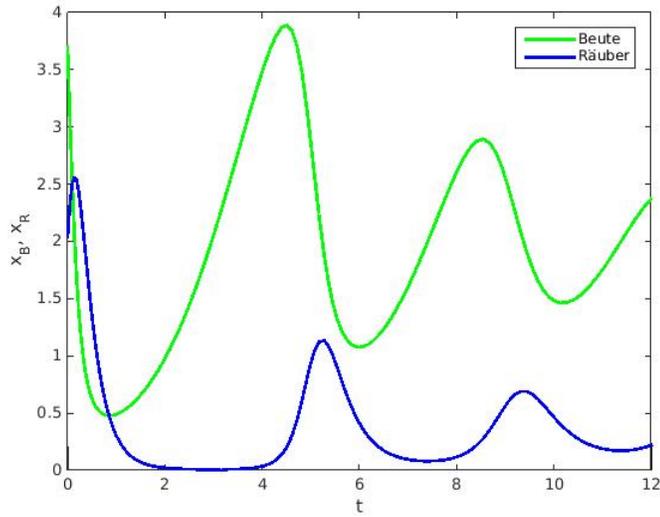


Abbildung 3: Lösungen $(x_{B,\varepsilon}, x_{R,\varepsilon})$ von Problem (24) mit $\bar{y}_1=1, \bar{y}_2=1, \alpha=1, \beta=2, \gamma=4, \delta=2, e=0.16, \varepsilon=1.7$ und (25).

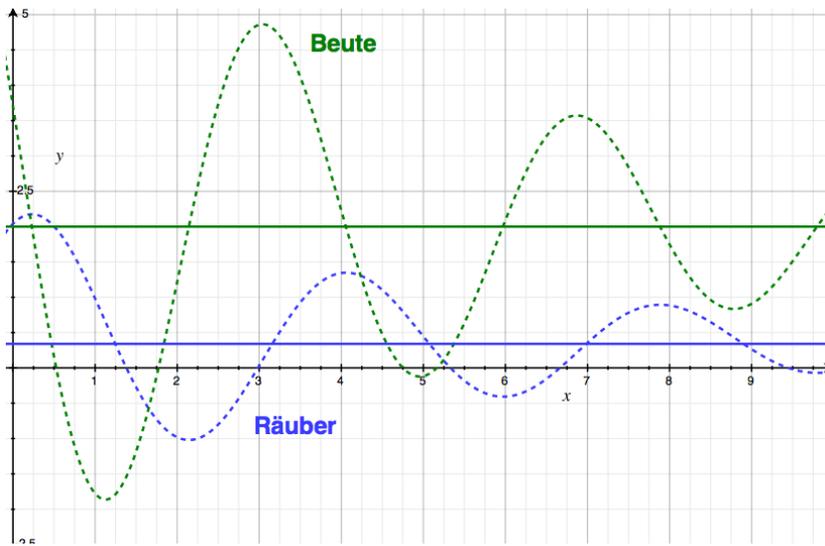


Abbildung 4: Die grüne (gestrichelte) Kurve ist $\tilde{x}_B + 1.7 \cdot y_1$ und die blaue (gestrichelte) Kurve ist $\tilde{x}_R + 1.7 \cdot y_2$. Es wurden hierbei $\bar{y}_1=1, \bar{y}_2=1, \alpha=1, \beta=2, \gamma=4, e=0.16, \delta=2$ gewählt.

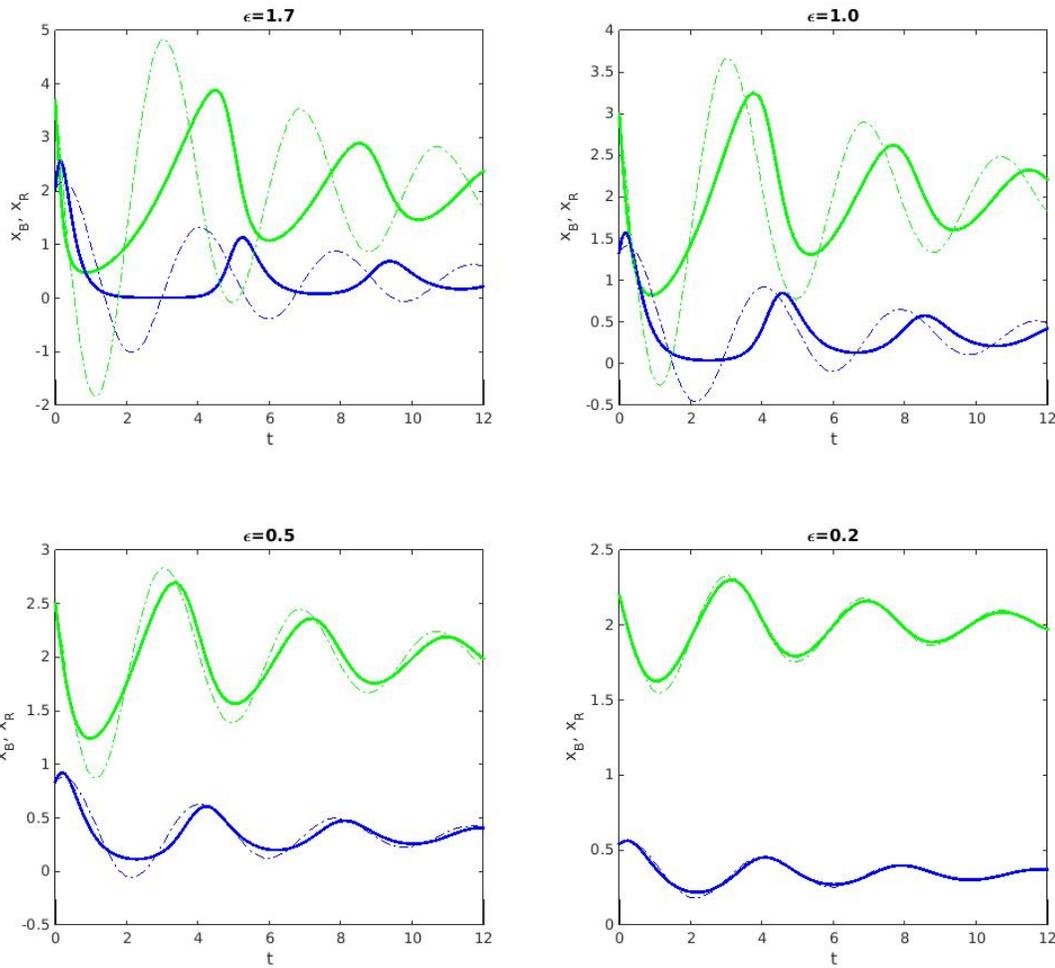


Abbildung 5: Approximation der exakten Lösung $(x_{B,\epsilon}, x_{R,\epsilon})$ von Problem (24) durch $(\tilde{x}_B + \epsilon y_1, \tilde{x}_R + \epsilon y_2)$ für $\epsilon=1.7, 1.0, 0.5$ und 0.2 .

Der folgende Satz beantwortet (unter anderem) die Frage, wie hängt die Lösung y des linearisierten Problems (21) mit der Lösung x des Ausgangsproblems (19) zusammen.

Satz 15. *Es sei ein Intervall $I=[\bar{t}, T]$ und eine Funktion $(t, z, \varepsilon) \mapsto f(t, z, \varepsilon)$, $f: I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Es sei weiter $\bar{x}^{(\varepsilon)} \in \mathbb{R}^n$ für $\varepsilon \neq 0$ (oder $\varepsilon > 0$) gegeben. Es gelten folgende Voraussetzungen:*

1. *Es sei f zweimal stetig differenzierbar in z und ε .*
2. *Es existieren $\bar{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und $\bar{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ mit*

$$\bar{x}^{(\varepsilon)} \rightarrow \bar{x}^{(0)} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{x}^{(\varepsilon)} - \bar{x}^{(0)}}{\varepsilon} \rightarrow \bar{y}^{(0)} \quad \text{für} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (27)$$

Falls ein $x_0 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ existiert, welches Lösung von

$$x_0'(t) = f(t, x_0(t), 0) \quad \text{für alle} \quad t \in I, \quad (28)$$

$$x_0(\bar{t}) = \bar{x}^{(0)} \quad (29)$$

ist, dann existiert ein $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, welches Lösung von

$$y'(t) = \frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t), 0) y(t) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, x_0(t), 0) \quad \text{für alle} \quad t \in I, \quad (30)$$

$$y(\bar{t}) = \bar{y}^{(0)} \quad (31)$$

und es gibt ein $\kappa > 0$, sodass für jedes $\varepsilon \in B_\kappa(0)$ eine eindeutige Lösung $x_\varepsilon \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ von

$$x_\varepsilon'(t) = f(t, x_\varepsilon(t), \varepsilon) \quad \text{für alle} \quad t \in I, \quad (32)$$

$$x_\varepsilon(\bar{t}) = \bar{x}^{(\varepsilon)} \quad (33)$$

existiert und es gilt

$$\sup_{t \in I} \|x_\varepsilon(t) - (x_0(t) + \varepsilon y(t))\| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Bezeichnung: Daher nennen wir $x_0 + \varepsilon y$ eine approximative Lösung zur exakten Lösung x_ε . Außerdem bezeichnen wir die Gleichung (30) als 'verallgemeinerte' Linearisierung der nichtlinearen Gleichung (32) um $(x_0, 0)$.

Bemerkung 16. Wenn wir den Spezialfall $f = f(t, z)$, also f unabhängig von ε betrachten, dann ist Gleichung (28) identisch zu Gleichung (20) und Gleichung (30) identisch zu Gleichung (21), das heisst (30) ist die Linearisierung von (32) um die Lösung von (28) (nach Definition 11). □

Beweis. Es sei x_0 eine Lösung von (28)-(29). Nach Lemma 12 folgt, dass eine Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ von (30)-(31) existiert. Falls x_ε , $\varepsilon \neq 0$ eine Lösung von (32)-(33) ist, dann löst

$$w_\varepsilon(t) := \frac{x_\varepsilon(t) - (x_0(t) + \varepsilon y(t))}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \neq 0,$$

das Anfangswertproblem

$$w_\varepsilon'(t) = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ f(t, x_0(t) + \varepsilon(y(t) + w_\varepsilon(t)), \varepsilon) - f(t, x_0(t), 0) \right.$$

$$-\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t), 0) y(t) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, x_0(t), 0) \right) \Big\} \quad \text{für alle } t \in I,$$

$$w_\varepsilon(\bar{t}) = \frac{\bar{x}(\varepsilon) - (\bar{x}(0) + \varepsilon \bar{y}(0))}{\varepsilon}.$$

Wir definieren nun eine Erweiterung

$$\tilde{f}(t, z, \varepsilon) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\varepsilon} \left(f(t, x_0(t) + \varepsilon y(t) + \varepsilon z, \varepsilon) - f(t, x_0(t), 0) \right) & , \quad \varepsilon \neq 0 \\ - \left(\frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t), 0) y(t) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, x_0(t), 0) \right) & \\ \frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t), 0) z & , \quad \varepsilon = 0 \end{array} \right\}$$

und

$$\bar{w}(\varepsilon) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\bar{x}(\varepsilon) - (\bar{x}(0) + \varepsilon \bar{y}(0))}{\varepsilon} & , \quad \varepsilon \neq 0 \\ 0 & , \quad \varepsilon = 0 \end{array} \right\}.$$

Wir betrachten also für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ das Problem

$$w'(t) = \tilde{f}(t, w(t), \varepsilon) \quad \text{für alle } t \in I, \quad w(\bar{t}) = \bar{w}(\varepsilon). \quad (34)$$

Wir versuchen eine Umgebung $U(0) \subset \overline{B_1(0)}$ um $\varepsilon=0$ zu finden, sodass für jedes $\varepsilon \in U(0)$ eine eindeutige Lösung $w_\varepsilon \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ für das Problem (34) existiert. Falls w_ε eine Lösung von (34), so ist $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon(y(t) + w_\varepsilon)$ eine Lösung von Problem (32)-(33). Darüber hinaus wollen wir zeigen, dass die Lösung w_ε gleichmäßig auf I gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert. Wir wenden dazu das Theorem 8 (Theorem von Picard-Lindelöf) an:

Da $f = (f_i)_{i=1, \dots, n}$ zweimal stetig differenzierbar in z und ε vorausgesetzt ist, so können wir für jedes t die Taylorreihenentwicklung in (z, ε) um $(x_0(t), 0)$ durchführen. Für alle $t \in I$ und für alle ε gilt komponentenweise für jedes $i=1, \dots, n$

$$f_i(t, x_0(t) + \varepsilon y(t) + \varepsilon z, \varepsilon) = f_i(t, x_0(t), 0) + \frac{1}{1!} \overbrace{\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial z} f_i(t, x_0(t), 0), \varepsilon y(t) + \varepsilon z \right\rangle + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f_i(t, x_0(t), 0) \varepsilon \right)}^{= \left\langle \frac{\partial}{\partial (z, \varepsilon)} f_i(t, x_0(t), 0), (\varepsilon y(t) + \varepsilon z) \right\rangle}$$

$$+ \frac{1}{2!} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial (z, \varepsilon)^2} f_i(t, \hat{x}(t), \hat{\varepsilon}) (\varepsilon y(t) + \varepsilon z), (\varepsilon y(t) + \varepsilon z) \right\rangle,$$

wobei $(\hat{x}(t), \hat{\varepsilon}) \in \Gamma := \{(x_0(t) + s\varepsilon(y(t) + z), s\varepsilon) : 0 < s < 1\}$. Für $\varepsilon \neq 0$ gilt somit

$$\tilde{f}(t, z, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t), 0) z + \varepsilon \frac{1}{2} \left(\left\langle \frac{\partial^2}{\partial (z, \varepsilon)^2} f_i(t, \hat{x}(t), \hat{\varepsilon}) (y(t) + z), (y(t) + z) \right\rangle \right)_{i=1, \dots, n}. \quad (35)$$

Aus dieser Darstellung folgt, es gibt positive Konstanten C und M_1, M_2 , sodass für $\|z\| \leq C$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ folgt

$$\|\tilde{f}(t, z, \varepsilon)\| \leq M_1 \|z\| + M_2 |\varepsilon|, \quad (36)$$

wobei

$$M_1 := \sup_{t \in I} \left\| \frac{\partial}{\partial z} f(t, x_0(t), 0) \right\|,$$

$$M_2 := \sup_{t \in I} \sup_{\|z\| \leq C} \left\| \frac{1}{2} \left(\left\langle \frac{\partial^2}{\partial (z, \varepsilon)^2} f_i(t, \hat{x}(t), \hat{\varepsilon}) (y(t) + z), (y(t) + z) \right\rangle \right)_{i=1, \dots, n} \right\|.$$

