

Theoretische Astrophysik 1

Ernst A. Dorfi

Institut für Astrophysik

Universität Wien

Türkenschanzstr. 17

1180 Wien

e-mail: ernst.dorfi@univie.ac.at

Skriptum zur Vorlesung

Version WS15/16

Wien, Oktober 2015

Vorwort

Die Erforschung der Natur ist heute dadurch charakterisiert, dass früher getrennte Disziplinen immer stärker zusammenwachsen. Dies gilt auch für die Astronomie und Physik. In dem Maße, wie das Verständnis des Kosmos und seiner Abläufe zunimmt, wächst die Bedeutung der Physik im Rahmen der Astronomie. Dadurch werden große Bereiche der Astronomie immer mehr zur Astrophysik.

Dieses Zitat aus der *alten* Denkschrift Astronomie (1987) der Deutschen Forschungsgemeinschaft beschreibt ein wichtiges Anliegen der Vorlesung, nämlich die physikalischen Grundlagen, nach denen astronomische Objekte funktionieren, zu beleuchten. Um den astrophysikalischen Bezug zu betonen, müssen einige Ergebnisse der theoretischen Physik, wie Thermodynamik, klassische Mechanik, Atom- und Kernphysik, Relativitätstheorie, um nur einige zu nennen, ohne ausreichende Ableitung übernommen werden.

Der erste Teil stellt im Wesentlichen eine Einführung in die Astrophysik hydrostatischer Konfigurationen, in einige relevante Strahlungsprozesse sowie in die elementare Plasmaphysik dar. Der zweite und dritte Teil dieser auf zwei Semester konzipierten Vorlesung behandelt eine Auswahl von astrophysikalischen Phänomenen des Interstellaren Mediums (ISM) bzw. galaktische und extragalaktische Fragestellungen der Astrophysik. Bedingt durch den Bachelor-Studienplan Astronomie an der Universität Wien und die Stoffaufteilung zwischen den Teilen der Vorlesung, unterscheidet sich die Auswahl des Stoffes etwas von früheren Astrophysik Vorlesungen.

Obwohl die astrophysikalische Forschung größtenteils noch cgs-Einheiten verwendet, sind die konkreten Zahlenwerte dieses Skriptums in SI-Einheiten angegeben. Zur Vertiefung des Stoffes stehen in den Übungen zahlreiche Beispiele zur Verfügung.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei Herrn Dr. Harald Höller herzlich bedanken, der einige Teile des MHD-Kapitels getippt hat. Für Hinweise zu Fehlern, Kritik und Anregungen zu fehlenden Aspekten bin ich dankbar.

Inhaltsverzeichnis

1	Stellare Astrophysik	1	
1.1	Hydrostatische Konfigurationen	1	Kennen/KW
1.1.1	Stellare Zeitskalen	1	
1.1.2	Hydrostatisches Gleichgewicht	3	
1.1.3	Mittlerer Druck und Gravitationsenergie	4	
1.2	Planeten	5	
1.2.1	Konstante Elastizität	5	
1.2.2	Lineare Elastizität	6	
1.3	Polytropen	7	Herleitungen
1.3.1	Lane-Emden-Gleichung	7	
1.3.2	Eigenschaften der Lane-Emden-Lösungen	8	
1.4	Weißer Zwerge	9	
1.4.1	Historisches und Beobachtungen	10	
1.4.2	Zustandsgleichung für entartetes Elektronengas	10	
1.4.3	Chandrasekhar'sche Grenzmasse	12	
1.4.4	Entwicklung zum Weißen Zwerg	14	
1.4.5	Oberfläche von Weißen Zwergen	15	
1.4.6	Kühlung von Weißen Zwergen	16	
1.5	Bonnor-Ebert-Sphären	17	
1.5.1	Isotherme Kugeln	17	
1.5.2	Einfluss des Außendrucks	19	
1.6	Gleichungen des Sternaufbaues	22	
1.6.1	Mechanische Anteile	22	
1.6.2	Thermische Anteile	23	
1.6.3	Konvektion	25	
1.7	Fragmentation	28	
1.7.1	Jeans-Kriterium	28	
1.7.2	Minimale Masse	31	

1.8	Druckloser Kollaps	32
1.9	Akkretionströmungen	34
1.10	Dynamische Stabilität	36
1.11	Virialtheorem, skalare Version	39
1.11.1	Formulierung	39
1.11.2	Stellare Gleichgewichte	42
1.11.3	Interstellare Wolken	43
1.11.4	Magnetische Konfigurationen	45
1.12	Stoßwellen	48
1.12.1	Rankine-Hugoniot-Bedingungen	48
1.12.2	Machzahl	52
1.13	Strahlungsfelder	53
1.13.1	Strahlungsintensität	53
1.13.2	Nettostrahlungsfluss	53
1.13.3	Strahlungsdruck	54
1.13.4	Strahlungsenergiedichte	54
1.13.5	Strahlungsmomente	54
1.13.6	Eddington-Faktor	55
1.14	Strahlungstransport	56
1.14.1	Strahlungstransportgleichung	56
1.14.2	Strahlungstransport im Sterninneren	58
1.14.3	Formale Lösung der ebenen Strahlungstransportgleichung	61
1.15	Graue ebene Atmosphäre	62
1.16	Strahlungsprozesse	64
1.16.1	Einstein Koeffizienten	64
1.16.2	Bremsstrahlung	67
1.16.3	Synchrotronstrahlung (einfach)	71
1.16.4	Compton-Streuung	77
1.17	Elementare Plasmaphysik	81
1.17.1	Einfache Teilchenbewegungen im Magnetfeld	82
1.17.2	Gleichungssystem der MHD	84
1.17.3	Parker-Instabilität	86
1.17.4	Wellen in magnetischen Medien	88
1.17.5	Magnetische Bremsung	91
1.17.6	Dissipation von Magnetfeldern	95
1.17.7	Drehimpulsverlust durch magnetisierten Wind	96
1.17.8	MHD eines Sternwindes	97

Kapitel 1

Stellare Astrophysik

In diesem Kapitel werden in erster Linie Phänomene besprochen, in denen die Eigengravitation eine entscheidende Rolle spielt, also Sterne und Planeten, aber auch Kollapsströmungen und allgemeinere Gleichgewichtskonfigurationen.

1.1 Hydrostatische Konfigurationen

1.1.1 Stellare Zeitskalen

Beginnen wir mit der Definition eines *Sterns* als selbstgravitierende, selbstleuchtende Gasmasse, die sich einerseits im

- **mechanischen** (=hydrostatischen) Gleichgewicht befindet. Die Gravitation wird durch die Druckkräfte (Fliehkraft, Magnetfeld) kompensiert. Andererseits gilt für einen Stern ebenso, dass er sich im
- **thermischen** Gleichgewicht befindet. Die Abstrahlung an der Oberfläche entspricht der Energieproduktion im Inneren.

Eine solche Definition ist zweckmäßig und reicht für die weiteren Anwendungen aus. Allerdings strahlen Sterne Energie ins Weltall ab und ändern ihre chemische Zusammensetzung, sodass man in der Folge auch eine zeitliche Entwicklung mit folgenden Phänomenen in Betracht ziehen muss:

- Normale Hauptreihensterne entwickeln sich auf nuklearer Zeitskala und können verschiedene Brennphasen mit unterschiedlicher Energieproduktion durchlaufen.
- Die Variabilität der Helligkeit ist oftmals auf radiale und/oder nichtradiale Pulsationen zurückzuführen. Es gibt Schwingungen um die Gleichgewichtslage und es stellt sich die Frage nach der Ursache des Pulsationsmechanismus, der großräumige Bewegungen anregen kann.

- Sterne sind teilweise nicht im thermischen Gleichgewicht, d.h. Energieproduktion und Energieabgabe sind nicht im Gleichgewicht. Sterne während der Vorhauptreihenentwicklung oder Weiße Zwerge sind Beispiele dafür.
- Sterne entstehen und vergehen in dynamischen (hydrodynamischen) Phänomenen, z.B. Kollapsströmungen, Novae und Supernovae.