Wir wählen nun

$$R^{(\varepsilon)}(t) := S^{(\varepsilon)} \exp(M_1(t - \bar{t})) \quad \text{mit} \quad S^{(\varepsilon)} := 2(T - \bar{t})(M_1 \|\bar{w}^{(\varepsilon)}\| + M_2|\varepsilon|) > 0,$$

$$M^{(\varepsilon)}(t) := M_1 \left(R^{(\varepsilon)}(t) + \|\bar{w}^{(\varepsilon)}\| \right) + M_2|\varepsilon|.$$

Da $C > 0$ ist, und $S^{(\varepsilon)} \rightarrow 0$ und $\bar{w}^{(\varepsilon)} \rightarrow 0$ (folgt aus Voraussetzung (27)) für $\varepsilon \rightarrow 0$, existiert ein $\kappa > 0$, sodass für alle $\varepsilon \in B_\kappa(0) \subset \overline{B_1(0)}$ gilt:

$$R^{(\varepsilon)}(t) + \|\bar{w}^{(\varepsilon)}\| \leq C \quad \text{für alle} \quad t \in I. \quad (37)$$

1. Prüfen der Beschränktheit: Es sei jetzt $z \in \mathbb{R}^n$ mit $\|z - \bar{w}^{(\varepsilon)}\| \leq R^{(\varepsilon)}(t)$. Dann gilt nach Ungleichung (37)

$$0 \leq \|z\| \leq R^{(\varepsilon)}(t) + \|\bar{w}^{(\varepsilon)}\| \leq C,$$

und damit gilt für alle $t \in I$ nach Ungleichung (36)

$$\|\tilde{f}(t, z, \varepsilon)\| \leq M_1 \|z\| + M_2|\varepsilon| \leq M_1(R^{(\varepsilon)}(t) + \|\bar{w}^{(\varepsilon)}\|) + M_2|\varepsilon| = M^{(\varepsilon)}(t).$$

2. Prüfen der Kleinheit: Wir betrachten nun für alle $t \in I$

$$\begin{aligned} \int_{\bar{t}}^t M^{(\varepsilon)}(s) ds &= \int_{\bar{t}}^t M_1 R^{(\varepsilon)}(s) ds + (t - \bar{t})(M_1 \|\bar{w}^{(\varepsilon)}\| + M_2|\varepsilon|) \\ &= S^{(\varepsilon)} (\exp(M_1(t - \bar{t})) - \exp(M_1(\bar{t} - \bar{t}))) + (t - \bar{t})(M_1 \|\bar{w}^{(\varepsilon)}\| + M_2|\varepsilon|) \\ &\leq R^{(\varepsilon)}(t) - S^{(\varepsilon)} + (T - \bar{t})(M_1 \|\bar{w}^{(\varepsilon)}\| + M_2|\varepsilon|) \\ &= R^{(\varepsilon)}(t) - \frac{1}{2} S^{(\varepsilon)} < R^{(\varepsilon)}(t). \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen aus Theorem 8 erfüllt. Es existiert eine Lösung w_ε des Problems (34) und damit eine Lösung $x_\varepsilon := x_0 + \varepsilon(y + w_\varepsilon)$, $x_\varepsilon \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ für das Problem (32)-(33). Weiterhin gilt

$$\|w_\varepsilon(t) - \bar{w}^{(\varepsilon)}\| < R^{(\varepsilon)}(t) \leq R^{(\varepsilon)}(T) = S^{(\varepsilon)} \exp(M_1(T - \bar{t})).$$

Es ist mit der Dreiecksungleichung für alle $t \in I$

$$\|w_\varepsilon(t)\| \leq \|w_\varepsilon(t) - \bar{w}^{(\varepsilon)}\| + \|\bar{w}^{(\varepsilon)}\| \leq S^{(\varepsilon)} \exp(M_1(T - \bar{t})) + \|\bar{w}^{(\varepsilon)}\| \rightarrow 0 \quad \text{falls} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

da $S^{(\varepsilon)} \rightarrow 0$ und $\|\bar{w}^{(\varepsilon)}\| \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Somit gilt die gleichmäßige Konvergenz von $w_\varepsilon \rightarrow 0$ auf I für $\varepsilon \rightarrow 0$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon(t) - (x_0(t) + \varepsilon y(t))\| &= \|(x_0(t) + \varepsilon y(t) + \varepsilon w_\varepsilon(t)) - (x_0(t) + \varepsilon y(t))\| = \varepsilon \underbrace{\|w_\varepsilon(t)\|}_{\rightarrow 0 \text{ glm. auf } I} \\ &\hspace{15em} \text{für } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \square \end{aligned}$$

4. Mittelung vom Diskreten zum Kontinuierlichen

Wir betrachten N Massenpunkte, welche sich nach folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen verhalten

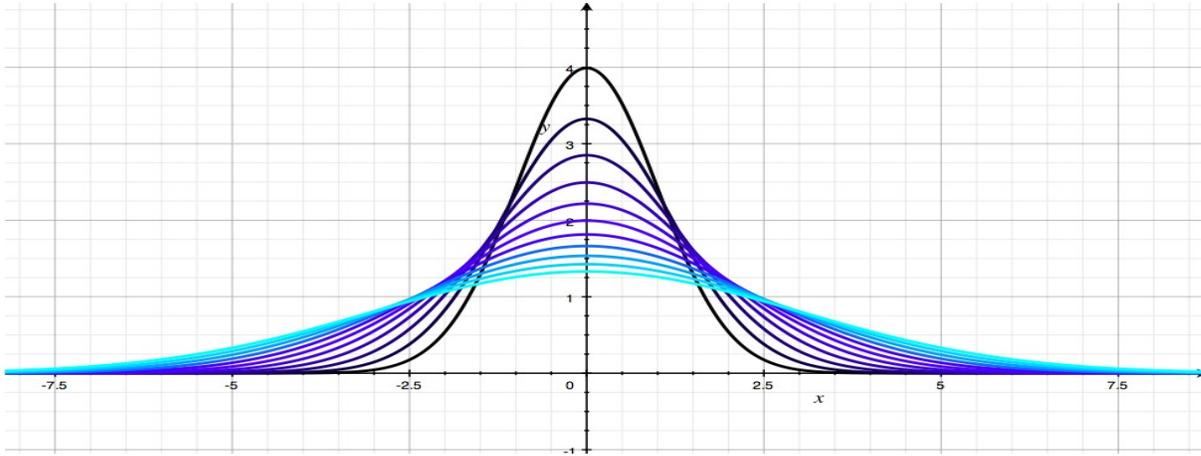
$$\frac{d}{dt}m_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N r_{ij}(t) + r_i(t), \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt} \left(m_i(t) \dot{\mathbf{x}}_i(t) \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) + f_i(t), \quad (39)$$

wobei $r_{ij} = r_{ij}(t)$ die Massenfluß (der Massenaustausch) mit $r_{ij}(t) = -r_{ji}(t)$ ist.

Wir möchten nun den Übergang von den gewöhnlichen Differentialgleichungen (der Punktmechanik) zu den Erhaltungssätzen der Kontinuumsphysik zeigen. Hierzu "mitteln" wir die Massen der N Massenpunkte mit Hilfe einer Kernfunktion, um so eine "gemittelte Massendichte" zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ definiert über den Gesamttraum \mathbb{R}^3 zu erhalten. Als Mittelung verwenden wir die Gaußsche Normalverteilung

$$\psi_s(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}$$



mit geeigneter Standardabweichung $s > 0$. Diese Kernfunktion erfüllt

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi_s(x) dx = 1.$$

Es wären aber auch andere Kernfunktionen ψ denkbar, zum Beispiel eine glatte Funktion mit kompaktem Träger.

Die "gemittelte Massendichte" definieren wir dann durch

$$\varrho_s(t, x) := \sum_{i=1}^N m_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)), \quad \varrho_s(t, x) \geq 0. \quad (40)$$

Entsprechend definieren wir die "gemittelte Impulsdichte"

$$p_s(t, x) := \sum_{i=1}^N m_i(t) \dot{\mathbf{x}}_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)).$$

Falls die gemittelte Masse $\varrho_s(t, x)$ positiv ist, ist die "gemittelte Geschwindigkeit" gegeben durch

$$v_s(t, x) := \frac{p_s(t, x)}{\varrho_s(t, x)} \quad \text{für} \quad \varrho_s(t, x) > 0.$$

Die Gleichungen der Punktmechanik (17)-(18) gehen über in Gleichungen für die gemittelten Größen, und zwar in die Massenerhaltung (41) und die Impulserhaltung (42). Wie lauten nun diese Gleichungen?

Wir definieren die "gemittelte Massenproduktion"

$$r_s(t, x) = \sum_{i=1}^N r_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)).$$

Lemma 17. *Es gilt die Massenerhaltung*

$$\partial_t \varrho_s + \operatorname{div}(p_s + J_s) = r_s \quad \text{für alle } (t, x),$$

wobei

$$J_s(t, x) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N r_{ij}(t) (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \int_0^1 \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i(t) - \tilde{s}\mathbf{x}_j(t)) d\tilde{s}$$

der "gemittelte Massenfluß" ist.

Bemerkung 18. In einem Gebiet in dem $\varrho_s(t, x)$ für alle (t, x) positiv ist, gilt die Massenerhaltung in der folgenden Form

$$\boxed{\partial_t \varrho_s + \operatorname{div}(\varrho_s v_s + J_s) = r_s}. \quad (41)$$

Beweis. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_s(t, x) &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \right) = \sum_i \frac{d}{dt} m_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) + \sum_i m_i(t) \frac{d}{dt} \left(\psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \right) \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} m_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) + \sum_i m_i(t) \left\langle \nabla \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)), -\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}(t) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} r_{ij}(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) + \sum_i r_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) - \sum_i \left\langle m_i(t) \dot{\mathbf{x}}_i(t), \nabla \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} r_{ij}(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) + r_s(t, x) - \operatorname{div} \left(\sum_i m_i(t) \dot{\mathbf{x}}_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \right) \\ &= \sum_{i,j} r_{ij}(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) + r_s(t, x) - \operatorname{div}(p_s(t, x)). \end{aligned}$$

Da $r_{ij} = -r_{ji}$ gilt, formen wir um

$$\sum_{i,j} r_{ij}(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) = \sum_{i < j} r_{ij}(t) (\psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) - \psi_s(x - \mathbf{x}_j(t)))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} r_{ij}(t) (\psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) - \psi_s(x - \mathbf{x}_j(t))) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} r_{ij}(t) \int_0^1 \frac{d}{d\tilde{s}} \left(-\psi_s((1-\tilde{s})(x - \mathbf{x}_i(t)) + \tilde{s}(x - \mathbf{x}_j(t))) \right) d\tilde{s} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} r_{ij}(t) \int_0^1 \left\langle \nabla \psi_s((1-\tilde{s})(x - \mathbf{x}_i(t)) + \tilde{s}(x - \mathbf{x}_j(t))), -(x - \mathbf{x}_i(t)) + (x - \mathbf{x}_j(t)) \right\rangle d\tilde{s} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} r_{ij}(t) \int_0^1 \left\langle \nabla \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i(t) - \tilde{s}\mathbf{x}_j(t)), \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) \right\rangle d\tilde{s} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} r_{ij}(t) \left\langle \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t), \int_0^1 \nabla \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i(t) - \tilde{s}\mathbf{x}_j(t)) d\tilde{s} \right\rangle \\
&= -\operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} r_{ij}(t) (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \int_0^1 \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i(t) - \tilde{s}\mathbf{x}_j(t)) d\tilde{s} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

Die Beziehung (41) ist eine partielle Differentialgleichung für die gemittelten Größen und sagt aus, dass die Gesamtmasse ρ_s erhalten bleibt, falls $r_s \equiv 0$ und $J_s \equiv 0$ ist. (Die Massenerhaltung gilt hierbei auch einzeln für jeden Massenpunkt i .)

Analog zu Masse und Impuls können wir die Kraft f_i mitteln und erhalten eine "gemittelte Kraftdichte"

$$f_s(t, x) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)).$$

Wir kommen zur Impulserhaltung und gehen dazu wie bei der Herleitung von (41) vor.

Lemma 19. *Es gilt die Impulserhaltung*

$$\partial_t p_s + \operatorname{div} \tilde{\Pi}_s = f_s \quad \text{für alle } (t, x),$$

wobei

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_s(t, x) &:= \sum_{i=1}^N m_i(t) \dot{\mathbf{x}}_i(t) \otimes \dot{\mathbf{x}}_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N g_{ij}(t) \otimes (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \int_0^1 \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i(t) - \tilde{s}\mathbf{x}_j(t)) d\tilde{s}
\end{aligned}$$

mit $g_{ij}(t) := g_{ij}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))$.

Es seien $a: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $b: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren. Das Vektorprodukt (Tensorprodukt) $a \otimes b$ ist definiert durch

$$a(t, x) \otimes b(t, x) := a(t, x) b(t, x)^\top = (a_i(t, x) b_j(t, x))_{i,j=1, \dots, n},$$

das heisst $a \otimes b: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Es sei $M: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Es sei $\operatorname{div}(M(t, x))$ die Matrixdivergenz definiert durch

$$\operatorname{div}(M(t, x)) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} M_{jk}(t, x) \right)_{j=1}^n.$$

Bemerkung 20. In einem Gebiet in dem $\varrho_s(t, x)$ für alle (t, x) positiv ist, damit v_s definiert ist, hat $\tilde{\Pi}_s$ die Form

$$\tilde{\Pi}_s = \varrho_s v_s \otimes v_s - \sigma_s.$$

Somit schreibt sich die Impulserhaltung als

$$\boxed{\partial_t(\varrho_s v_s) + \operatorname{div}(\varrho_s v_s \otimes v_s - \sigma_s) = f_s}, \quad (42)$$

wobei der "Spannungstensor" σ_s die Form hat

$$\begin{aligned} \sigma_s(t, x) := & - \sum_{i=1}^N m_i(t) (\dot{\mathbf{x}}_i(t) - v_s(t, x)) \otimes (\dot{\mathbf{x}}_i(t) - v_s(t, x)) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N g_{ij}(t) \otimes (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \int_0^1 \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i(t) - \tilde{s}\mathbf{x}_j(t)) d\tilde{s}. \end{aligned}$$

Man sieht die mittleren inneren Wechselwirkungen bezeichnet man makroskopisch als Spannung.

Es ist klar, dass die Entfernung der einzelnen Punkte klein gegenüber s sein sollte. Gleichzeitig lässt man s gegen Null konvergieren. Wenn man auf diese Art und Weise einen kontinuierlichen Limes erhalten will, sollte der essentielle Träger der Kernfunktion genügend viele Massenpunkte enthalten. Mathematisch nennt man einen solchen Limes hydrodynamischen Grenzübergang. \square

Beweis. Wir bilden die Zeitableitung der gemittelten Impulsdichte p_s

$$\partial_t p_s(t, x) = \sum_i \frac{d}{dt} p_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) + \sum_i p_i(t) \left\langle \nabla \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)), -\frac{d\mathbf{x}_i}{dt}(t) \right\rangle,$$

wobei $p_i(t) := m_i(t) \dot{\mathbf{x}}_i(t)$, und mit den Bewegungsgleichungen gilt für den ersten Term

$$\sum_i \frac{d}{dt} p_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) = \sum_{i,j} g_{ij}(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) + \sum_i f_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)). \quad (43)$$

Da $g_{ij}(t) = -g_{ji}(t)$ gilt, formen wir um

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} g_{ij}(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(t) (\psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) - \psi_s(x - \mathbf{x}_j(t))) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(t) \int_0^1 \left\langle \nabla \psi_s((1-\tilde{s})(x - \mathbf{x}_i(t)) + \tilde{s}(x - \mathbf{x}_j(t))), -(x - \mathbf{x}_i(t)) + (x - \mathbf{x}_j(t)) \right\rangle d\tilde{s} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(t) \int_0^1 \left\langle \nabla \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i(t) - \tilde{s}\mathbf{x}_j(t)), \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t) \right\rangle d\tilde{s} \\ &= -\operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(t) \otimes (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \int_0^1 \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i(t) - \tilde{s}\mathbf{x}_j(t)) d\tilde{s} \right), \end{aligned}$$

denn

$$a(t, x) \langle c(t, x), b(t, x) \rangle = a(t, x) \langle b(t, x), c(t, x) \rangle = a(t, x) (b(t, x))^T c(t, x)$$

$$=(a(t,x)b(t,x)^T)c(t,x)=(a(t,x)\otimes b(t,x))c(t,x).$$

Weiter gilt für den zweiten Term

$$-\sum_i p_i(t)\left\langle \nabla\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t)), \frac{d\mathbf{x}_i}{dt}(t) \right\rangle = -\operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^N m_i(t)\dot{\mathbf{x}}_i(t)\otimes\dot{\mathbf{x}}_i(t)\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t))\right).$$

Beweis der Bemerkung: – nicht in der Vorlesung

Es ist

$$\begin{aligned} \rho_s(t,x)v_s(t,x)\otimes v_s(t,x) &= p_s(t,x)\otimes v_s(t,x) = \sum_i m_i(t)\dot{\mathbf{x}}_i(t)\otimes v_s(t,x)\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t)) \\ &\stackrel{\text{oder}}{=} v_s(t,x)\otimes p_s(t,x) = \sum_i m_i(t)v_s(t,x)\otimes\dot{\mathbf{x}}_i(t)\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t)) \\ &\stackrel{\text{oder}}{=} \sum_i m_i(t)v_s(t,x)\otimes v_s(t,x)\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t)). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N m_i(t)(\dot{\mathbf{x}}_i(t)-v_s(t,x))\otimes(\dot{\mathbf{x}}_i(t)-v_s(t,x))\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i(t)\dot{\mathbf{x}}_i(t)\otimes\dot{\mathbf{x}}_i(t)\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t)) - \sum_{i=1}^N m_i(t)\dot{\mathbf{x}}_i(t)\otimes v_s(t,x)\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N m_i(t)v_s(t,x)\otimes\dot{\mathbf{x}}_i(t)\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{i=1}^N m_i(t)v_s(t,x)\otimes v_s(t,x)\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N m_i(t)\dot{\mathbf{x}}_i(t)\otimes\dot{\mathbf{x}}_i(t)\psi_s(x-\mathbf{x}_i(t))\right) - \rho_s(t,x)v_s(t,x)\otimes v_s(t,x). \quad \square \end{aligned}$$

5. Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik

In der Kontinuumsmechanik sind alle relevanten physikalischen Größen auf einem Kontinuum erklärt. Das Hauptpostulat der Kontinuumsphysik ist die Erhaltungsgleichung.

Definition 21 (Erhaltungssatz). Wir bezeichnen die folgende Differentialgleichung als *Erhaltungsgleichung*

$$\partial_t u(t,x) + \operatorname{div} q(t,x) = r(t,x) \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (44)$$

wobei $u: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Dichte einer physikalischen Größe, $q: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ der zur physikalischen Größe u gehörige physikalische Fluss und $r: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Reaktionsrate ist. Alle Größen sind im Euklidischen Raum $\mathbb{R}_+ \times \Omega \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ gegeben mit Ω offene Menge. (Betrachte insbesondere mit $n=3$ den *physikalischen Raum*.) \square

Wir definieren, was eine schwache Lösung von (44) sein soll:

Definition 22. Das Tripel (u,q,r) mit $u,r \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$, $q \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ heisst *schwache Lösung* der Differentialgleichung (44), wenn

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} (u\partial_t\varphi + \langle q, \nabla\varphi \rangle + r\varphi) d(t,x) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega). \quad (45)$$

Satz 23. Es seien u , q und r glatte Funktionen. Dann gilt die Äquivalenz zwischen (44) und (45).

Beweis. Wir multiplizieren (44) mit einer Funktion $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ und integrieren über $\mathbb{R}_+ \times \Omega$

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} (\partial_t u + \operatorname{div} q) \varphi d(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} r \varphi d(t, x).$$

Es gilt die Produktregel

$$\operatorname{div}(q)\varphi = \operatorname{div}(q\varphi) - \langle q, \nabla \varphi \rangle.$$

Wir integrieren über $\mathbb{R}_+ \times \Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \operatorname{div}(q)\varphi d(t, x) &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \operatorname{div}(q\varphi) d(t, x)}_{=0, \text{ da } q\varphi \text{ einen kompakten Träger hat}} - \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \langle q, \nabla \varphi \rangle d(t, x) \end{aligned}$$

(mit Hilfe des Gauß'schen Satzes (siehe Vektoranalysis))⁶. Es ist weiter

$$\partial_t u \varphi = \partial_t(u\varphi) - u\partial_t \varphi$$

und mit derselben Argumentation wie eben gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \partial_t u \varphi d(t, x) &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \partial_t(u\varphi) d(t, x)}_{=0, \text{ da } u\varphi \text{ einen kompakten Träger hat}} - \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} u \partial_t \varphi d(t, x) \end{aligned}$$

Daraus folgt (45).

Umgekehrt es gelte (45), dann gilt mit der partiellen Integration (wie bei der Hinrichtung)

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} (\partial_t u + \operatorname{div} q - r) \varphi d(t, x) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega).$$

Damit gilt insbesondere für hinreichend kleine $d > 0$ mit $B_d((t_0, x_0)) \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$

$$\int_{B_d((t_0, x_0))} (\partial_t u + \operatorname{div} q - r) d(t, x) = 0.$$

Da gilt

$$\lim_{d \downarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_d((t_0, x_0)))} \int_{B_d((t_0, x_0))} (\partial_t u + \operatorname{div} q - r) d(t, x) = \partial_t u(t_0, x_0) + \operatorname{div} q(t_0, x_0) - r(t_0, x_0)$$

(siehe Vektoranalysis), folgt die Behauptung. □

⁶ Es gilt mit dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \operatorname{div}(q\varphi)(t, x) d(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\Omega} \operatorname{div}(q(t, x)\varphi(t, x)) dx \right) dt,$$

mit dem Satz von Gauß

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\partial\Omega} \varphi(t, y) \langle q(t, y), \vec{n}_{\partial\Omega}(y) \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right) dt = 0,$$

da $\varphi(t, y) = 0$ für $y \in \partial\Omega$, so auch $(q\varphi)(t, y) = 0$ für $y \in \partial\Omega$.

Es sei darauf hingewiesen, dass der schwache Lösungsbegriff für gewöhnliche DGL (ohne den Anfangswert), aus Definition 3, äquivalent zum obigen Lösungsbegriff, Definition 22, ist.

Notation: Die Differentialoperatoren div , ∇ , Δ beziehen sich nur auf die x -Veränderliche und nicht auf die (t, x) -Veränderliche einer gegebenen Funktion, das heisst wir betrachten $\operatorname{div}(q(t, x)) = \operatorname{div}_x(q(t, x)) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} q_i(t, x)$ und so weiter.

Physikalische Interpretation:

Lemma 24. *Es seien u , q und r glatte Funktionen. Dann ist Gleichung (44) äquivalent zu*

$$\frac{d}{dt} \int_V u(t, x) dx + \int_{\partial V} \langle q(t, y), \vec{n}(y) \rangle d\mathcal{H}^2(y) = \int_V r(t, x) dx \quad \text{für alle } V, \quad (46)$$

wobei V C^1 -Gebiet mit $\bar{V} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ und \vec{n} äußere Normale.

Beweis. Es gelte (44). Es gilt für alle **Testvolumina** V mit $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, V C^1 -Gebiet

$$\int_V \partial_t u(t, x) dx + \int_V \operatorname{div}(q(t, x)) dx = \int_V r(t, x) dx.$$

Unter Benutzung des Gaußschen Satzes (siehe Vektoranalysis) erhalten wir für das Volumen V

$$\int_V \operatorname{div}(q(t, x)) dx = \int_{\partial V} \langle q(t, y), \vec{n}(y) \rangle d\mathcal{H}^2(y).$$

Damit folgt Identität (46). Die Äquivalenz folgt nun aus folgender Betrachtung: Damit gilt insbesondere für hinreichend kleine $d > 0$ mit $B_d(x_0) \subset \Omega$

$$\int_{B_d(x_0)} (\partial_t u(t, x) + \operatorname{div} q(t, x) - r(t, x)) dx = 0.$$

Da gilt

$$\lim_{d \downarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B_d(x_0))} \int_{B_d(x_0)} (\partial_t u(t, x) + \operatorname{div} q(t, x) - r(t, x)) dx = \partial_t u(t, x_0) + \operatorname{div} q(t, x_0) - r(t, x_0)$$

(siehe Vektoranalysis), folgt die Behauptung. □

Der Erhaltungssatz besagt also

Die zeitliche Änderung einer gegebenen physikalischen Größe u in einem Gebiet V	+	die durch den Fluß q über den Rand ∂V des Gebietes V zu- oder abgeführten Anteile der physikalischen Größe u	=	die im Gebiet V durch die Reaktionsrate r erzeugten oder vernichteten Anteile der physikalischen Größe u .
---	---	--	---	--

Resümee: Wir betrachten immer die starke Formulierung. Wenn die Funktionen Sprünge haben, gehen wir zur schwachen Formulierung über.

Wir geben nun die allgemeine Definition der Massen- und Impulserhaltung.

Massenerhaltung:

Wir nehmen an es existiere eine Massendichte ρ , welche in einem Geschwindigkeitsfeld v transportiert wird. Der zur Massendichte gehörige Flussvektor q_ρ enthält den Anteil der Massendichte ρ , welcher mit dem Geschwindigkeitsfeld v über den Rand eines Volumens V transportiert wird. Das heisst, es ist

$$q_\rho = \rho v + J, \quad (47)$$

wobei J weitere Flussvektoren darstellen. Dies kann zum Beispiel die Diffusion sein. Eingesetzt in die Erhaltungsgleichung (44) bekommen wir

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v + J) = r.$$

Gehen wir nun davon aus, dass keine Masse ρ im Testvolumen V produziert wird, das heisst $r_\rho = 0$ und dass es keinen weiteren Massenfluss über den Rand von V gibt, das heisst $J = 0$, dann folgt die Massenerhaltung

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

Diese Gleichung wird auch (differentielle) Kontinuitätsgleichung genannt.

Das der Flussvektor q_ρ auch nur die in (47) angegebene Form haben kann, folgt aus der Beobachterunabhängigkeit. Die Beobachterunabhängigkeit ist ein grundlegendes physikalisches Prinzip.

Massen- und Impulserhaltung:

Wir setzen die Kontinuitätsgleichung voraus, das heisst es ist

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (48)$$

Die Impulsdichte ist definiert durch $\rho v: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Zu jedem $i \in \{1, 2, 3\}$ gibt es einen Impulsfluß $q_{v,i}$ und eine Reaktionsrate $r_{v,i}$. Der Impulsfluss ist gegeben durch

$$q_{v,i} = \rho v_i v - \sigma_i.$$

Der erste Summand ist ein Transportterm, welcher angibt wieviel Impulsdichte ρv_i im Geschwindigkeitsfeld v über den Rand eines Testvolumens V transportiert wird. Der zweite Summand ist eine flächenbezogene Kraftdichte $\sigma_i: \mathbb{R}_+ \times \partial V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Reaktionsrate $r_{v,i}$ ist gegeben durch

$$r_{v,i} = f_i,$$

wobei $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine massenbezogene Kraftdichte darstellt. Eingesetzt in die Erhaltungsgleichung (44) ergibt

$$\partial_t(\rho v_j) + \operatorname{div}(\rho v_j v - \sigma_j) = f_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \quad (49)$$

Sei

$$\sigma = (\sigma_{jk})_{j,k=1,\dots,n}, \quad \sigma_j = (\sigma_{jk})_{k=1,\dots,n}.$$

Der Term σ ist der Spannungstensor. Er beschreibt die inneren Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen aus denen das Medium aufgebaut ist. Der Spannungstensor kann den Druck und die Viskosität enthalten. Im Unterschied dazu ist die massenbezogene Kraftdichte f , welche auch eine äußere Kraft enthalten kann, zum Beispiel die Coriolis-Kraft und auch die Gravitation.