Als weiteren Ausgangspunkt für zahlreiche Vergleiche nimmt man die Parameter unserer Sonne:

$L_{\odot} =$	$3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$
$M_{\odot} =$	$1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
$R_{\odot} =$	$6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$
$T_{\text{eff}} =$	5800 K

Den Entwicklungsweg eines Sterns bestimmen im Wesentlichen drei Zeitskalen. Da sie die Komplexität der Sternaufbaugleichungen verringern können, sind sie von besonderer Bedeutung:

- a) Auf der *nuklearen Zeitskala* ändert sich die chemische Zusammensetzung des Sterns, wobei Masse M und Leuchtkraft L eingehen,

$$\tau_{\text{nuc}} \simeq \frac{1}{10} \frac{0.007 M c^2}{L}. \quad (1.1)$$

Der Faktor 0.007 kommt bei Wasserstoffbrennen aus dem Massendefekt zwischen den H-Atomen und dem resultierenden He-Kern, der Vorfaktor von 0.1 ist aus Sternentwicklungsrechnungen entnommen, da ungefähr 10% des Wasserstoffvorrates verbrannt werden, ehe ein Stern die Hauptreihe verlässt.

- b) Mit Hilfe der *thermischen oder Kelvin-Helmholtz Zeitskala* lassen sich die Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht charakterisieren. Es ist die Zeitskala, die ein Stern benötigt, um seine thermische Energie E_{therm} mit Hilfe der Leuchtkraft L in den Weltraum abzustrahlen,

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{E_{\text{therm}}}{L} \simeq \frac{GM^2}{LR}, \quad (1.2)$$

wobei die zweite Form der Gleichung mit Hilfe des Virialtheorems (siehe Abschnitt 1.11.2) umgeschrieben werden kann.

- c) Schließlich beschreibt die *mechanische Zeitskala* die Schall-Laufzeit durch den Stern mit Radius R

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{R}{c_s} \simeq \sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \quad (1.3)$$

Es ist die typische Einstellzeit des hydrostatischen Gleichgewichts und gilt auch als charakteristische Pulsationsperiode der radialen Fundamentalmode (siehe Abschnitt 1.8).

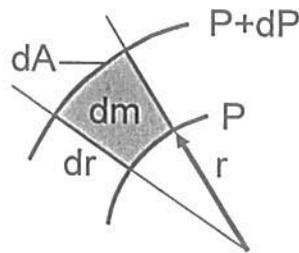


Abbildung 1.1: Hydrostatisches Gleichgewicht einer Kugelschale mit Dicke dr in sphärischer Symmetrie. Das Materieelement dm wird im Gleichgewicht zwischen Schwerkraft und Druckkraft gehalten.

Ohne auf mehr Einzelheiten eingehen zu können, ist zusammenfassend zu sagen, dass für alle Hauptreihensterne die obigen Zeitskalen sehr verschieden sind. Es gilt

$$\tau_{\text{nuc}} \gg \tau_{\text{KH}} \gg \tau_{\text{dyn}}. \quad (1.4)$$

1.1.2 Hydrostatisches Gleichgewicht

Unter der Annahme, dass sich Schwerkraft und Gesamtdruck P (vergl. Abb. 1.1) die Waage halten, können wir folgenden Ansatz für das Massenelement dm machen

$$dP dA = -g dm = -\rho g dr dA,$$

wobei g die Schwerebeschleunigung bezeichnet und für $dm = \rho dr dA$ gilt. Nach Kürzen von dA lässt sich die letzte Gleichung wie folgt umschreiben

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\rho g.} \quad (1.5)$$

Im weiteren wird die Schwerebeschleunigung g aus der Poissongleichung berechnet. Dazu führen wir die bis zum Radius r integrierte Masse ein

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'. \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \rho \quad \text{Kugel } (m = \rho V) \quad (1.6)$$

Die Poissongleichung für das Potential ψ verwenden wir in sphärischer Symmetrie, d.h.

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi G\rho. \quad (1.7) \quad !!!$$

Nach Multiplikation mit r^2 und Integration von Gleichung (1.7) erhält man unter Verwendung von (1.6)

$$r^2 \frac{d\psi}{dr} = \int_0^r 4\pi \rho G r^2 dr = Gm, \quad (1.8)$$

womit sich die Schwerebeschleunigung durch

$$g = \frac{Gm}{r^2} = \underbrace{\frac{4\pi r^3}{3} \cdot \rho}_m = G \cdot m \quad (1.9)$$

ergibt. Somit lässt sich das hydrostatische Gleichgewicht durch

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho m}{r^2} \quad (1.10)$$

schreiben.

Durch die Ableitung von Gleichung (1.6) wird der Zusammenhang zwischen integrierter Masse m und Radius r hergestellt,

$$\boxed{\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2} \quad (1.11)$$

Damit ist die Grundlage geschaffen, das hydrostatische Gleichgewicht (1.10) mit der integrierten Masse m als Koordinate umzuschreiben,

$$\frac{dP}{dm} = \frac{dP}{dr} \frac{dr}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (1.12)$$

Zusammenfassend ist zu sagen, dass die zwei Gleichungen (1.10) und (1.11) eine hydrostatische Kugel mit den Unbekannten $\rho(r)$, $P(r)$ und $m(r)$ festlegen. Als weitere Bedingung fehlt die *Zustandsgleichung*, die Druck und Dichte in Beziehung setzt

$$P = P(\rho, T) \quad (1.13)$$

Der Zustand des Gases ist auch durch seine Temperatur T charakterisiert, was wiederum zu einem unterbestimmten Gleichungssystem führt. Im Sternaufbau muss dazu die thermische Struktur des Sterns mitbestimmt werden. Ohne darauf näher eingehen zu können, wenden wir uns in den folgenden Kapiteln den Fällen zu, in denen die Zustandsgleichung durch $P = P(\rho)$ vereinfacht wird.

1.1.3 Mittlerer Druck und Gravitationsenergie

Unter Zuhilfenahme des hydrostatischen Gleichgewichts lassen sich nun verschiedene Größen bestimmen. Durch Multiplikation von $4\pi r^3$ mit Gleichung (1.10) erhält man

$$4\pi r^3 \frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G\rho m r^3}{r^2}, \quad (1.14)$$

und daraus wird nach partieller Integration

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = [P(r)4\pi r^3] \Big|_0^R - 3 \int_0^R P(r)4\pi r^2 dr = - \int_0^R \frac{4\pi Gm\rho r^2}{r} dr. \quad (1.15)$$

Der erste Term über den Druck ist gleich null, wenn man den Außendruck $P(R)$ vernachlässigen kann. Mit Gleichung (1.11) lässt sich der rechte Ausdruck als die Gravitationsenergie darstellen,

$$E_{\text{grav}} = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = -3 \int_0^R P(r)4\pi r^2 dr. \quad (1.16)$$

Definiert man den mittleren Druck \bar{P} als

$$\int_0^R P(r) 4\pi r^2 dr = \bar{P} \int_0^R 4\pi r^2 dr = \bar{P} V, \quad (1.17)$$

erhält man daraus folgende Beziehung zwischen mittlerem Druck und Gravitationsenergie

$$\bar{P} = -\frac{1}{3} \frac{E_{\text{grav}}}{V}. \quad (1.18)$$

1.2 Planeten

Als einfache Anwendung der Hydrostatik betrachten wir einen Planeten, der als ein großer Festkörper, einem Metall ähnlich, beschrieben wird. Die Kompressibilität des Materials bzw. deren Inverses, der *Elastizitätsmodul* ist durch

$$K = \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad (1.19)$$

definiert, wobei K die Dimension eines Drucks hat und in der Größenordnung von etwa $K \simeq 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ liegt. Eingesetzt in das hydrostatische Gleichgewicht (1.10) liefert diese Beziehung

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{K}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}$$

oder schließlich

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{Gm\rho^2}{Kr^2}. \quad (1.20)$$

Um konkrete Modelle ausrechnen zu können, ist es nötig den Elastizitätsmodul festzulegen. Aufgrund empirischer Daten wird eine Entwicklung im Druck P nahegelegt, d.h.

$$K = K_0 + B P + C P^2 + D P^3 + \dots \quad (1.21)$$

Im Weiteren bleiben wir aber bei einem konstanten Wert bzw. einer linearen Funktion für K .

1.2.1 Konstante Elastizität

Da die Elastizität für manche Fälle druckunabhängig angenommen werden kann, folgt aus Gleichung (1.19) unmittelbar

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{K_0} dP, \quad (1.22)$$

die sich mit der Randbedingung $\rho_0 = \rho(P_0)$ zu

$$\rho(P) = \rho_0 \exp\left(\frac{P - P_0}{K_0}\right) \quad (1.23)$$

integrieren lässt. Da die Relation (1.22) nur für kleine Druckunterschiede gilt, ist eine Entwicklung der Exponentialfunktion zulässig, d.h.

$$\rho(P) = \rho_0 \left(1 + \frac{P - P_0}{K_0} + \frac{1}{2} \frac{(P - P_0)^2}{K_0^2} + \frac{1}{6} \frac{(P - P_0)^3}{K_0^3} + \dots \right).$$

1.2.2 Lineare Elastizität

Für die meisten Anwendungen ist es ausreichend einen linearen Ansatz zu verwenden, d.h.