Es sei $M: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Es sei $\operatorname{div} M(t, x)$ die Matrixdivergenz, definiert durch

$$\operatorname{div} M(t, x) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} M_{jk}(t, x) \right)_{j=1}^n.$$

Es seien $a: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $b: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren. Das Vektorprodukt $a \otimes b$ ist definiert durch

$$a(t, x) \otimes b(t, x) := a(t, x) b(t, x)^T = (a_i(t, x) b_j(t, x))_{i, j=1, \dots, n}.$$

Damit schreiben wir Gleichung (49) in Matrixscheibweise um und zusammen mit Gleichung (48) betrachten wir folgendes System

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) &= 0 \\ \partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v \otimes v - \sigma) &= f \end{aligned}}. \quad (50)$$

Lemma 25. *Es gelte die Massenerhaltung (48). Die Impulserhaltung (49) ist äquivalent zu*

$$\varrho(\partial_t v + (v \cdot \nabla) v) - \operatorname{div} \sigma = f.$$

Beweis. Die Kontinuitätsgleichung (48) eingesetzt in die Impulserhaltung (49) ergibt

$$-\operatorname{div}(\varrho v) v_j + \varrho \partial_t v_j + \operatorname{div}(\varrho v_j v) - \operatorname{div} \sigma_j = f_j.$$

Da $\operatorname{div}(\varrho v_j v) = \operatorname{div}(\varrho v) v_j + \langle \varrho v, \nabla v_j \rangle$ gilt, ergibt sich somit

$$\varrho \partial_t v_j + \langle \varrho v, \nabla v_j \rangle - \operatorname{div} \sigma_j = f_j.$$

Obige Überlegung funktioniert auch umgekehrt. □

6. Diffusion

Zur Einführung betrachten wir folgendes Beispiel:

Es seien unendlich viele Glasröhren mit einer Flüssigkeit, welche sich jeweils am Ortspunkt $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}$ befinden. Die Punkte \mathbf{x}_i , $i \in \mathbb{Z}$ sind fest, d.h. unabhängig von der Zeit t , und o.B.d.A. es wird $\mathbf{x}_i < \mathbf{x}_{i+1}$, $\forall i$ angenommen. Es sei m_i die Masse in der Glasröhre im Punkt \mathbf{x}_i und es gelte für jedes i die *Massenerhaltung*, das heisst

$$m_i'(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} r_{ij}(t),$$

wobei

$$r_{ij}(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } |j - i| \geq 2 \text{ oder } i = j; \\ c_h(m_j(t) - m_i(t)) & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit c_h einer von h abhängigen Konstanten. Das bedeutet der Massenaustausch von einer Glasröhre findet nur mit seinen jeweiligen direkten Nachbarn statt. Die Differentialgleichung lässt sich nun auch schreiben zu

$$m_i'(t) = r_{i, i-1}(t) + r_{i, i+1}(t)$$

Es gilt $r_{ij}(t) = -r_{ji}(t)$, denn im Fall $|j-i| \geq 2$ oder $i=j$ ist dies trivial, und sonst gilt nach Definition $r_{i,i+1}(t) = -r_{i+1,i}(t)$ und $r_{i,i-1}(t) = -r_{i-1,i}(t)$ für alle i .

Wir betrachten nun N aufeinanderfolgende Röhren und definieren die gemittelte Massendichte durch

$$\varrho_s(t, x) = \sum_{i=1}^N m_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i).$$

Nach Kapitel 4, Lemma 17, gilt somit die Massenerhaltung

$$\partial_t \varrho_s + \operatorname{div}(J_s) = 0 \quad \text{für alle } (t, x),$$

(denn $p_s \equiv 0$, da $\dot{\mathbf{x}}_i \equiv 0$ und $r_s \equiv 0$), wobei sich der gemittelte Massenfluss darstellen läßt durch

$$\begin{aligned} J_s(t, x) &:= \dots + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N r_{ij}(t) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \int_0^1 \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i - \tilde{s}\mathbf{x}_j) d\tilde{s} + \dots \\ &= \dots + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N r_{i,i-1}(t) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) \int_0^1 \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i - \tilde{s}\mathbf{x}_{i-1}) d\tilde{s} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N r_{i,i+1}(t) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}) \int_0^1 \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i - \tilde{s}\mathbf{x}_{i+1}) d\tilde{s} + \dots \\ &= \dots + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N r_{i,i-1}(t) \int_{\mathbf{x}_{i-1}}^{\mathbf{x}_i} \psi_s(x-y) dy - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N r_{i,i+1}(t) \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \psi_s(x-y) dy + \dots \\ &= \dots + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_h (m_{i-1}(t) - m_i(t)) \int_{\mathbf{x}_{i-1}}^{\mathbf{x}_i} \psi_s(x-y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_h (m_i(t) - m_{i+1}(t)) \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \psi_s(x-y) dy + \dots \\ &= \dots + \sum_{i=1}^N c_h (m_{i-1}(t) - m_i(t)) \int_{\mathbf{x}_{i-1}}^{\mathbf{x}_i} \psi_s(x-y) dy + \dots \\ &= \dots - c_h \sum_{i=1}^N m_i(t) \left(\int_{\mathbf{x}_{i-1}}^{\mathbf{x}_i} \psi_s(x-y) dy - \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \psi_s(x-y) dy \right) + \dots \\ &= \dots - c_h \sum_{i=1}^N m_i(t) \left(\int_0^h \underbrace{\psi_s(x - \mathbf{x}_{i-1} - \tilde{h}) - \psi_s(x - \mathbf{x}_i - \tilde{h})}_{= \int_0^h \partial_x \psi_s(x - \mathbf{x}_i + h - \tilde{h} - z) dz} d\tilde{h} \right) + \dots \\ &\quad = \dots - c_h \sum_{i=1}^N m_i(t) \underbrace{\int_0^h \varrho_s(t, x + h - \tilde{h} - z) dz}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \varrho_s(t, x)} \\ &= \dots - \underbrace{c_h \int_0^h \frac{d}{dx}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} D} \left(\underbrace{\int_0^h \sum_{i=1}^N m_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i + h - \tilde{h} - z)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \varrho_s(t, x)} \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\text{Diffusionsgleichung} \quad \partial_t \varrho - \operatorname{div}(D \nabla \varrho) = 0}$$

Das heißt wir betrachten nun allgemein eine physikalische Variable u und einen dazugehörigen Fluß von der Gestalt $q_u := -a(u, \nabla u)$. Damit betrachten wir Erhaltungsgleichungen von der Form

$$\partial_t u - \operatorname{div}(a(u, \nabla u)) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n. \quad (51)$$

Definition 26 (Skalierbarkeitseigenschaft).

Wir bezeichnen die Funktion $a: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(w, p) \mapsto a(w, p)$ als **skalierbar** mit den Konstanten $k > 0$ und $l > 0$, falls gilt

$$a(\sigma w, \sigma \tau p) = \sigma^k \tau^l a(w, p) \quad \text{für alle } \sigma > 0, \tau > 0, w \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n.$$

Selbstähnliche Lösung

Wir suchen Lösungen $(t, x) \mapsto u(t, x)$, so dass $u(t, \cdot)$ für alle t "dieselbe Gestalt" hat, d.h. es gibt Funktionen $t \mapsto s(t)$ und $t \mapsto r(t) > 0$ mit

$$u(t, x) = s(t) \tilde{u}(r(t)x), \quad (52)$$

wobei $y \mapsto \tilde{u}(y)$. Eine Lösung in der Form (52) nennen wir selbstähnliche Lösung.

Satz 27. Es sei für eine $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $\tilde{u}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine schwache Lösung von

$$\operatorname{div}_y (a(\tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}) + \lambda \tilde{u} y) = 0, \quad (53)$$

mit $M := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(y) dy > 0$ existiert und $\lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} \tilde{u}(y) = 0$ (d.h. \tilde{u} hat ein Abklingverhalten im Unendlichen). Dann ist

$$u(t, x) = s(t) \tilde{u}(r(t)x),$$

eine schwache Lösung der Differentialgleichung (51), falls gilt

1. (Skalierbarkeit) Die Funktion a ist skalierbar mit Konstanten $k > 0$ und $l > 0$.

2. Die Funktionen s und r sind gegeben durch

$$\begin{aligned} r(t) &= c_0 t^{-\frac{1}{\alpha}}, & s(t) &= c_1 r(t)^n, \\ \alpha &= n(k-1) + l + 1, & \lambda \alpha c_0^\alpha c_1^{k-1} &= 1, \quad c_0, c_1 \text{ Konstanten.} \end{aligned}$$

Beweis. Wir betrachten o.B.d.A. Testfunktionen $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ von der Gestalt

$$\varphi(t, x) = r(t)^n \tilde{\varphi}(t, y) \quad \text{für } y = r(t)x,$$

wobei $t \mapsto r(t) > 0$ und $\tilde{\varphi} \in C_0^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Es gilt mit $y = r(t)x$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= s(t) \tilde{u}(y), & \nabla_x u(t, x) &= r(t) s(t) \nabla_y \tilde{u}(y), \\ a(u(t, x), \nabla_x u(t, x)) &= s(t)^k r(t)^l a(\tilde{u}(y), \nabla_y \tilde{u}(y)) \quad (\text{nach Vorauss. 1.}), \\ \varphi(t, x) &= r(t)^n \tilde{\varphi}(t, y), & \nabla_y \varphi(t, x) &= r(t)^{n+1} \nabla_y \tilde{\varphi}(t, y), \\ \partial_t \varphi(t, x) &= r(t)^{n-1} (nr'(t) \tilde{\varphi}(t, y) + r(t) \partial_t \tilde{\varphi}(t, y) + r'(t) \langle y, \nabla_y \tilde{\varphi}(t, y) \rangle), \end{aligned}$$

und daher (da $dy/dx = r(t)^n$)

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t \varphi u - \langle \nabla_x \varphi, a(u, \nabla_x u) \rangle) dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ r^{n-1} (nr' \tilde{\varphi} + r \partial_t \tilde{\varphi} + \langle \nabla_y \tilde{\varphi}, y \rangle r') s \tilde{u} - \langle r^{n+1} \nabla_y \tilde{\varphi}, s^k r^l a(\tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}) \rangle \right\} dx dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{s}{r} (nr' \tilde{\varphi} + r \partial_t \tilde{\varphi} + \langle \nabla_y \tilde{\varphi}, y \rangle r') \tilde{u} - r^{l+1} s^k \langle \nabla_y \tilde{\varphi}, a(\tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}) \rangle \right\} dy dt \quad \text{Koord.transf.} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \left(\frac{sn}{r} r' - s' \right) \tilde{\varphi} \tilde{u} + \left\langle \frac{s}{r} r' y \tilde{u} - r^{l+1} s^k a(\tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}), \nabla_y \tilde{\varphi} \right\rangle \right\} dy dt.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt partiell nach t integriert. Da mit Voraussetzung 2. gilt

$$s(t) = c_1 r(t)^n \quad \implies \quad \frac{sn}{r} r' - s' = 0,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \frac{s}{r} r' y \tilde{u} - r^{l+1} s^k a(\tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}), \nabla_y \tilde{\varphi} \right\rangle dy dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle c_1 c_0^{n-1} t^{-\frac{n-1}{\alpha}} c_0 \left(-\frac{1}{\alpha} \right) t^{-\frac{1}{\alpha}-1} y \tilde{u} + c_1^k c_0^{l+1} c_0^{kn} (t^{-\frac{1}{\alpha}})^{l+1+kn} a(\tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}), \nabla_y \tilde{\varphi} \right\rangle dy dt \\
&= - \int_{\mathbb{R}_+} c_1^k c_0^{kn} t^{-\frac{n+\alpha}{\alpha}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \frac{1}{c_1^{k-1} c_0^\alpha \alpha} y \tilde{u} + a(\tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}), \nabla_y \tilde{\varphi} \right\rangle dy}_{=0} dt = 0,
\end{aligned}$$

da für alle t die Funktionen $\tilde{\varphi}(t, \cdot) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ und für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion \tilde{u} schwache Lösung von (53) ist, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \lambda y \tilde{u} + a(\tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}), \nabla_y \zeta \right\rangle dy = 0 \quad \text{für alle } \zeta \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$$

Nach Definition 22 ist u schwache Lösung von (51). □

Als Flussterm wählen wir nun

$$a(u, \nabla u) = d(u) \nabla u$$

mit

$$d(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } m=1 \\ mu^{m-1} & \text{für } m>1 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Beispiel: Wir betrachten den Fall $m=1$, d.h. Gleichung (51) reduziert sich zur Diffusionsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0.$$

Wir wollen nun mit Hilfe des Satzes 27 eine schwache Lösung u herleiten. Für $m=1$ erfüllt a die Skalierbarkeitseigenschaft mit $k=1$ und $l=1$, denn

$$a(\sigma w, \sigma \tau p) = \sigma \tau p = \sigma \tau a(w, p) \quad \forall \sigma > 0, \tau > 0, w \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n.$$

Wir suchen nun eine schwache Lösung \tilde{u} von (53), d.h.

$$\operatorname{div}_y (\nabla_y \tilde{u} + \lambda \tilde{u} y) = 0.$$

Dies ist erfüllt, falls $\nabla_y \tilde{u} + \lambda \tilde{u} y = 0$ gilt. Wir können \tilde{u} durch die *Separation der Variablen* bestimmen. Es ist

$$\frac{\nabla_y \tilde{u}}{\tilde{u}} = -\lambda y \quad \implies \quad \nabla_y (\ln |\tilde{u}|) = -\lambda \nabla_y \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \quad \implies \quad \ln |\tilde{u}| = -\lambda \frac{1}{2} y^2 + C. \quad 7$$

Damit ist

$$\tilde{u}(y) = \tilde{C} \exp\left(-\lambda \frac{1}{2} y^2\right).$$

Weiter ist

$$r(t) = c_0 t^{-\frac{1}{2}}, \quad s(t) = c_1 c_0^n t^{-\frac{n}{2}}, \quad \lambda 2c_0^2 = 1.$$

Damit ergibt sich als schwache Lösung

$$u(t, x) = s(t) \tilde{u}(r(t)x) = c_1 c_0^n t^{-\frac{n}{2}} \tilde{C} \exp\left(-\frac{1}{2c_0^2} \frac{1}{2} \left|c_0 t^{-\frac{1}{2}} x\right|^2\right)$$

Damit ergibt sich

$$u(t, x) = \hat{C} \frac{1}{\sqrt{t}^n} \exp\left(-\left|\frac{x}{2\sqrt{t}}\right|^2\right). \quad \square$$

7. Skalierbarkeit von Modellen, Entdimensionalisierung, Ähnlichkeit

Numerische Werte einer physikalischen Größe in einem mathematischen Modell werden in Bezug zu einem System von Einheiten gemessen. Zum Beispiel sind m, km, Zoll, Meile Längeneinheiten, s, h, d, a Zeitmasseneinheiten und g, kg, t, lb Masseneinheiten der Masse. Wir möchten nun anstatt Einheiten die dahinterliegenden Dimensionen betrachten. Es sei L die abstrakte Dimension der Länge, T die abstrakte Dimension der Zeit und M die abstrakte Dimension der Masse. Es ist (M, L, T) ein System von Grunddimensionen. Ein solches System von Grunddimensionen ist erweiterbar mit θ der abstrakten Temperatur oder etc., es ist aber auch reduzierbar zu (L, T) .

Es sei nun $\{a_i\}_{i=1, \dots, r}$ eine Menge dimensionsbehafteter Parameter und $([a_i])_{i=1, \dots, r}$ die Menge der dazugehörigen Dimensionen. Ein *Fundamentalsystem* ist eine Menge unabhängiger Dimensionen, aus welchen alle anderen Dimensionen des Modells abgeleitet werden.

Definition 28. Es sei $([a_1], \dots, [a_r])$ eine Menge an abstrakten Dimensionen ein **Fundamentalsystem** zu einem System an Grunddimensionen (d_1, \dots, d_r) , falls

1. Wenn $\prod_{i=1}^r [a_i]^{\beta_i} = 1$ gilt, so folgt $\beta_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$.
2. Es existieren $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $\prod_{i=1}^r [a_i]^{\alpha_{ij}} = d_j$ für alle $j = 1, \dots, r$. □

Man sieht das System an Grunddimensionen ist selber wieder ein Fundamentalsystem zu sich.

Es seien $\{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_m\}$ alle im Modell vorkommenden dimensionsbehafteten Parameter. Es bilde $([a_1], \dots, [a_r])$ ein Fundamentalsystem zu einem gewählten System an Grunddimensionen (d_1, \dots, d_r) . Es lassen sich nun m dimensionslose Parameter definieren durch

$$II_j := \frac{b_j}{\prod_{i=1}^r a_i^{\gamma_{ij}}} \quad j = 1, \dots, m,$$

wobei γ_{ij} geeignet gewählt, sodass $[II_j] = 1$ gilt.

⁷Es ist $y^2 = \langle y, y \rangle = \|y\|^2$ mit $\|\cdot\|$ euklidischer Norm.

Entdimensionalisierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho_0(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) = -\nabla p + \mu \Delta v, \quad (54)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (55)$$

sind dimensionsbehaftet.

Variable	abstrakte Dimension
v Geschwindigkeit	$\frac{L}{T}$
ρ_0 Massendichte	$\frac{M}{L^3}$
p Druck/Fläche	$\frac{M \cdot L / T^2}{L^2} = \frac{M}{L T^2}$
μ dynamische Viskosität	$\frac{M}{L T}$

Alle Terme der Navier-Stokes-Gleichungen haben die Dimension $M/(L^2 T^2)$. Dies lässt sich leicht nachrechnen

$$\begin{aligned} [\rho_0 \partial_t v] &= \frac{M}{L^3} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{L}{T} = \frac{M}{L^2 T^2}, \\ [\rho_0 (v \cdot \nabla)v] &= \frac{M}{L^3} \cdot \frac{L}{T} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{L}{T} = \frac{M}{L^2 T^2}, \\ [\nabla p] &= \frac{1}{L} \cdot \frac{M}{L T^2} = \frac{M}{L^2 T^2}, \\ [\mu \Delta v] &= \frac{M}{L T} \cdot \frac{1}{L^2} \cdot \frac{L}{T} = \frac{M}{L^2 T^2}. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die Navier-Stokes-Gleichungen entdimensionalisieren. Dazu definieren wir mit den Referenzgrößen l, t^* folgende dimensionslose Variablen

$$y := \frac{x}{l}, \quad \tau := \frac{t}{t^*}.$$

Zur Referenzgröße p_0 sei für den Druck

$$r(\tau, y) := \frac{p(t, x)}{p_0}.$$

Die Größen l, t^* und p_0 sind später noch zu bestimmen sind. Die Geschwindigkeit v skalieren wir durch

$$u(\tau, y) := \frac{v(t, x)}{|v_\infty|},$$

wobei wir annehmen, dass

$$v(t, x) \rightarrow v_\infty \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty$$

mit v_∞ konstante *Anströmgeschwindigkeit*. Die Menge aller dimensionsbehafteter Parameter ist nun $\{l, |v_\infty|, \rho_0, p_0, \mu\}$. Wir wählen nun als Fundamentalsystem $([|v_\infty|], [\rho_0], [l])$. Wir berechnen als dimensionslose Parameter

$$\Pi_1 = \frac{t^*}{|v_\infty|^{-1} \rho_0^0 l^1}, \quad \Pi_2 = \frac{p_0}{|v_\infty|^2 \rho_0^1 l^0}, \quad \Pi_3 = \frac{\mu}{|v_\infty|^1 \rho_0^1 l^1}.$$

Nach Einführung der neuen Variablen erhält man aus (54) die Gleichung

$$\partial_\tau u + \frac{t^* |v_\infty|}{l} (u \cdot \nabla_y) u = -\frac{p_0 t^*}{\rho_0 l |v_\infty|} \nabla_y r + \frac{\mu t^*}{\rho_0 l^2} \Delta_y u. \quad 8$$

Wir setzen die noch freien Referenzgrößen fest indem wir $\Pi_1=1$ und $\Pi_2=1$ wählen, d.h.

$$t^* := \frac{l}{|v_\infty|}, \quad p_0 := \rho_0 |v_\infty|^2$$

und führen durch

$$\nu := \frac{\mu}{\rho_0}$$

die kinematische Viskosität des Fluids ein. Dann

$$\partial_\tau u + (u \cdot \nabla_y) u = -\nabla_y r + \overbrace{\frac{= \Pi_3}{\nu}}^{\nu} \frac{1}{|v_\infty| l} \Delta_y u.$$

Mit

$$\text{Re} := \frac{1}{\Pi_3} = \frac{|v_\infty| l}{\nu}$$

bezeichnet man die Reynoldszahl eines Fluids. Sie ist dimensionslos und gibt das Verhältnis von Konvektion zu Diffusion in einer Strömung wieder. Die entdimensionalisierten Navier-Stokes-Gleichungen (54), (55), inklusive der Massenerhaltung, lauten dann in unserem Fall

$$\begin{aligned} \partial_\tau u + (u \cdot \nabla) u &= -\nabla r + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u, \\ \text{div} u &= 0. \quad 9 \end{aligned}$$

Die Reynoldszahl $\text{Re} = \frac{|v_\infty| l}{\nu}$ ist die grundlegende Größe für die Ähnlichkeitstheorie und ermöglicht es, großdimensionierte Experimente im Windkanal durchzuführen. Der Versuch im Windkanal muss nur so durchgeführt werden, dass die Reynoldszahlen übereinstimmen. Dann liefern die Navier-Stokes-Gleichungen das gleiche Resultat u .

Will man die Strömungsverhältnisse um einen Tragflügel im Windkanal simulieren, so muss man etwa das Modell um den Faktor 1000 verkleinern. Man erhält dann das gleiche Ergebnis,

⁸ Mit der Kettenregel berechnen wir

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \frac{|v_\infty|}{t^*} \partial_\tau u, \\ (v \cdot \nabla_x) v &= \sum_{i=1}^3 v_i \partial_{x_i} v = \sum_{i=1}^3 |v_\infty| u_i |v_\infty| \partial_{y_i} u \frac{1}{l} = \frac{|v_\infty|^2}{l} \sum_{i=1}^3 u_i \partial_{y_i} u = \frac{|v_\infty|^2}{l} (u \cdot \nabla_y) u, \\ \nabla_x p &= \frac{p_0}{l} \nabla_y r, \\ \mu \Delta_x v &= \mu \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i x_i} v = \mu \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \left(|v_\infty| \partial_{y_i} u \frac{1}{l} \right) = \mu \frac{|v_\infty|}{l} \sum_{i=1}^3 \partial_{y_i y_i} u \frac{1}{l} = \mu \frac{|v_\infty|}{l^2} \Delta_y u. \end{aligned}$$

Wir setzen diese Ableitungen in Gleichung (54) ein und multiplizieren die erhaltene Identität mit $t^*/|v_\infty|$.

⁹ Die Massenerhaltung ändert, im Gegensatz zur Impulserhaltung, ihr Aussehen nicht. Denn

$$0 \stackrel{(55)}{=} \text{div} v = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} v_i = \sum_{i=1}^3 |v_\infty| \partial_{y_i} u_i \frac{1}{l} = \frac{|v_\infty|}{l} \text{div} u \quad \text{div} u = 0.$$

als wenn man die Anströmgeschwindigkeit um den Faktor 100 vergrößert und die kinematische Viskosität um den Faktor 10 verkleinert.

8. Schocks – Stoßwellen

Eine große Anzahl von physikalischen Vorgängen betreffen Schocks. **Schocks sind physikalisch gesehen Unstetigkeitsflächen der schwachen Lösung.** Wir geben im folgenden zwei Anwendungen (Beispiele) in denen wir uns auf eine Raumdimension beschränken.

Vorerst eine allgemeine Betrachtung zum Erhaltungssatz:

Es sei D ein Gebiet in der tx -Ebene, welches durch eine glatte Kurve $\Gamma := (t, \omega(t))$ (Hyperfläche) in zwei disjunkte Gebiete D_1 und D_2 unterteilt wird, also $D = D_1 \cup \Gamma \cup D_2$. Es seien $(u_1, q_1, 0)$ eine starke Lösung auf D_1 und $(u_2, q_2, 0)$ eine starke Lösung auf D_2 . Es sei $(u, q, 0)$ eine schwache Lösung von Problem (44) mit

$$\begin{aligned} u &= u_1 & \text{auf } D_1 & \text{ mit } u_1 \text{ glatte Funktion,} & u &= u_2 & \text{auf } D_2 & \text{ mit } u_2 \text{ glatte Funktion,} \\ q &= q_1 & \text{auf } D_1 & \text{ mit } q_1 \text{ glatte Funktion,} & q &= q_2 & \text{auf } D_2 & \text{ mit } q_2 \text{ glatte Funktion.} \end{aligned}$$

Dann gilt für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^1(D)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D u \partial_t \varphi + q \cdot \partial_x \varphi \, d(t, x) \\ &= \int_{D_1} u_1 \partial_t \varphi + q_1 \partial_x \varphi \, d(t, x) + \int_{D_2} u_2 \partial_t \varphi + q_2 \partial_x \varphi \, d(t, x) \\ &= \int_{D_1} u_1 \partial_t \varphi + q_1 \partial_x \varphi \, d(t, x) + \int_{D_1} \partial_t u_1 \varphi + \partial_x q_1 \varphi \, d(t, x) \\ &\quad + \int_{D_2} u_2 \partial_t \varphi + q_2 \partial_x \varphi \, d(t, x) + \int_{D_1} \partial_t u_2 \varphi + \partial_x q_2 \varphi \, d(t, x) \\ &= \int_{D_1} \partial_t (u_1 \varphi) + \partial_x (q_1 \varphi) \, d(t, x) + \int_{D_2} \partial_t (u_2 \varphi) + \partial_x (q_2 \varphi) \, d(t, x) \\ &= \int_{\partial D_1} (u_1 \varphi, q_1 \varphi) \cdot \vec{n}_{\partial D_1} \, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial D_2} (u_2 \varphi, q_2 \varphi) \cdot \vec{n}_{\partial D_2} \, d\mathcal{H}^{n-1}, \end{aligned}$$

wobei $\vec{n}_{\partial D_1}$ der äußere Normalenvektor an D_1 im tx -Raum und $\vec{n}_{\partial D_2}$ der äußere Normalenvektor an D_2 im tx -Raum. Es ist

$$\vec{n}_\Gamma := \vec{n}_{\partial D_1} = -\vec{n}_{\partial D_2}$$

und

$$\vec{n}_\Gamma := \begin{pmatrix} n_{t,\Gamma} \\ n_{x,\Gamma} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|\omega'(t)|^2 + 1}} \begin{pmatrix} -\omega'(t) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Dann folgt

$$0 = \int_\Gamma ((u_1 - u_2) n_{t,\Gamma} + (q_1 - q_2) \vec{n}_{x,\Gamma}) \varphi \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^1(D)$$

und damit punktweise

$$0 = (u_1 - u_2) n_{t,\Gamma} + (q_1 - q_2) \vec{n}_{x,\Gamma} \quad \text{auf } \Gamma.$$

Mit der Darstellung der Normalenvektoren (56) folgt

$$0 = \frac{1}{\sqrt{|\omega'(t)|^2 + 1}} \left(-(u_1 - u_2)\omega'(t) + (q_1 - q_2) \right) \quad \text{auf } \Gamma.$$

Es sei $v_\Gamma := \omega'$ die Geschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche Γ . Die **Sprungbedingung** lautet

$$\boxed{(u_2 - u_1)v_\Gamma = q_2 - q_1 \quad \text{auf } \Gamma} \quad (57)$$

Beispiel 29 (Strömungen).

Eine Luftströmung (im isothermen Fall) wird durch Massen- und Impulserhaltung ($J=0, r=0$) beschrieben

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = 0 \quad \text{in } (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (58)$$

$$\partial_t(\varrho v) + \operatorname{div}(\varrho v \otimes v - \sigma) = f. \quad (59)$$

Wir betrachten hier einen einfachen Fall. Wir setzen voraus:

Es sei D ein Gebiet in der tx -Ebene, welches durch eine glatte Kurve $\Gamma := (t, \omega(t))$ (Hyperfläche) in zwei disjunkte Gebiete D_1 und D_2 unterteilt wird, also $D = D_1 \cup \Gamma \cup D_2$. Es sei

$$\begin{aligned} \varrho = \varrho_1 \quad \text{in } D_1, \quad \varrho = \varrho_2 \quad \text{in } D_2, \quad & \text{wobei } \varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R} \text{ Konstanten,} \\ v = v_1 \quad \text{in } D_1, \quad v = v_2 \quad \text{in } D_2, \quad & \text{wobei } v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \text{ Konstanten.} \end{aligned}$$

Weiter

$$\sigma := -p, \quad f := 0,$$

wobei $p = p(\varrho)$ ein Druck.

Damit folgt für die Masse- und Impulserhaltung (58)-(59)

$$(\varrho_2 - \varrho_1)v_\Gamma = \varrho_2 v_2 - \varrho_1 v_1 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (60)$$

$$(\varrho_2 v_2 - \varrho_1 v_1)v_\Gamma = (\varrho_2 v_2 v_2 - \varrho_1 v_1 v_1) + (p(\varrho_2) - p(\varrho_1)) \quad \text{auf } \Gamma. \quad (61)$$

Wir wollen nun die Sprungbedingungen von (60)-(61) so formulieren, wie sie in den Physik-Büchern zu finden sind. Wir definieren dazu

$$\lambda_i := (v_\Gamma - v_i) \cdot \vec{n}_\Gamma \quad i=1, 2.$$

Aus (60)-(61) wird

$$\mathbf{m} := \varrho_2 \lambda_2 = \varrho_1 \lambda_1 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (62)$$

$$\mathbf{m} v_2 + p(\varrho_2) = \mathbf{m} v_1 + p(\varrho_1) \quad \text{auf } \Gamma, \quad (63)$$

wobei \mathbf{m} der Massefluß am Schock.