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{K_0 + BP}. \quad (1.24)$$

Auch diese Gleichung erlaubt eine elementare Integration mit der Randbedingung $\rho_0 = \rho(P_0)$ und führt zu

$$P = \frac{K_0}{B} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^B - 1 \right] + P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^B \quad (1.25)$$

bzw. zu einem Ausdruck für die Dichte

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{K_0 + BP}{K_0 + BP_0} \right)^{1/B}. \quad (1.26)$$

Da für zahlreiche Anwendungen der Druck am Aussenrand P_0 sehr klein verglichen mit dem Druck im Planeteninneren ist ($P_0 \ll P$), können wir in Gleichung (1.25) bzw. (1.26) den entsprechenden Term vernachlässigen und man erhält

$$P = \frac{K_0}{B} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^B - 1 \right] \quad (1.27)$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{BP}{K_0} \right)^{1/B}. \quad (1.28)$$

Diese Form der Zustandsgleichung wurde zum ersten Mal von Murnaghan (1944) für Planeten angewendet.

Die Lösung (1.25) lässt sich in der Form

$$P = \left(\frac{K_0}{B} + P_0 \right) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - \frac{K_0}{B} = K\rho^\gamma + D \quad (1.29)$$

schreiben. Als Vorgriff auf das kommende Kapitel (siehe Abschnitt 1.3) ist zu bemerken, dass diese Zustandsgleichung (1.29) die Form einer sogenannten Polytrope hat (abgesehen von der zusätzlichen Konstanten D). Damit gelten alle Ableitungen zu Polytropen auch für terrestrische Planeten mit

$$B = 1 + \frac{1}{n}, \quad \text{mit } 3 \leq B \leq 5. \quad (1.30)$$

1.3 Polytropen

1.3.1 Lane-Emden-Gleichung

Unter einer Polytrope versteht man eine einfache Zustandsgleichung in der Form

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (1.31)$$

wobei n den Polytropenindex bezeichnet. Klarerweise gilt für den Adiabatenindex $\gamma = 1 + 1/n$. Setzt man diese Relation in das hydrostatische Gleichgewicht (1.5) ein,

$$-\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho} K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} = \frac{K\gamma}{\gamma-1} \frac{d\rho^{\gamma-1}}{dr} \quad (1.32)$$

ergibt sich daraus die Möglichkeit einer direkten Integration, die zu

$$-\psi = \frac{\gamma}{\gamma-1} K\rho^{\gamma-1} \quad (1.33)$$

führt, wobei die Integrationskonstante durch $\psi = 0$ für $\rho = 0$ verschwindet. Aus (1.33) folgt für die Dichte

$$\rho = \left[-\frac{\psi}{(n+1)K} \right]^n. \quad (1.34)$$

Man beachte, dass eine identische Relation abgeleitet wird, wenn als Zustandsgleichung (1.31) die Gleichung für planetares Material (1.29) zur Anwendung kommt.

Eingesetzt in die Poissongleichung (1.7) liefert dies

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi G \left[-\frac{\psi}{(n+1)K} \right]^n. \quad (1.35)$$

Diese Gleichung lässt sich durch dimensionslose Variablen

$$\psi = \psi_c \theta(z), \quad z = A(-\psi_c)^{(n-1)/2} r, \quad \text{mit} \quad A^2 = \frac{4\pi G}{[(n+1)K]^n} \quad (1.36)$$

einfacher aufschreiben, woraus sich nach Substitution in (1.35) die sogenannte *Lane-Emden-Gleichung* ergibt

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\theta}{dz} \right) + \theta^n = 0. \quad (1.37)$$

Die Randbedingungen sind durch $\theta(0) = 1$ und $\theta'(0) = 0$ gegeben, da $\rho = \rho_c \theta^n$ gilt und das Potential am Innenrand regulär bleiben soll. Der äußere Rand wird bei $\rho = 0$ erreicht, d.h. die erste Nullstelle der Funktion $\theta(z)$ wird mit z_n bezeichnet. Die Lösungen der Lane-Emden-Gleichung sind in Abbildung 1.2 dargestellt.

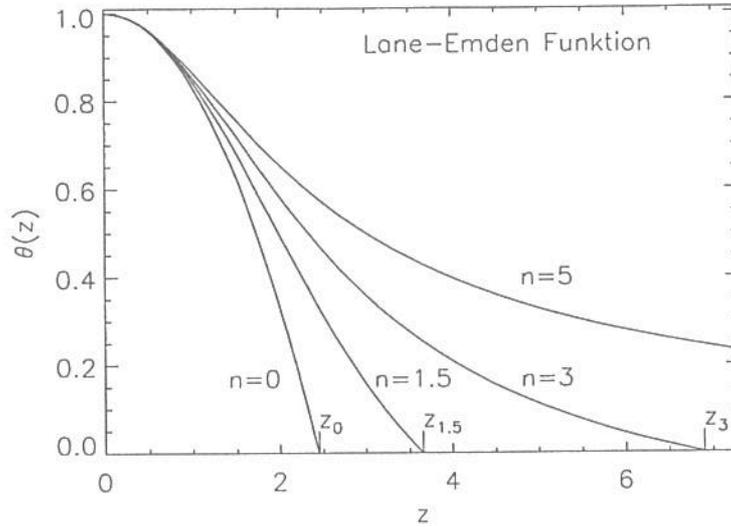


Abbildung 1.2: Lösungen $\theta(z)$ der Lane-Emden-Gleichung mit zugehörigen Nullstellen z_n für verschiedene Polytropenindizes n . Die Werte $n \geq 5$ führen zu keinen physikalischen Lösungen.

1.3.2 Eigenschaften der Lane-Emden-Lösungen

Aufgrund der obigen Definitionen und der Beziehung (1.34) gilt für alle Polytropen

$$\rho_c = \left[-\frac{\psi_c}{(n+1)K} \right]^n, \quad P = P_c \theta^{n+1} \quad \text{mit} \quad P_c = \left[-\frac{\psi_c}{(n+1)K} \right]^{n+1}. \quad (1.38)$$

Die Masse einer Polytrope ergibt sich aus der Integration von Gleichung (1.11), da r^3/z^3 aufgrund von (1.36) konstant ist, und somit vor das Integral geschrieben werden kann,

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho_c \theta^n dr = 4\pi \rho_c \frac{r^3}{z^3} \int_0^z z^2 \theta^n dz = -4\pi \rho_c \frac{r^3}{z^3} \int_0^z \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\theta}{dz} \right) dz. \quad (1.39)$$

Der Integrand ist die negative linke Seite der Lane-Emden-Gleichung (1.37), d.h. das Integral lässt sich direkt auswerten

$$m(r) = 4\pi \rho_c r^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} \right). \quad (1.40)$$

Die Gesamtmasse M ist demnach dieser Ausdruck am Radius R , also der entsprechenden Nullstelle z_n ,

$$M = 4\pi \rho_c R^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} \right)_{z=z_n}, \quad (1.41)$$

wenn z_n die Nullstelle der Polytrope mit Index n bezeichnet. In Abbildung 1.2 sind diese Nullstellen für Werte $n = 0, 1.5, 3$ deutlich hervorgehoben. Es ist zu beachten,

n	z_n	$\rho_c/\bar{\rho}$
0	2.44949	1.0
1	3.14159	3.28987
1.5	3.65375	5.99071
2	4.35287	11.40254
3	6.89685	54.1825
5	∞	∞

Tabelle 1.1: Nullstellen und Dichteverhältnisse für einige Polytropenindizes

dass sowohl die Nullstellen als auch der Klammerterm ohne Details des Sternmodells berechnet werden können. Mit Hilfe der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ findet man

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad \frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = \left(-\frac{3}{z} \frac{d\theta}{dz} \right)_{z=z_n}. \quad (1.42)$$

In Tabelle (1.3.2) sind die Werte der Nullstellen z_n sowie das Dichteverhältnis (1.42) zusammengefasst.

Ohne Ableitung wird noch hinzugefügt, dass für drei Werte des Polytropenindex n geschlossene Lösungen existieren

$$n = 0: \quad \theta_0(z) = 1 - \frac{1}{6}z^2 \quad (1.43)$$

$$n = 1: \quad \theta_1(z) = \frac{\sin z}{z} \quad (1.44)$$

$$n = 5: \quad \theta_5(z) = \left(1 + \frac{1}{3}z^2 \right)^{-1/2}. \quad (1.45)$$

Daraus wird deutlich, dass für Werte $n \geq 5$ kein endlicher Rand vorhanden ist.

1.4 Weiße Zwerge

Die Theorie der Polytropen hat den Nachteil, dass die Konstante K in der Zustandsgleichung $P = K\rho^\gamma$ unbestimmt bleibt. Eine wichtige Anwendung ergibt sich jedoch aus dem Grenzfall, in dem ein Stern durch den Druck der entarteten Elektronen stabilisiert wird. Die Zustandsgleichung hat die Form $P = P(\rho)$ und die Konstante K folgt explizit aus der Teilchenstatistik für ein Fermi-Gas. Derartige Objekte heißen Weiße Zwerge und sind der Endzustand von sonnenähnlichen Sternen. Historisch gesehen ist Sirius B der erste entdeckte Weiße Zwerg. Der Name wurde von A. Eddington eingeführt, der auch zeigte, dass aufgrund der Allgemeinen Relativitätstheorie die stellaren Spektrallinien eine gravitative Rotverschiebung von

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{GM}{Rc^2} \quad \text{oder} \quad v = 0.6362 \frac{M/M_\odot}{R/R_\odot} \text{ km s}^{-1} \quad (1.46)$$

aufweisen müssen.

	Masse [M_\odot]	Radius [R_\odot]	T_{eff} [K]	Δv [km/s]
Sirius B	0.978 ± 0.002	0.00864 ± 0.00012	25200	80.42 ± 4.83
40 Eri B	0.501 ± 0.011	0.0136 ± 0.00024	16900	23.3 ± 0.6
Stein 2051	0.50 ± 0.05	0.0115 ± 0.0012		

Tabelle 1.2: Beobachtete Parameter der genannten Weißen Zwerge (Sirius B: Barstow et al. 2005, 40 Eri B: Shipman et al. 1997)

1.4.1 Historisches und Beobachtungen

- **1783:** W.H. Herschel beobachtet das Doppelstern-System *40 Eridani B* und findet damit den 1. Weißen Zwerg, ohne ihn als neue Klasse von Objekten zu erkennen.
- **1834:** F. Bessel schließt aus Eigenbewegungen, dass Sirius einen unsichtbaren Begleiter hat.
- **1862:** A. Clark findet *Sirius B* am vorausberechneten Ort, $M \simeq 1 M_\odot$ und $L \simeq 1/400 L_\odot$ aus Parallaxen-Beobachtungen.
- **1925:** W. Adams bestimmt des Spektraltyps zu F mit $T_{\text{eff}} \simeq 8000$ K und $R \simeq R_\odot/55$, woraus sich eine mittlere Dichte von $\bar{\rho} = 6.1 \cdot 10^7$ kg/m³ ergibt.
- **1926:** R.H. Fowler zeigt, dass Ionisation auch bei $T \rightarrow 0$ erfolgt und dass nach dem Pauli-Prinzip ein Elektronengas durch eine Fermi-Dirac-Statistik beschrieben wird.
- **1931:** S. Chandrasekhar legt seine Berechnungen zu Polytropenmodellen mit relativistisch entartetem Elektronengas vor und zeigt damit die Existenz einer Grenzmasse, der heute sog. *Chandrasekhar'schen Grenzmasse*.

1.4.2 Zustandsgleichung für entartetes Elektronengas

Ohne hier die Ableitung zu geben (siehe z.B. Weigert & Kippenhahn 1980), lässt sich die Zustandsgleichung für ein nicht-relativistisches, aber vollständig entartetes Elektronengas mit der Elektronendichte n_e berechnen

$$P_{\text{e,n.r.}} = \left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{1}{5m_e} \left(\frac{\rho}{\mu_e m_p}\right)^{5/3} = K_1 \rho^{5/3}, \quad (1.47)$$

wobei das sog. mittlere Molekulargewicht der Elektronen μ_e auftaucht. Die gravitativ wirkende Massendichte ρ wird dazu über

$$\rho = \mu_e m_p n_e \quad (1.48)$$

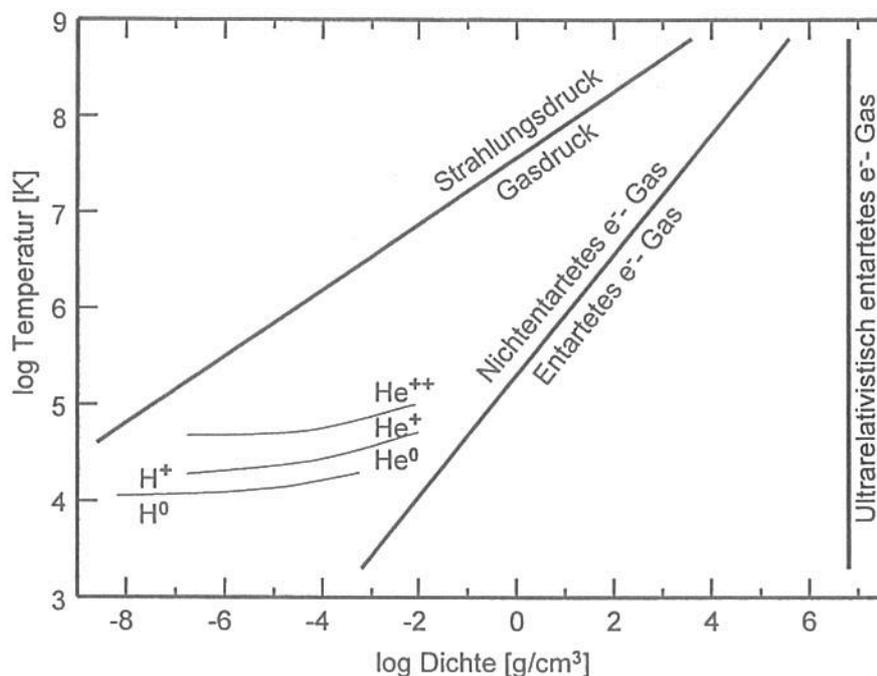


Abbildung 1.3: Die Übergangsregionen in der Zustandsgleichung eines Sterns zeigen welche physikalischen Effekte den Druck dominieren. Die dünnen Linien zwischen 10^4 und 10^5 K zeigen die Ionisation von Wasserstoff und Helium.

umgeschrieben. μ_e gibt das Inverse der Anzahl der Elektronen pro Nukleon an, also für ein reines Wasserstoff-Plasma gilt $\mu_e = 1$, für ein reines Helium-Plasma beispielsweise $\mu_e = 2$. Ebenso findet man $\mu_e = 2$ für einen typischen Weißen Zwerg, der im wesentlichen aus einem Gemisch von Kohlenstoff und Sauerstoff aufgebaut ist.

Der andere explizit darstellbare Grenzfall ist das extrem relativistische entartete Elektronengas (rechtster Bereich in Abb. 1.3), für welches

$$P_{e,e.r.} = \left(\frac{3h^3}{8\pi m_p} \right)^{1/3} \frac{c}{4m_p} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} = K_2 \rho^{4/3} \quad (1.49)$$

gültig ist. Beide Zustandsgleichungen sind im Falle vollständiger Entartung von der Temperatur T unabhängig.

Das Übergangsgebiet zwischen entarteten Elektronen und idealem Gas können wir einfach abschätzen, in dem wir den jeweiligen Elektronendruck gleichsetzen,

$$P_e = P_{e,n.r.} \quad \text{oder} \quad \frac{k\rho T}{\mu_e m_p} = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}, \quad (1.50)$$

woraus sich der Ausdruck

$$\frac{\rho}{\mu_e} = \left(\frac{k}{m_p K_1} \right)^{3/2} T^{3/2} = 2.4 \cdot 10^{-5} T^{3/2} \text{ [kg m}^{-3}\text{]} \quad (1.51)$$

ergibt. Dieser Übergang zwischen nichtentartetem und entartetem Elektronengas ist ebenfalls in Abb. 1.3 als Linie eingezeichnet.