Die Geschwindigkeit des Interfaces

$$v_\Gamma = \frac{\varrho_2 v_2 - \varrho_1 v_1}{\varrho_2 - \varrho_1} \quad \text{falls } \varrho_1 \neq \varrho_2$$

ist durch die Differentialgleichung eindeutig bestimmt.

Beispiel 30 (Schocks bei hyperbolischen Gleichungen).

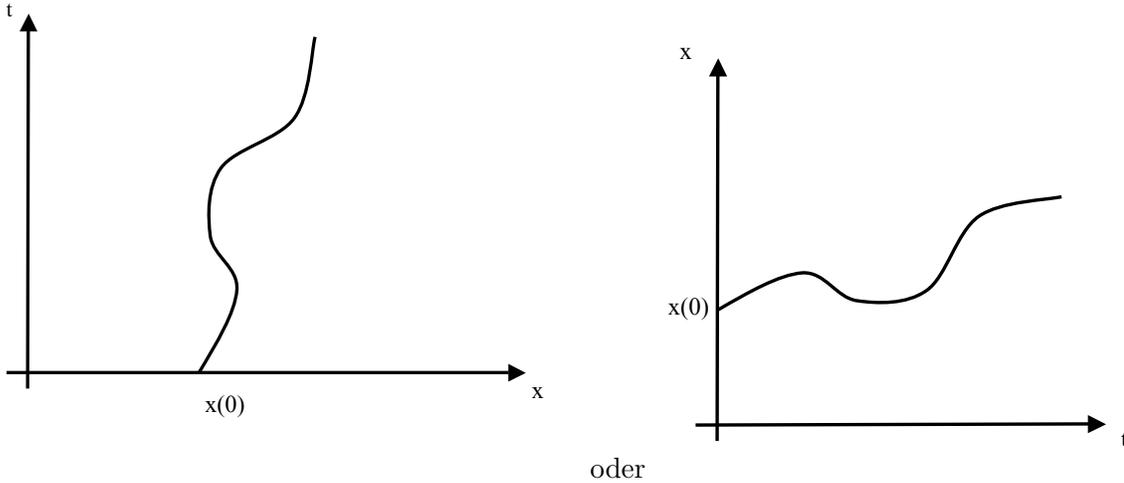
Wir betrachten nur die Massenerhaltung mit $J = q(\varrho)$ wobei $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene (zweimal stetig differenzierbare) Funktion und $r=0$. Das heisst, es gilt die Massenerhaltung

$$\partial_t \varrho(t, x) + \partial_x q(\varrho(t, x)) = 0 \quad \text{auf } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (64)$$

Die Massenerhaltung läßt sich auch schreiben als

$$\partial_t \varrho(t, x) + q'(\varrho(t, x)) \partial_x \varrho(t, x) = 0 \quad \text{auf } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Charakteristiken: Wir untersuchen, wie sich eine Lösung von (64) entlang von Trajektorien im Raum verhält. Sei $(t, x(t))$ eine Trajektorie.



Lemma 31. *Unter der Annahme*

$$x'(t) = q'(\varrho(t, x(t))), \quad (65)$$

ergibt sich aus (64), dass

$$\frac{d}{dt} \varrho(t, x(t)) = 0 \quad (66)$$

gilt und

$$x'(t) = q'(\varrho(0, x(0))). \quad (67)$$

Also sind die Trajektorien (Charakteristiken) Geraden.

Beweis. Mit der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dt} \varrho(t, x(t)) = \partial_t \varrho(t, x(t)) + x'(t) \partial_x \varrho(t, x(t)).$$

Wegen (64) und (65) folgt die Behauptung (66). Aus (66) gilt für jeden festen Punkt, also o.B.d.A. $t=0$

$$\varrho(t, x(t)) = \varrho(0, x(0)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+. \quad (68)$$

Eingesetzt in (65) folgt (67). \square

Satz 32. Wir betrachten eine Schar von Charakteristiken

$$(t, x_y(t)) \quad \text{mit } x_y(t) = y + s(y)t, \quad \text{wobei } y \in \mathbb{R} \text{ der Schar-Parameter}$$

und $s(y) = q'(\varrho(0, x_y(0)))$. Es sei

$$t < t_0 \quad \text{mit} \quad \frac{1}{t_0} \geq \sup_{y \in \mathbb{R}} (-s'(y)). \quad (69)$$

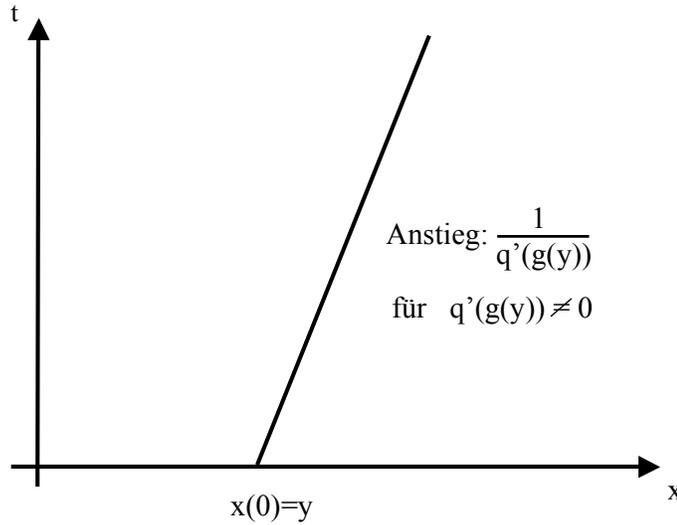
Dann ist eine Lösung der DGL (64) mit Anfangswerten $\varrho(0,y)=g(y)$ für $y \in \mathbb{R}$ mit g glatte Funktion, äquivalent zu

$$\varrho(t, x_y(t)) = g(y).$$

Beweis. Siehe TA 16. □

Bemerkung 33. Bedingung (69) ist die geometrische Bedingung dafür, dass die Geraden sich bis t_0 nicht schneiden.

Das bedeutet ϱ ist auf Geraden der Form $x_y(t) = y + q'(g(y))t$ konstant.



Schocks: Es sei D ein Gebiet in der tx -Ebene, welches durch eine glatte Kurve $\Gamma := (t, \omega(t))$ (Hyperfläche) in zwei disjunkte Gebiete D_1 und D_2 unterteilt wird, also $D = D_1 \cup \Gamma \cup D_2$. Es sei

$$\varrho = \varrho_l \text{ in } D_1, \quad \varrho = \varrho_r \text{ in } D_2, \quad \text{wobei } \varrho_l, \varrho_r \in \mathbb{R} \text{ glatte Lösungen auf } D_1 \text{ bzw. } D_2.$$

Damit folgt aus der Massenerhaltung die Sprungbedingung

$$(\varrho_r - \varrho_l)v_\Gamma = q(\varrho_r) - q(\varrho_l) \quad \text{auf } \Gamma.$$

Aus physikalischer Sicht kann ein Schock nicht in beiden Richtungen sein, denn es gilt die

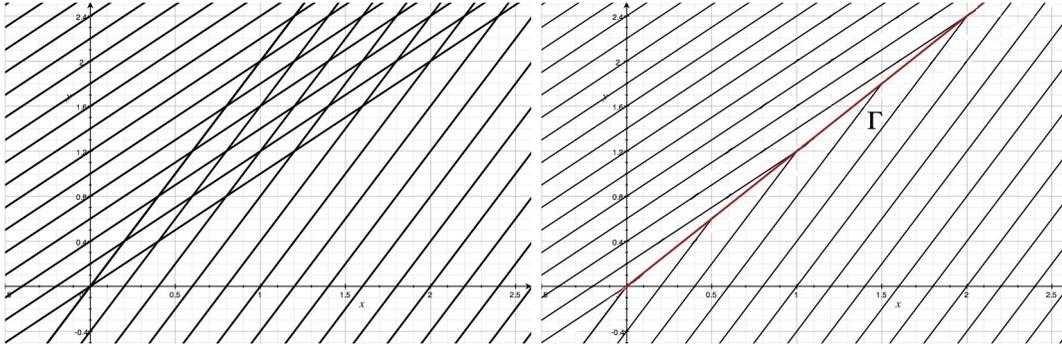
Entropie-Bedingung: $q'(\varrho_l) > q'(\varrho_r)$.

Falls q konkav, das heisst $q'' < 0$, dann folgt

$$\varrho_l < \varrho_r \quad \text{auf } \Gamma \quad \text{für Schocks.} \tag{70}$$

Bemerkung 34. Falls q konvex, das heisst $q'' > 0$, dann gilt $\varrho_l > \varrho_r$ für Schocks. Wenn man x durch $-x$ ersetzt, dann ist das äquivalent dazu, dass man q durch $-q$ ersetzt um dieselbe Gleichung zu erhalten. □

Wir nehmen an ϱ_l und ϱ_r seien Konstanten, $\varrho_l < \varrho_r$ und $q'' < 0$. Dann ist $\Gamma = \{(t, \omega(t))\}$ eine Gerade, wobei $\omega(t) = v_\Gamma t + y_1$ mit $v_\Gamma = (q(\varrho_r) - q(\varrho_l)) / (\varrho_r - \varrho_l)$ konstant und $y_1 \in \mathbb{R}$.



Es sei q konkav. Wir betrachten nun den Fall, wenn $\varrho_l > \varrho_r$ ist. Es seien ϱ_l und ϱ_r Konstanten.

Verdünnungswelle: Unter der Voraussetzung, dass $q'' < 0$ (q konkav) und falls $\varrho_l > \varrho_r$, dann ist eine Verdünnungswelle

$$\begin{aligned} \varrho(t, y + tq'(\varrho_l)) &= \varrho_l && \text{für } y \leq y_0, \\ \varrho(t, y_0 + tq'(z)) &= z && \text{für } z \in [\varrho_r, \varrho_l], \\ \varrho(t, y + tq'(\varrho_r)) &= \varrho_r && \text{für } y \geq y_0 \end{aligned}$$

eine stetige Lösung, wobei $y_0 \in \mathbb{R}$ ein freier Verschiebungsparameter ist. Eine äquivalente Formulierung ist

$$\varrho(t, x) = \left\{ \begin{array}{ll} \varrho_l & \text{für } x \leq tq'(\varrho_l) + y_0 \\ (q')^{-1}\left(\frac{x - y_0}{t}\right) & \text{dazwischen} \\ \varrho_r & \text{für } x \geq tq'(\varrho_r) + y_0 \end{array} \right\}.$$

8.1 Zurück zum Verkehrsflussmodell: kontinuierlich

Wir betrachten ein Straßenstück, welches weder Zu- noch Abfahrten hat. Die Variable $x \in \mathbb{R}$ bezeichne einen Ort auf dem Straßenstück $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Die Straße ist für uns als Beobachter in Ruhe, das heißt, wir befinden uns nicht in einem Helikopter oder in einem anderen Fahrzeug.

Es sei $(t, x) \mapsto \varrho(t, x)$ die Fahrzeugdichte oder die Verkehrsdichte. Die Fahrzeugdichte gibt die Anzahl, der sich in positiver x -Richtung bewegendes Fahrzeuge zum Zeitpunkt t an. Die Fahrzeugdichte erfüllt die folgende Gleichung (Massenerhaltung)

$$\partial_t \varrho(t, x) + \operatorname{div}(q(t, x)) = 0 \quad \text{für } (t, x) \in (t_0, \infty) \times (a, b). \quad (71)$$

Der Flußvektor $(t, x) \mapsto q(t, x)$ gibt die Anzahl der Fahrzeuge an, die zum Zeitpunkt t den Ort x passieren. Es sind oder können noch Anfangswerte gegeben sein

$$\varrho(t_0, x) = \varrho_0(x) \quad \text{für } x \in (a, b),$$

wobei ϱ_0 eine gegebene Anfangsverteilung.

Beispiel 35 (Mittlung). Wir hatten in Kapitel 1.1 Fahrzeugfolgemodelle studiert, das heisst wir haben betrachtet

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \gamma_i(\mathbf{x}_{i-1}(t) - \mathbf{x}_i(t)) \quad i=1, \dots, n. \quad (72)$$

Jedes \mathbf{x}_i (wobei $t \in (t_0, \infty) \mapsto \mathbf{x}_i(t) \in (a, b)$) beschreibt die Bewegung eines Fahrzeuges in der Zeit t . Fahrzeugfolgemodelle sind mikroskopische, diskrete Modelle.

Wir wollen nun makroskopische, kontinuierliche Modelle daraus ableiten. Die "gemittelte Fahrzeuganzahl" und die "gemittelte Fluß" ist gegeben durch

$$\varrho_s(t, x) = \sum_{i=1}^n \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \geq 0, \quad q_s(t, x) = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{x}}_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)).$$

Bei der "gemittelte Fahrzeuganzahl" wird über die Anzahl der Fahrzeuge gemittelt. (Dies ist eine Mittelung nur mit $m_i=1$. Es wird hierbei kein Unterschied gemacht, wie groß und schwer die einzelnen Fahrzeuge tatsächlich sind. Also sprechen wir hier von der Fahrzeugdichte.) Nach Lemma 17, Gleichung (41), gilt für die "gemittelten Größen" die Massenerhaltung

$$\partial_t \varrho_s + \operatorname{div} q_s = 0.$$

Mit der "gemittelten Geschwindigkeit"

$$v_s(t, x) = \frac{\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{x}}_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t))}{\sum_{i=1}^n \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t))}$$

gilt

$$q_s(t, x) = \varrho_s(t, x) v_s(t, x).$$

Im Limes sind viele Fahrzeuge da und die Anzahl geht gegen unendlich. □

Aufgrund obiger Motivation machen wir folgende Annahme

$$q(t, x) = \varrho(t, x) v(t, x) \quad \text{mit } v \text{ die Geschwindigkeit der Fahrzeuge}$$

in der Massengleichung (71). In makroskopischen, kontinuierlichen Verkehrsmodellen wurde der folgende konstitutive Ansatz nach Lighthill, Whitham und Richards (LWR) gemacht

$$v(t, x) = \hat{v}(\varrho), \quad \hat{q}(\varrho(t, x)) := \varrho(t, x) \hat{v}(\varrho(t, x)).$$

Damit ergibt sich die Klasse der LWR-Modelle

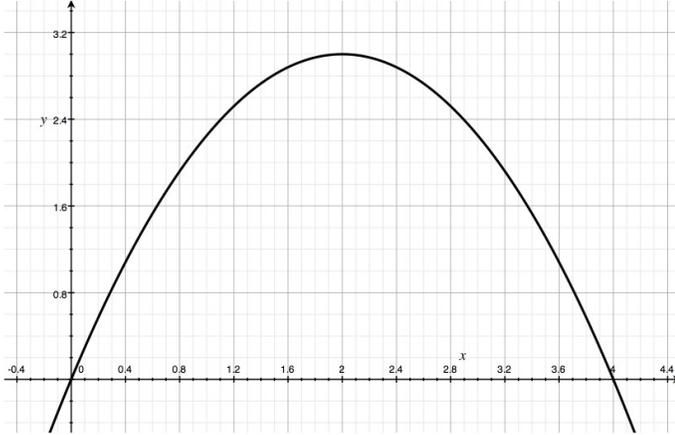
$$\partial_t \varrho(t, x) + \operatorname{div}(\hat{q}(\varrho(t, x))) = 0. \quad (73)$$

Gleichung (73) nennen wir *Transportgleichung*.

Wir betrachten nun Beispiele dazu.

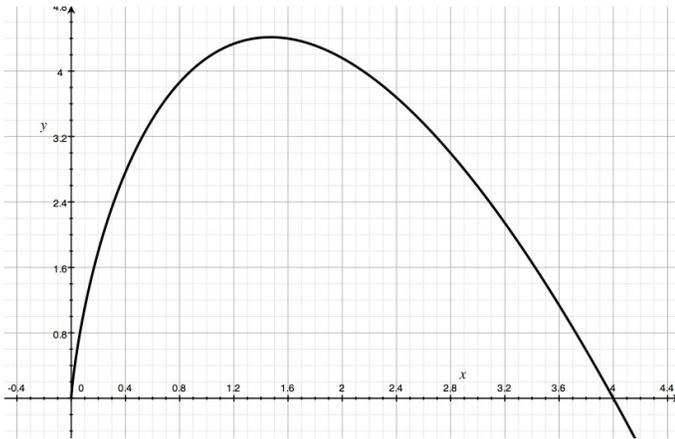
Modell von Greenshield

$$\hat{v}(\varrho) := v_{\max} \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{\max}}\right), \quad \hat{q}(\varrho) = v_{\max} \varrho \left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{\max}}\right), \quad \varrho \in [0, \varrho_E), \quad \varrho_E := +\infty;$$



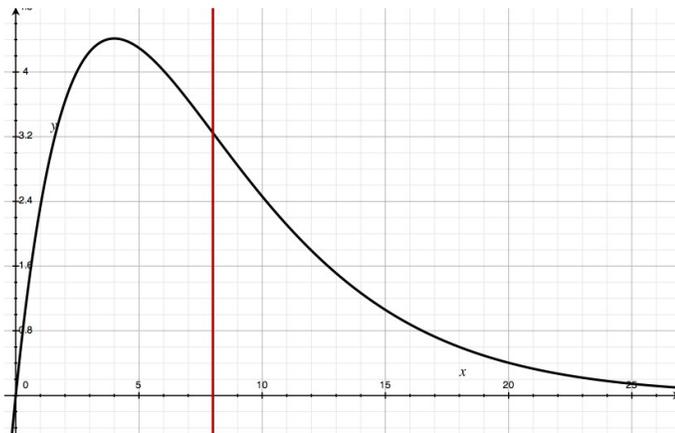
Modell von Greenberg

$$\hat{v}(\varrho) := v_{\max} \ln\left(\frac{\varrho_{\max}}{\varrho}\right), \quad \hat{q}(\varrho) = v_{\max} \varrho \ln\left(\frac{\varrho_{\max}}{\varrho}\right), \quad \varrho \in (0, \varrho_E), \quad \varrho_E := +\infty;$$



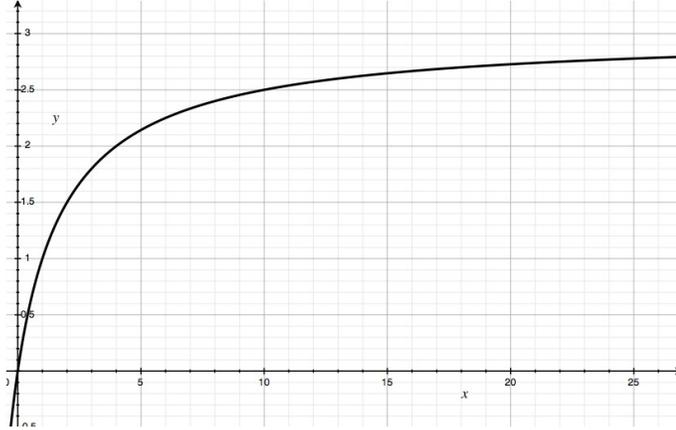
Modell von Underwood

$$\hat{v}(\varrho) := v_{\max} \exp\left(-\frac{\varrho}{\varrho_{\max}}\right), \quad \hat{q}(\varrho) = v_{\max} \varrho \exp\left(-\frac{\varrho}{\varrho_{\max}}\right), \quad \varrho \in [0, \varrho_E), \quad \varrho_E := 2\varrho_{\max};$$



Modell ohne ϱ_{\max}

$$\hat{v}(\varrho) := v_{\max} \frac{1}{\varrho_{\text{eff}} + \varrho}, \quad \hat{q}(\varrho) = v_{\max} \frac{\varrho}{\varrho_{\text{eff}} + \varrho}, \quad \varrho \in [0, \varrho_E), \quad \varrho_E := +\infty.$$



Hierbei ist v_{\max} in den Modellen von Greenshield und Underwood die Geschwindigkeit der Fahrzeuge, welche für $\varrho \rightarrow 0$ gefahren wird. In den Modellen von Greenshield und Greenberg repräsentiert der Wert $\varrho = \varrho_{\max}$ eine maximal belegte Straße.

Für alle diese Verkehrsmodelle gilt

$$\hat{v}'(\varrho) < 0,$$

das bedeutet, je größer die Verkehrsdichte um so geringer die Geschwindigkeit der Fahrzeuge. Für alle obigen Modelle ist

$$\hat{q}''(\varrho) < 0 \quad \text{für } \varrho \in [0, \varrho_E),$$

das heisst \hat{q} ist konkav auf $[0, \varrho_E]$.

Bemerkung 36. Mit $\hat{q}'(\varrho) = \hat{v}(\varrho) + \varrho \hat{v}'(\varrho)$ gilt

$$\hat{q}'(\varrho) < \hat{v}(\varrho).$$

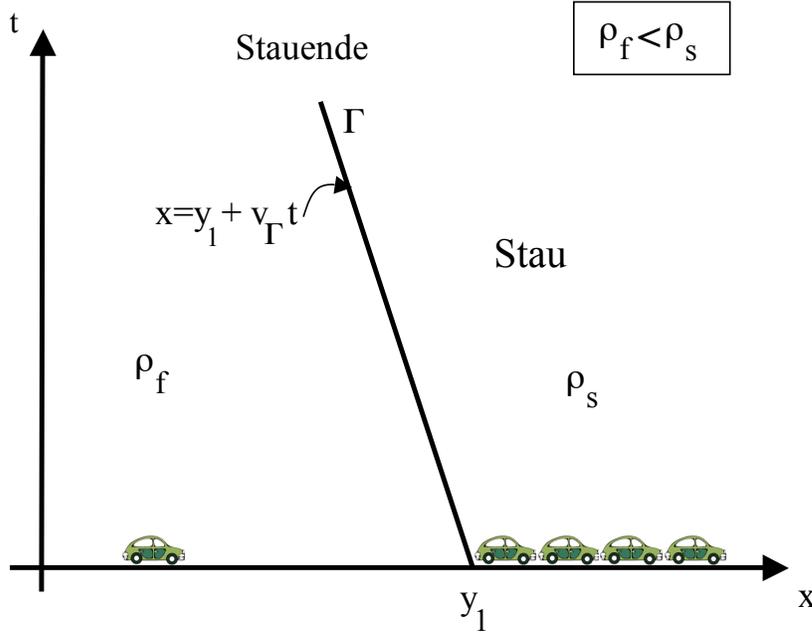
Der Term $q'(\varrho)$ kommt in der Transportgleichung $\partial_t \varrho + \text{div}(\hat{q}(\varrho)) = 0$ vor (siehe (73)) und diese ist äquivalent zu

$$\partial_t \varrho + \hat{q}'(\varrho) \cdot \nabla \varrho = 0.$$

Das heißt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Fahrzeugdichte ist kleiner als die Geschwindigkeit der Fahrzeuge selbst.

Wir betrachten im Folgenden vier Situationen, welche im Straßenverkehr auftreten können. Es seien ϱ_f , ϱ_s und ϱ_a reelle Konstanten.

Stau-Ende: Wir betrachten zuerst ein Stauende. Das Stauende entspricht einer Unstetigkeitsfläche Γ einer schwachen Lösung $\varrho = \varrho(t, x)$, wobei $\varrho = \varrho_f$ die konstante Fahrzeugdichte hinter dem Stauende und $\varrho = \varrho_s$ die konstante Fahrzeugdichte vor dem Stauende (das heisst also im Stau) sei. Es wird weiterhin angenommen, dass die Fahrzeuge, welche sich vor dem Stauende befinden mit einer sehr geringen positiven Geschwindigkeit fahren.



Wir wissen aus Kapitel 8, Bedingung (57), (oder auch siehe Beispiel 30, Schocks bei hyperbolischen Gleichungen) aus der Transportgleichung (73) folgt

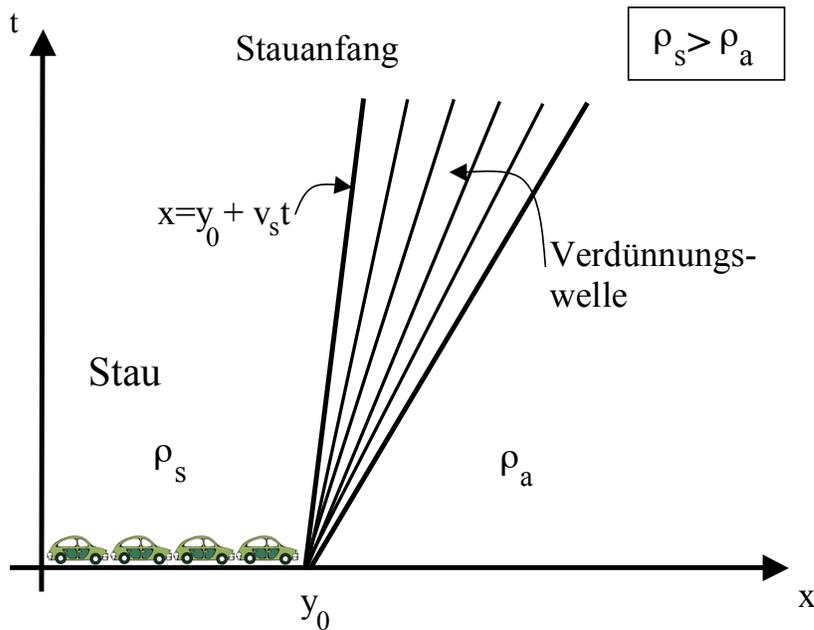
$$(\varrho_s - \varrho_f)v_\Gamma = \hat{q}(\varrho_s) - \hat{q}(\varrho_f) \quad \text{auf } \Gamma,$$

wobei v_Γ die Geschwindigkeit der Staufront ist. Ein Stau ist ein Schock. Wie wir wissen ist die einzige sinnvolle physikalische Schocklösung (siehe Beispiel 30, Entropie-Bedingung, Eigenschaft (70))

$$\varrho_f < \varrho_s.$$

Das ist auch anschaulich klar, die Verkehrsdichte im Stau ist größer als die Verkehrsdichte hinter dem Stauende.

Stau-Anfang: Es werde zum Zeitpunkt $t_0=0$ vom Ort $y_0 \in \mathbb{R}$ ein Hindernis von der Straße weggeräumt. Es sei ϱ_s die konstante positive Fahrzeugdichte im Stau und ϱ_a die konstante positive Fahrzeugdichte vor dem Stauanfang.



Es sei $\varrho_s > \varrho_a$. Wie in den allgemeinen Fall Beispiel 30 beschrieben ist die Entropie-Bedingung nicht erfüllt. Es kann damit keine Schocklösung existieren. Die schwache Lösung ist stetig und wird Verdünnungswelle genannt

$$\begin{aligned} \varrho(t, y + t\hat{q}'(\varrho_s)) &= \varrho_s && \text{für } y \leq y_0, \\ \varrho(t, y_0 + t\hat{q}'(z)) &= z && \text{für } z \in [\varrho_a, \varrho_s], \\ \varrho(t, y + t\hat{q}'(\varrho_a)) &= \varrho_a && \text{für } y \geq y_0. \end{aligned}$$

Es sei $\hat{v}(\varrho_s)$ die Geschwindigkeit mit der sich der Stau auflöst. Mit

$$v_s := \hat{q}'(\varrho_s) \tag{74}$$

gilt

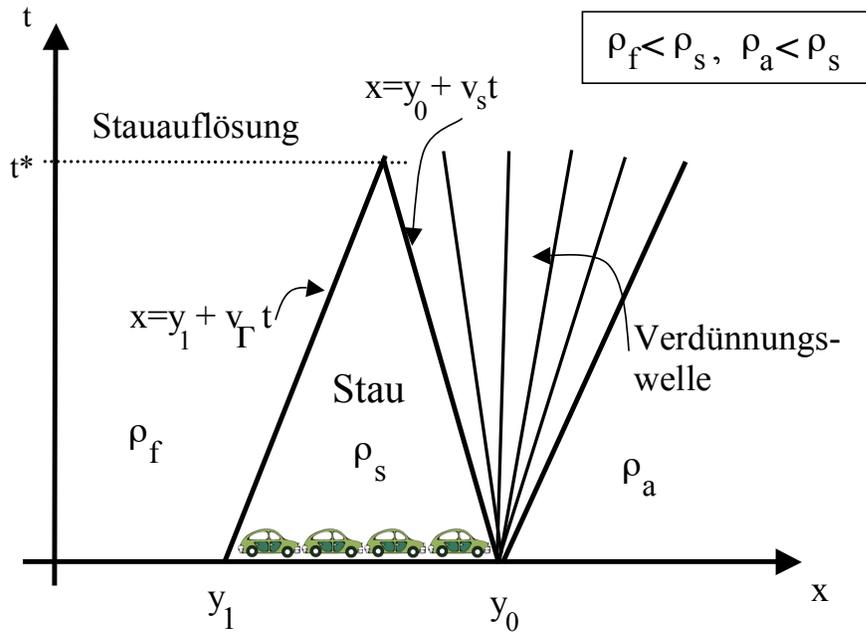
Lemma 37. *Es gilt*

$$v_s < \hat{v}(\varrho_s).$$

Das heisst der Stau löst sich nach hinten auf.