1.4.3 Chandrasekhar'sche Grenzmasse

Betrachtet man nun die entsprechende Polytrope mit $n = 3$ oder $\gamma = 4/3$, so folgt für die Gesamtmasse aus Gleichung (1.41)

$$M = 4\pi\rho_c R^3 \left(-\frac{1}{z} \frac{d\theta}{dz} \right)_{z=z_3}, \quad (1.52)$$

und der Wert des z -Terms kommt aus Tabelle 1.3.2. Zur weiteren Berechnung benötigen wir die Beziehung aus den dimensionslosen Variablen (1.36)

$$K^n = \frac{4\pi G}{(n+1)^n A^2} = \frac{4\pi G}{(n+1)^n} (-\psi_c)^{n-1} \frac{r^2}{z^2} \quad (1.53)$$

beziehungsweise die Relation

$$(-\psi_c)^n = \rho_c [K(n+1)]^n, \quad (1.54)$$

die aus Gleichung (1.38) folgt. Damit gilt für die Polytropen Konstante

$$K = \frac{4\pi G}{n+1} \rho_c^{(n-1)/n} \frac{r^2}{z^2} = \pi G \rho_c^{2/3} \frac{r^2}{z^2} \quad \text{mit} \quad n = 3. \quad (1.55)$$

Insbesondere muss diese letzte Gleichung am Rand des Sterns bei $r = R$ und $z = z_3$ gelten, um daraus die zentrale Dichte ρ_c zu bestimmen

$$\rho_c = \left(\frac{K}{\pi G} z_3^2 \right)^{3/2} R^{-3}. \quad (1.56)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Masse der Polytrope (1.52) mit $n = 3$ ein, ergibt sich eine vom Radius unabhängige Masse

$$M = 4\pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} \left(-z^2 \frac{d\theta}{dz} \right)_{z=z_3} \quad (1.57)$$

Für den Grenzfall, dass der gesamte Stern durch den Druck extrem relativistischer Elektronen gehalten wird, ergibt sich nach Einsetzen der Naturkonstanten in (1.49) mit $K = K_2$ die *Chandrasekhar'sche Grenzmasse*

$$M_{\text{ch}} = \frac{5.836}{\mu_e^2} M_\odot = 1.44 M_\odot \quad \text{für} \quad \mu_e = 2. \quad (1.58)$$

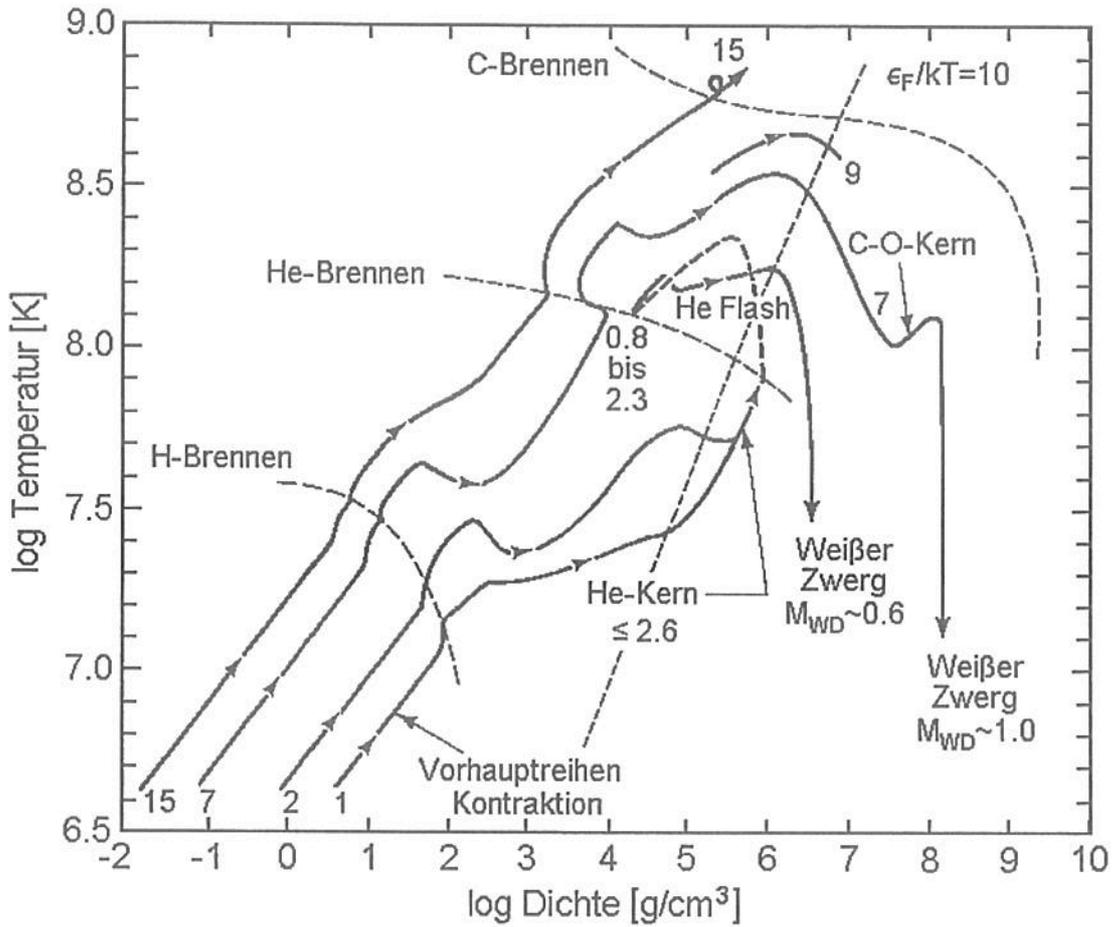


Abbildung 1.4: Die Entwicklung des Sternzentrums in Temperatur und Dichte für verschiedene Sternmassen verdeutlicht die Entstehung von Weißen Zwergen für massearme Sterne mit $M \leq 8 M_{\odot}$. Die verschiedenen Brennpasen sind als gestrichelte Linien eingezeichnet, ebenso wie der Übergang zwischen entartetem und nichtentartetem Elektronengas (nach Iben 1991, ApJ. Suppl. 76, 55).

1.4.4 Entwicklung zum Weißen Zwerg

Wir stellen hier die Frage, wie die Kernregion eines massearmen Sterns auf kleine Änderungen reagiert. Dazu bringen wir eine kleine Störung x an den Gleichgewichtsradius r an, d.h.

$$r \rightarrow r(1+x) \quad \text{mit} \quad |x| \ll r \quad \text{und} \quad x \neq x(m). \quad (1.59)$$

Die Störung x soll demnach nicht von der integrierten Masse m abhängen, also eine Lagrange'sche Störung sein. Eingesetzt in die Gleichung der integrierten Masse (1.11)

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 \rightarrow \frac{dm}{(1+x)dr} = 4\pi r^2(1+x)^2(\rho + \delta\rho), \quad (1.60)$$

und Multiplikation und Linearisierung liefert dazu die Dichteänderung

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -3x. \quad (1.61)$$

Dieselbe Vorhansweise beim hydrostatischen Gleichgewicht (1.12), geschrieben in der integrierten Masse m ,

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \rightarrow \frac{dP}{dm} \left(1 + \frac{\delta P}{P}\right) = -\frac{Gm}{4\pi r^4(1+x)^4}, \quad (1.62)$$

woraus durch Linearisierung der Term

$$\frac{\delta P}{P} = -4x \quad (1.63)$$

hervorgeht.

Weiters benötigen wir eine Zustandsgleichung, die wir allgemein in der Form

$$\rho = CP^{\hat{\alpha}}T^{-\hat{\delta}}, \quad (1.64)$$

ansetzen. Für ein ideales Gas gilt dann $\hat{\alpha} = \hat{\delta} = 1$. Für kleine Änderungen ist z.B. eine Binomialreihenentwicklung durchführbar

$$\begin{aligned} (\rho + \delta\rho) &= C(P + \delta P)^{\hat{\alpha}}(T + \delta T)^{-\hat{\delta}} & (1.65) \\ 1 + \frac{\delta\rho}{\rho} &= \left[1 + \frac{\delta P}{P}\right]^{\hat{\alpha}} \left[1 + \frac{\delta T}{T}\right]^{-\hat{\delta}} \\ &= \left[1 + \hat{\alpha}\frac{\delta P}{P} + \binom{\hat{\alpha}}{2}\left(\frac{\delta P}{P}\right)^2 + \dots\right] \left[1 - \hat{\delta}\frac{\delta T}{T} + \binom{-\hat{\delta}}{2}\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2 + \dots\right]. \end{aligned}$$

Die Linearisierung liefert schließlich eine differentielle Zustandsgleichung der Form

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \hat{\alpha}\frac{\delta P}{P} - \hat{\delta}\frac{\delta T}{T}. \quad (1.66)$$

Die Substitution von (1.61) und (1.63) führt auf

$$\frac{\rho}{\delta\rho} \frac{\delta T}{T} = \frac{4\hat{\alpha} - 3}{3\hat{\delta}} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} = \frac{4\hat{\alpha} - 3}{3\hat{\delta}}. \quad (1.67)$$

Für ein ideales Gas ergibt Gleichung (1.67) mit $\hat{\alpha} = \hat{\delta} = 1$ eine Steigung von $1/3$, so dass sich das Sternzentrum unweigerlich in das Gebiet der entarteten Materie bewegt, wie in Abbildung 1.3 dargestellt. Dann entwickelt sich die Zustandsgleichung der entarteten Elektronen zu $\gamma = 5/3$ mit $\hat{\alpha} = 3/5$ und $\hat{\delta} \simeq 0$, so dass (1.67) stark negativ wird, d.h. bei einem weiteren Dichteanstieg sinkt die Zentraltemperatur und die Entartung nimmt zu. Erst im ultrarelativistischen Fall wird $\gamma = 4/3$ und damit $\hat{\alpha} = 3/4$, so dass sich das Zentrum nach (1.67) mit der Ableitung gleich Null stabilisiert.

Der stellare Entwicklungsverlauf ausgehend von numerischen Rechnungen ist für verschiedene Sternmassen in Abbildung 1.4 zusammengefasst und zeigt im Wesentlichen den schematischen Zusammenhang von Abb. 1.3. Dabei ist die Entstehung von Weißen Zwergen im unteren Massenbereich unvermeidbar.

1.4.5 Oberfläche von Weißen Zwergen

Ausgangspunkt bildet die Strahlungstransport-Gleichung (1.315) für ein optisch dickes Medium, die in Abschnitt 1.14.2 abgeleitet wird

$$L = -\frac{16\pi a_{\text{R}} c}{3\rho\kappa_{\text{R}}} r^2 T^3 \frac{dT}{dr}.$$

Der Temperaturgradient wird

$$\frac{dT}{dr} = \frac{3\rho\kappa_{\text{R}} L}{16\pi a_{\text{R}} c r^2 T^3} \quad (1.68)$$

in der Atmosphäre durch Photoionisation und Bremsstrahlung, d.h. gebunden-frei und frei-frei Übergänge dominiert, so dass man die Opazität durch die sog. *Kramers-Opazität* approximieren kann

$$\kappa_{\text{R}} = \kappa_0 \rho T^{-3.5}. \quad (1.69)$$

Umgeformt liefert der Druckgradient

$$\frac{dP}{dT} = \frac{dP}{dr} \frac{dr}{dT} = \frac{16\pi a_{\text{R}} c G m T^{6.5}}{3\kappa_0 \rho L}. \quad (1.70)$$

Da die Massenänderung in der Atmosphäre vernachlässigbar ist, kann die integrierte Masse m durch die Gesamtmasse M und der Druck durch die ideale Gasgleichung ersetzt werden

$$\frac{dP}{dT} = \frac{16\pi a_{\text{R}} c G M T^{6.5}}{3\kappa_0 L} \frac{kT}{\mu m_{\text{p}} P}. \quad (1.71)$$

Eine einfache Integration mit den Randbedingung $P = 0$ für $T = 0$ liefert die Dichtestruktur

$$\rho = \left(\frac{32\pi a_R c G M \mu m_p}{25.5 \kappa_0 k \rho L} \right)^{1/2} T^{3.25}. \quad (1.72)$$

Nach Schwarzschild (1958, p. 237) approximiert sich κ_0 als

$$\kappa_0 = 4.34 \cdot 10^{23} Z(1+X) \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}. \quad (1.73)$$

Die Dicke der Atmosphäre lässt sich dadurch abschätzen, dass der Gasdruck dem Entartungsdruck der Elektronen vergleichbar wird, d.h. wir verwenden die Dichte ρ_* mit der Temperatur T_* aus Gleichung (1.51)

$$\rho_* = \left(\frac{k}{m_p K_1} \right)^{3/2} T_*^{3/2} = 2.4 \cdot 10^{-5} \mu_e T_*^{3/2} [\text{kg m}^{-3}]. \quad (1.74)$$

Einsetzen der letzten beiden Gleichungen liefert einen Ausdruck für die Leuchtkraft

$$L = 5.7 \cdot 10^{-2} \frac{\mu}{\mu_e^2} \frac{1}{Z(1+X)} \frac{M}{M_\odot} T_*^{3.5} [\text{W}] = C M T_*^{7/2}. \quad (1.75)$$

Mit typischen Werten einer chemischen Zusammensetzung von $X = 0$, $Y = 0.9$, $Z = 0.1$, einer Masse $M = 1 M_\odot$ sowie $\mu = 1.4$ und $\mu_e = 2$ folgt

$$L = 0.2 T_*^{3.5} [\text{W}], \quad (1.76)$$

d.h. Leuchtkräfte zwischen $L = 10^{-2} \dots 10^{-5} L_\odot$ führen auf Temperaturen $T_* \simeq 10^6 \dots 10^7 \text{ K}$ und typische Dichten von $\rho_* \simeq 10^6 \text{ kg m}^{-3}$.

1.4.6 Kühlung von Weißen Zwergen

Da Weiße Zwerge keine Energieproduktion haben, müssen sie im Laufe der Zeit auskühlen, d.h. die thermische Energie

$$E_{\text{therm}} = \int_M c_V T dm$$

der Ionenkomponente nimmt ab und die extrem hohe Wärmeleitung garantiert eine konstante Temperatur durch den Stern. Diese thermische Energie ist abschätzbar, wenn wir für die spezifische Wärme/Nukleon $c_V = \frac{3}{2} k$ setzen,

$$E_{\text{therm}} = \frac{3}{2} k T \frac{M}{A m_p}, \quad (1.77)$$

und M die Masse bzw. A das Atomgewicht bezeichnet. Die Kühlrate ist durch

$$L = - \frac{dE_{\text{therm}}}{dt} \quad (1.78)$$

gegeben und mit Hilfe von (1.75) können wir schreiben

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} kT \frac{M}{Am_p} \right) = CMT^{7/2}. \quad (1.79)$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit der Randbedingung $T(t_0) = T_0$ direkt zu

$$\frac{3}{5} \frac{k}{Am_p} \left(T^{-5/2} - T_0^{-5/2} \right) = C(t - t_0) \quad (1.80)$$

integrieren. Definieren wir die Zeitspanne $\tau = t - t_0$ und nehmen $T_0 \gg T$ an, so folgt unmittelbar mit der rechten Seite von (1.79) und durch weiteres Verwenden der obigen Relationen

$$\tau = \frac{5}{3} \frac{kTM}{Am_p L} \propto \left(\frac{L}{M} \right)^{-5/7}. \quad (1.81)$$

Typische Werte von $M = 1 M_\odot$ und $L \simeq 10^{-3} L_\odot$ liefern $\tau \simeq 10^9$ Jahre, einen Wert der für die Beobachtungen zumindest um einen Faktor 10 zu lange ausfällt.

Der wichtigste Effekt ist die Kristallisation an der Oberfläche, da bei Temperaturen kleiner als die sog. *Debye-Temperatur* c_V abnimmt, d.h. die spezifische Wärme $c_V \sim T^3$ sinkt durch Gitterschwingungen sehr stark. Dadurch verkürzt sich die Kühlzeit wesentlich.

1.5 Bonnor-Ebert-Sphären

1.5.1 Isotherme Kugeln

Wir betrachten eine isotherme Gaskugel und schreiben daher den Druck als

$$P = K\rho = \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \rho. \quad (1.82)$$

Mit Hilfe des hydrostatischen Gleichgewichts (1.5)

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = K \frac{d\rho}{dr} = -\rho \frac{d\psi}{dr} \quad (1.83)$$

folgt eine Differentialgleichung für die Dichte

$$\frac{d \ln \rho}{dr} = -\frac{1}{K} \frac{d\psi}{dr},$$

die sich aufgrund der Konstanz von K direkt integrieren lässt. Eine isotherme Dichteverteilung ist mit dem Potential ψ durch

$$\rho = \rho_c \exp(-\psi/K) = \rho_c \exp(-\Phi), \quad \text{mit } \Phi = \psi/K \quad (1.84)$$

verbunden. Dabei haben wir als Randbedingung am Innenrand $\psi = 0$ mit $\rho = \rho_c$ gesetzt. Um diese Beziehung in eine Radiusrelation umrechnen zu können, muss die Poissongleichung (1.7) gelöst werden.