Beweis. Siehe Bemerkung 36. □

Stau-Auflösung: Es sei das Stauende y_1 links vom Stauanfang y_0 , d.h. $y_1 < y_0$.



Lemma 38. *Es sei $q'' < 0$. Dann ist*

$$v_G > v_s,$$

wobei v_s in (74) gegeben und v_G die Geschwindigkeit des Schocks ist.

Beweis. Es ist, da $q'' < 0$,

$$v_G = \frac{\hat{q}(\varrho_s) - \hat{q}(\varrho_f)}{\varrho_s - \varrho_f} = \frac{1}{\underbrace{\varrho_s - \varrho_f}_{>0}} \int_{\varrho_f}^{\varrho_s} \underbrace{\hat{q}'(r)}_{> \hat{q}'(\varrho_s)} dr > \hat{q}'(\varrho_s).$$

□

Es lässt sich nun der Zeitpunkt t^* berechnen, wenn der Stau sich aufgelöst hat. Es ist

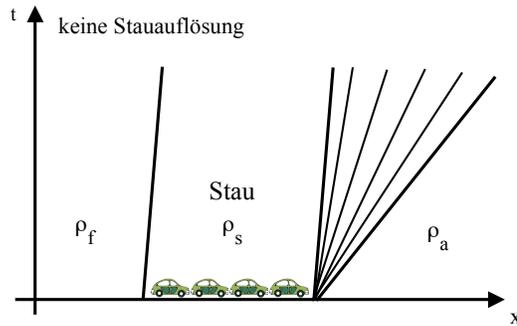
$$y_1 + v_G t^* = y_0 + v_s t^*,$$

und damit

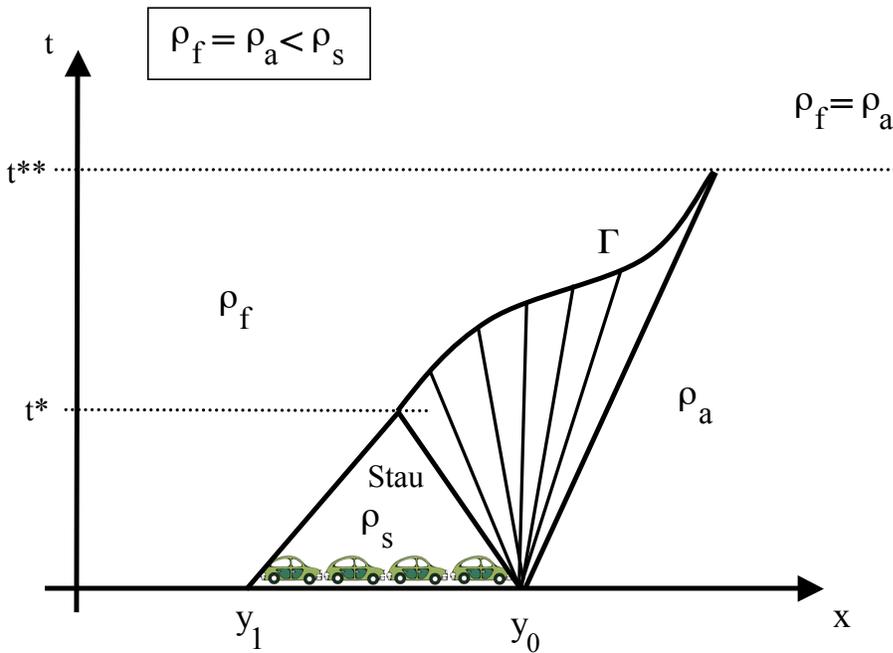
$$t^* = \frac{y_0 - y_1}{v_G - v_s}.$$

Bemerkung 39.

Die Aussage des Lemma's gilt nicht für $q''=0$. Dann löst sich der Stau vorne genauso schnell auf, wie er von hinten anwächst.



Nach der Stauauflösung:



Die Geschwindigkeit v_Γ ist hierbei

$$v_\Gamma(t,x) = \frac{\hat{q}(\varrho(t,x)) - \hat{q}(\varrho_f)}{\varrho(t,x) - \varrho_f} \quad \text{für } (t,x) \in \Gamma, t > t^*,$$

wobei $\varrho(t,x) = (\hat{q}')^{-1}\left(\frac{x - y_0}{t}\right)$

für t^* Stauauflösungszeitpunkt. Mit der Parameterisierung der Kurve $\Gamma = \{(t, \omega(t))\}$ folgt

$$\omega'(t) = \frac{\hat{q}(\varrho(t, \omega(t))) - \hat{q}(\varrho_f)}{\varrho(t, \omega(t)) - \varrho_f} \quad \text{wobei } \varrho(t,x) = (\hat{q}')^{-1}\left(\frac{x - y_0}{t}\right).$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, welche für einen gegebenen Startpunkt $(t^*, \omega(t^*))$ eine eindeutige glatte Lösung $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ hat.

(Die Lösung ω ist glatt, da $q(\varrho)$ stetig in t^*)

9. Energiegleichung

Wir betrachten N Massenpunkte, welche sich nach folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen verhalten

$$\frac{d}{dt}m_i(t)=r_i(t), \quad (75)$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_i(t)\dot{\mathbf{x}}_i(t)\right)=\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g_{ij}(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t))+\mathbf{f}_i(t). \quad (76)$$

Es ist $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ der Ort des i -ten Massenpunktes zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ und $m_i(t) \in \mathbb{R}$ dessen Masse. Es seien weiter $g_{ij}(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t))$ mit $g_{ij}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Wechselwirkungskräfte zwischen dem i -ten und j -ten Massenpunkt. Wir setzen voraus, dass $g_{ij}(\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_j(t)) = -g_{ji}(\mathbf{x}_j(t)-\mathbf{x}_i(t))$ gilt. Alle anderen Kräfte, die auf den i -ten Massenpunkt wirken, seien mit \mathbf{f}_i bezeichnet. Weiterhin ist r_i die Massenproduktion (Massenreaktionsrate) des i -ten Massenpunktes. Wir haben diese Modelle bereits in (17)-(18) und (38)-(39) (mit Massenfluss) betrachtet.

Wir definieren die "gemittelte Energiedichte"

$$\mathcal{E}_s(t, x) := \sum_{i=1}^N E_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)).$$

Hierbei ist

$$E_i(t) = \frac{m_i(t)}{2} \|\dot{\mathbf{x}}_i(t)\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G_{ij}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))$$

die Energie des i -ten Massenpunktes mit dem Potential $G_{ij}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, wobei gilt

$$\nabla G_{ij}(x) = g_{ij}(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3.$$

Der erste Summand von E_i ist die kinetische Energie und der zweite Summand entspricht der potentiellen. Der Einfachheit halber führen wir folgende Notation ein

$$\widehat{g}_{ij}(t) := g_{ij}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \quad \text{und} \quad \widehat{G}_{ij}(t) := G_{ij}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)).$$

Wir beweisen nun

Lemma 40. *Es gilt die Energiegleichung (bzw. Energieidentität)*

$$\partial_t \mathcal{E}_s(t, x) + \operatorname{div}(\Phi_s(t, x)) = \sum_{i=1}^N \left\langle \dot{\mathbf{x}}_i(t), \mathbf{f}_i(t) - \frac{r_i(t)}{2} \dot{\mathbf{x}}_i(t) \right\rangle \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \quad (77)$$

für $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$, wobei

$$\begin{aligned} \Phi_s(t, x) &= \sum_{i=1}^N E_i(t) \dot{\mathbf{x}}_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{4} \langle \widehat{g}_{ij}(t), \dot{\mathbf{x}}_i(t) + \dot{\mathbf{x}}_j(t) \rangle (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \int_0^1 \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i(t) - \tilde{s}\mathbf{x}_j(t)) d\tilde{s} \end{aligned}$$

der "gemittelte Energiefluss" ist.

Beweis. Aus der Massenerhaltung folgt mit der Produktregel

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{m_i(t)}{2} \|\mathbf{x}'_i(t)\|^2 \right) &= \frac{m'_i(t)}{2} \|\mathbf{x}'_i(t)\|^2 + m_i(t) \langle \mathbf{x}'_i(t), \mathbf{x}''_i(t) \rangle \\
&= \left\langle \mathbf{x}'_i(t), \frac{m'_i(t)}{2} \mathbf{x}'_i(t) + m_i(t) \mathbf{x}''_i(t) \right\rangle = \left\langle \mathbf{x}'_i(t), \frac{d}{dt} (m_i(t) \mathbf{x}'_i(t)) - \frac{m'_i(t)}{2} \mathbf{x}'_i(t) \right\rangle \\
&= \left\langle \mathbf{x}'_i(t), \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \widehat{g}_{ij}(t) + \mathbf{f}_i(t) - \frac{r_i(t)}{2} \mathbf{x}'_i(t) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt die Massen- und Impulserhaltung eingesetzt.

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{2} G_{ij}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \right) &= - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{2} \left\langle \nabla G_{ij}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)), \mathbf{x}'_i(t) - \mathbf{x}'_j(t) \right\rangle \\
&= - \left\langle \mathbf{x}'_i(t), \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \widehat{g}_{ij}(t) \right\rangle + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{2} \left\langle \widehat{g}_{ij}(t), \mathbf{x}'_i(t) + \mathbf{x}'_j(t) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\frac{d}{dt} E_i(t) = \left\langle \mathbf{x}'_i(t), \mathbf{f}_i(t) - \frac{r_i(t)}{2} \mathbf{x}'_i(t) \right\rangle + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{2} \left\langle \widehat{g}_{ij}(t), \mathbf{x}'_i(t) + \mathbf{x}'_j(t) \right\rangle.$$

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{E}_s(t, x) &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} E_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) + \sum_{i=1}^N E_i(t) \nabla \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) (-\mathbf{x}'_i(t)) \\
&= \sum_{i=1}^N \left\langle \mathbf{x}'_i(t), \mathbf{f}_i(t) - \frac{r_i(t)}{2} \mathbf{x}'_i(t) \right\rangle \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{2} \left\langle \widehat{g}_{ij}(t), \mathbf{x}'_i(t) + \mathbf{x}'_j(t) \right\rangle \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \\
&\quad - \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^N E_i(t) \mathbf{x}'_i(t) \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \right).
\end{aligned}$$

Wie im Beweis in Lemma 17 folgt nun (Hinweis: Behandle hier $\langle \widehat{g}_{ij}(t), \mathbf{x}'_i(t) + \mathbf{x}'_j(t) \rangle$ wie $r_{ij}(t)$ dort.)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{2} \left\langle \widehat{g}_{ij}(t), \mathbf{x}'_i(t) + \mathbf{x}'_j(t) \right\rangle \psi_s(x - \mathbf{x}_i(t)) \\
&= -\operatorname{div} \left(\frac{1}{4} \sum_{i,j} \left\langle \widehat{g}_{ij}(t), \mathbf{x}'_i(t) + \mathbf{x}'_j(t) \right\rangle (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \int_0^1 \psi_s(x - (1-\tilde{s})\mathbf{x}_i(t) - \tilde{s}\mathbf{x}_j(t)) d\tilde{s} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

Beispiel 41.

1. Gravitation von N Körpern mit der jeweils konstanten Masse m_i

Siehe HA 2: Die Energie der einzelnen Massenpunkte ist hier definiert als

$$E_i(t) := \frac{m_i}{2} \|\mathbf{x}'_i(t)\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{m_i m_j G}{\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|}$$

Das heißt, die Massen- und Impulserhaltung lauten

$$m_i'(t) = 0$$

$$m_i \mathbf{x}_i''(t) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_i m_j G \frac{\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)}{\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|^3}, \quad \text{für } i=1, \dots, N.$$

Da $\mathbf{f}_i \equiv 0$ und $r_i \equiv 0$, so folgt das die rechte Seite in (77) verschwindet. Damit gilt die

$$\textbf{Energieerhaltung:} \quad \partial_t \mathcal{E}_s + \text{div}(\Phi_s) = 0$$

2. Duffing Oszillator

Siehe TA 8: Hier ist $N=1$ mit konstanter Masse $m=1$. Für die freie Energie gilt

$$E(t) := \frac{1}{2} |x'(t)|^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \beta |x(t)|^2 + \frac{1}{4} \alpha |x(t)|^4}_{=G(x(t))}.$$

Das ist ein Ausnahmefall zu obigen, da hier nur ein Massenpunkt betrachtet wird. Es ist G der potentielle Energieanteil. Die Impulserhaltung ist

$$x''(t) = \underbrace{-\beta x(t) - \alpha x(t)^3}_{=g(x(t))} - \underbrace{\delta x'(t)}_{\mathbf{f}(t)} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_+$$

mit $\delta \geq 0$. Die Massenerhaltung ist trivial, da $r_i \equiv 0$. Die Energieidentität lautet nun

$$\partial_t \mathcal{E}_s + \text{div}(\Phi_s) = -\delta |x'(t)|^2 \leq 0.$$

Damit gilt die

$$\textbf{Energieungleichung:} \quad \partial_t \mathcal{E}_s + \text{div}(\Phi_s) \leq 0$$

für isothermale Prozesse.

10. Anhang

10.1 Anhang zu Kapitel 1

Anhang 42. Aus TA 1 kennen wir folgende Aussage:

Wir betrachten folgendes Problem

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (*)$$

Es gilt: Ist y die Lösung von

$$\dot{y} = Dy, \quad y(0) = S^{-1}x_0$$

dann folgt

$$x = Sy \text{ löst } (*).$$

Hierbei ist $A = SDS^{-1}$,

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_i \text{ EW}$$

$$S = (v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_n}), \quad v_{\lambda_i} \text{ EV.}$$

Wir wenden nun diese Aussage auf die Berechnung der exakten Lösung von Problem (5) an.

Berechnung der EW:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\varepsilon - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \varepsilon\lambda + 1 = 0$$

also

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} i$$

Berechnung der EV:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

es folgt

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{-\frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} i} \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} i} \end{pmatrix}.$$

Also ist $S = (v_{\lambda_1}, v_{\lambda_2})$ und damit $x(t) = Sy(t)$. Es folgt für die erste Komponente der Lösung $x = (x_1, x_2)$:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}e^{\lambda_1 t} \\ \tilde{B}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

wobei die Konstanten \tilde{A} und \tilde{B} aus den Anfangswerten bestimmt werden. Also ist die allgemeine Lösung

$$x_1(t) = \tilde{A}e^{\lambda_1 t} + \tilde{B}e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} (\tilde{A}e^{i\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}t} + \tilde{B}e^{-i\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}t}).$$

□