Das Potential ψ ist in sphärischer Symmetrie durch

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi G \rho$$

mit der Massenverteilung verbunden. Aus dem hydrostatischen Gleichgewicht und der Isothermie-Bedingung in der Form (1.83) wird daraus eine isotherme Version der Lane-Emden-Gleichung

$$\frac{K}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho.$$

Setzen wir darin sowohl unsere Lösung (1.84) und den dimensionslosen Radius

$$r = a\xi = \left[\frac{K}{4\pi G \rho_c} \right]^{1/2} \xi \quad (1.85)$$

ein, so bestimmt sich das isotherme Analogon zur Lane-Emden-Gleichung (1.37) zu

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = e^{-\Phi} \quad (1.86)$$

mit den Randbedingungen am Innenrand

$$\xi = 0: \quad \Phi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\Phi}{d\xi} = 0. \quad (1.87)$$

Eine im Weiteren gut geeignete Form der isothermen Lane-Emden-Gleichung (1.86) ergibt sich durch die Einführung der Größe

$$\eta = \exp(-\Phi) \quad \text{und} \quad \rho = \rho_c \eta \quad (1.88)$$

(vergl. dazu 1.84). In diesem Fall transformiert sich die Lane-Emden Gleichung auf die Form

$$\eta'' + \frac{2\eta'}{\xi} - \frac{(\eta')^2}{\eta} + \eta^2 = 0, \quad (1.89)$$

wobei ' die Ableitung nach ξ bezeichnet. Die entsprechenden Randbedingungen lauten dann $\eta(0) = 1$ und $\eta'(0) = 0$.

Die isotherme Lane-Emden Gleichung hat keine geschlossene analytische Lösung und der Verlauf der Funktion $\eta(\xi)$ ist in Abbildung 1.5 dargestellt. Es ist aus der Gleichung bzw. aus (1.84) ersichtlich, dass die Lösungen unendlich ausgedehnten Konfigurationen entsprechen. Um daraus eine physikalische Lösung zu konstruieren, müssen wir die Dichteverteilung bei einem endlichen Radius abschneiden und über diesen Rand Druckgleichgewicht zwischen der isothermen Wolke und dem interstellaren Medium voraussetzen.

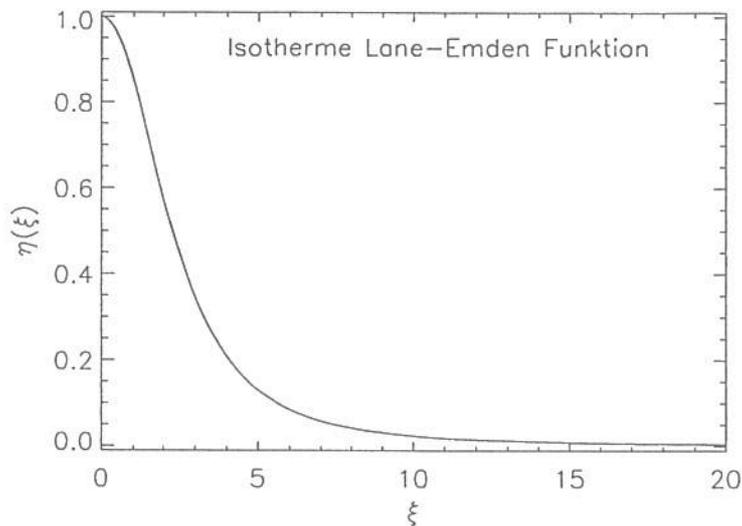


Abbildung 1.5: Lösung $\eta(\xi)$ der isothermen Lane-Emden-Gleichung. Da die mathematische Lösung keinen Rand hat, muss man eine physikalische Lösung bei einem Radius abschneiden und in ein Medium mit entsprechendem Außendruck einbetten.

1.5.2 Einfluss des Außendrucks

Um eine Einbettung in ein Medium mit konstantem Außendruck P_0 vorzunehmen, ist es notwendig, die globalen Eigenschaften der Lösung mit den Randwerten zu verbinden. Dazu verwendet man den Gauß'schen Satz angewendet auf eine Funktion F in einem Volumen V mit der Oberfläche O

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_O \mathbf{F} \cdot d\mathbf{f}. \quad (1.90)$$

Die Anwendung auf die Poissongleichung in sphärischer Symmetrie (1.7) liefert dann

$$\begin{aligned} \int_V \Delta \psi dV &= \int_V \nabla \cdot (\nabla \psi) dV = \int_O \nabla \psi \cdot d\mathbf{f} \\ &= \int_V 4\pi G \rho dV = 4\pi G \int_V \rho dV = 4\pi G M_0, \end{aligned}$$

wodurch die Masse M_0 , die sich innerhalb des Radius R_0 befindet, definiert ist. Die Lösung der Lane-Emden-Gleichung (siehe Abbildung 1.5) wird demnach bei einem Radius R_0 abgeschnitten. Da sich das Oberflächenintegral leicht berechnen lässt, d.h. Oberfläche mal Gradient an dieser Fläche, findet man aus der obigen Gleichung

$$M_0 = \frac{R_0^2}{G} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)_{r=R_0}. \quad (1.91)$$

Mit Hilfe der hydrostatischen Beziehung (1.5) sowie den Relationen (1.88) und (1.85) erhalten wir

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{K}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{K}{a\eta} \frac{d\eta}{d\xi},$$

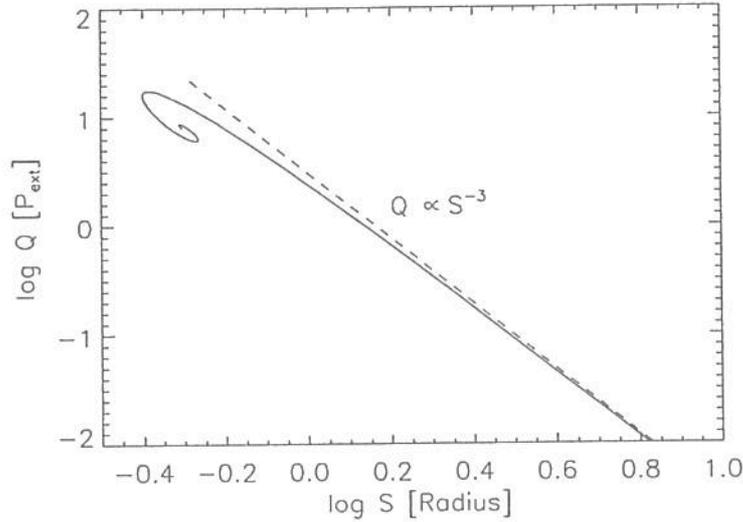


Abbildung 1.6: Der dimensionslose Außendruck Q als Funktion des dimensionslosen Radius S zeigt einen singulären Punkt.

was eingesetzt in Gleichung (1.91)

$$M_0 = -\frac{K R_0^2}{aG} \left(\frac{d \ln \eta}{d \xi} \right)_{\xi=\xi_0} \quad (1.92)$$

ergibt. Verwendet man noch den dimensionslosen Radius ξ aus Gleichung (1.85), so findet sich mit $R_0 = a\xi_0$ eine kompaktere Form der letzten Gleichung

$$M_0 = -\frac{aK}{G} \left(\xi \frac{d \ln \eta}{d \ln \xi} \right)_{\xi=\xi_0} \quad (1.93)$$

Quadrieren der letzten Gleichung sowie die Einbeziehung der Definition von a aus Gleichung (1.85) ermöglichen eine Beziehung zwischen der zentralen Dichte ρ_c und den Werten am Rand bei ξ_0

$$\rho_c = \frac{K^3}{4\pi G^3 M_0^2} \left(\xi \frac{d \ln \eta}{d \ln \xi} \right)_{\xi=\xi_0}^2 \quad (1.94)$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen zusammenfassend, wie zu einer bestimmten Masse M_0 mit Rand $R_0 = a\xi_0$ ein bestimmter Druck $P_0 = K\rho_0$ und eine zentrale Dichte ρ_c gehören.

In der Folge betrachtet man die Wirkung auf die Dichteverteilung mit konstanter Masse M_0 , wenn der Außendruck von P_0 auf P_* erhöht wird und sich der Radius von R_0 auf $R_* = a\xi_*$ ändert. Aufgrund von (1.94) ergibt sich eine neue zentrale Dichte

$$\rho_{c,*} = \frac{K^3}{4\pi G^3 M_0^2} \left(\xi \frac{d \ln \eta}{d \ln \xi} \right)_{\xi=\xi_*}^2 \quad (1.95)$$

da die Gesamtmasse M_0 konstant bleibt. Die Beziehung (1.93) liefert auch den dimensionslosen Radius

$$\xi_* = -\frac{GM_0}{aK} \left(\frac{d \ln \xi}{d \ln \eta} \right)_{\xi=\xi_*}. \quad (1.96)$$

Die isotherme Konfiguration befindet sich im Gleichgewicht mit dem Außendruck, d.h.

$$P_* = K\rho_* = K\rho_{c,*} \eta(\xi_*), \quad (1.97)$$

wobei die allgemeine Form der Dichteverteilung (1.88) Verwendung findet. Durch Einsetzen der obigen Relationen wird daraus schließlich

$$P_* = \frac{K^4}{4\pi G^3 M_0^2} \eta(\xi_*) \left(\xi \frac{d \ln \eta}{d \ln \xi} \right)_{\xi=\xi_*}^2. \quad (1.98)$$

Demnach liegt eine Relation zwischen dem Außendruck $P_* = P(\xi_*)$ und dem resultierenden Radius der Wolke $R_* = a\xi_*$ vor, wobei ξ_* als Parameter entlang der Lösung der isothermen Lane-Emden-Gleichung (Abbildung 1.5) fungiert. Definiert man nun die beiden dimensionslosen Größen Q und S ohne die Vorfaktoren der Gleichungen (1.98) und (1.96)

$$Q(\xi_*) = \eta \left(\xi \frac{d \ln \eta}{d \ln \xi} \right)_{\xi=\xi_*}^2, \quad S(\xi_*) = \left(\frac{d \ln \xi}{d \ln \eta} \right)_{\xi=\xi_*}, \quad (1.99)$$

ergibt sich der Funktionenverlauf von Abbildung 1.6. Die Größen Q und S sind direkt aus der Lösung der Lane-Emden-Gleichung (siehe Abbildung 1.5) zu entnehmen.

Aus dem Verlauf dieser $Q(S)$ -Kurve wird ersichtlich, dass ein maximaler (dimensionsloser) Außendruck Q_{\max} mit

$$Q_{\max} = 17.56 \quad \text{mit} \quad S(Q_{\max}) = 0.41 \quad (1.100)$$

existiert. Für höheren Außendruck $P_* > P_{\max}$ gibt es demnach keine stabilen isothermen hydrostatischen Konfigurationen mehr. Dieses Resultat wurde erstmals von Ebert (1955) und Bonnor (1956) abgeleitet, daher der Name der sogenannten Bonnor-Ebert-Sphären.

Es bleibt noch zu bestimmen, welchem Radius ξ_{\max} dieser maximale Außendruck entspricht. Dazu bildet man die Ableitung von Q (siehe Gleichung 1.99), die man auch als

$$\frac{dQ}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^4}{\eta} \left[\frac{d\eta}{d\xi} \right]^2 \right) \quad (1.101)$$

darstellen kann. Nach Differenzieren dieser Gleichung und Verwendung der Lane-Emden-Gleichung in der Form (1.89), um die zweite Ableitung zu ersetzen, findet sich folgende Relation

$$\frac{dQ}{d\xi} = \xi^4 \frac{d\eta}{d\xi} \left[\frac{1}{\eta^2} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 - 2\eta \right]. \quad (1.102)$$

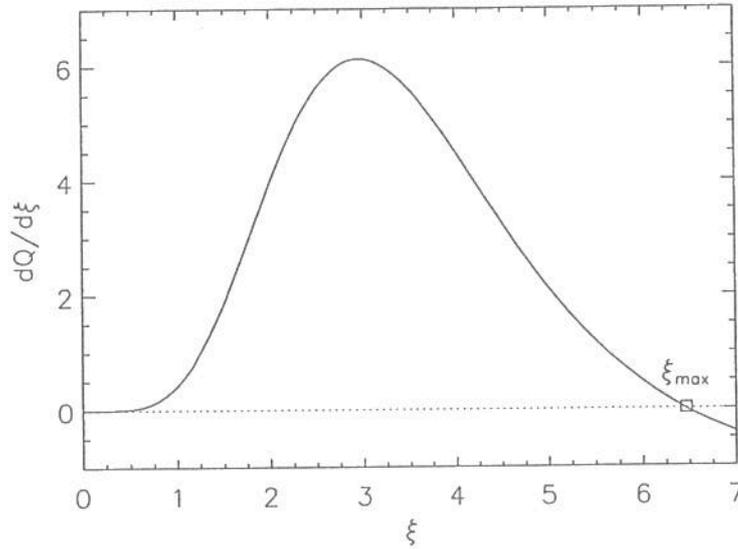


Abbildung 1.7: Die dimensionslose Ableitung des Außendruckes nach dem Radius $dQ/d\xi$. Die erste Nullstelle legt den (dimensionslosen) Radius ξ_{\max} fest, an dem der maximal mögliche Außendruck erreicht wird.

Diese Funktion ist in Abbildung 1.7 dargestellt und die erste Nullstelle, d.h. $dQ/d\xi = 0$ oder der Radius ξ_{\max} , bei dem der maximal mögliche Außendruck erreicht wird, findet sich bei

$$\xi_{\max} = 6.47 \quad \text{mit} \quad \frac{\rho_c}{\rho_{\max}} = \frac{1}{\eta(\xi_{\max})} = 14.13. \quad (1.103)$$

Damit ist auch das maximal mögliche Dichteverhältnis zwischen der Dichte am Außenrand ρ_{\max} und der Dichte im Zentrum ρ_c berechnet.

1.6 Gleichungen des Sternaufbaues

Viele Details zu den folgenden Gleichungen des Sternaufbaus sowie den allgemeinen Eigenschaften der Sterne sind sehr gut im Buch von Kippenhahn & Weigert (1980) zusammengefasst.

1.6.1 Mechanische Anteile

Als Wiederholung von Abschnitt 1.1 verwenden wir hier wiederum die Gleichungen in sphärischer Symmetrie, d.h. alle Variablen hängen nur vom Radius r (oder der integrierten Masse m) und der Zeit t ab. Das hydrostatische Gleichgewicht ist durch ein Kräftegleichgewicht zwischen Druckkraft und Schwerkraft definiert, d.h.

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho. \quad (1.104)$$

Die Schwerebeschleunigung g folgt aus der Poissongleichung (1.7) für das Potential ψ , das sich in sphärischer Symmetrie einmal integrieren lässt, und mit Hilfe der bis zum Radius r integrierten Masse $m(r)$ (1.6) zu

$$g = \frac{Gm}{r^2}, \quad (1.105)$$

ergibt. Die gebräuchlichste Form des hydrostatischen Gleichgewichts in sphärischer Geometrie lautet demnach

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho m}{r^2}. \quad (1.106)$$

Im Fall der integrierten Masse m als Variable mit

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi\rho r^2} \quad (1.107)$$

wird daraus

$$\frac{dP}{dm} = \frac{dP}{dr} \frac{dr}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}. \quad (1.108)$$

Die drei unabhängigen Variablen P , ρ und m sind durch die zwei Gleichungen (1.107) und (1.106) verbunden. Hat man beispielsweise eine Zustandsgleichung der Form $P = P(\rho)$ oder $\rho = \rho(P)$ zur Verfügung (z.B. entartetes Elektronengas, Polytropen (Abschnitt 1.3) oder Planeten (1.2)), lassen sich die beiden Gleichungen integrieren und man erhält ein einfaches Sternmodell. In allgemeinen Fall ist aber die Zustandsgleichung in der Form $P = P(\rho, T)$ oder $\rho = \rho(P, T)$ gegeben, so dass auch die thermische Struktur des stellaren Plasmas mitbestimmt werden muss.

1.6.2 Thermische Anteile

Zur Bestimmung der Temperatur im Sterninnern muss man die Frage klären, wie die Energie im Stern erzeugt und wie diese Energie an die Oberfläche transportiert wird. Bezeichnen wir mit L_r die Leuchtkraft am Radius r und betrachten eine Schale der Dicke dr , in der thermonukleare Reaktionen stattfinden. Dabei führen wir die nukleare Energie ε_n ein, die pro Masse und Sekunde erzeugt wird, und schreiben den Zuwachs dL_r an Leuchtkraft als

$$dL_r = 4\pi r^2 \rho \varepsilon_n dr, \quad (1.109)$$

oder mit Hilfe der Massengleichung (1.11)

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \varepsilon_n. \quad (1.110)$$

Im nichtstationären Fall schreiben wir den Energieaustausch dQ allgemein als

$$dQ = \left(\varepsilon_n - \frac{\partial L_r}{\partial m} \right) dt \quad \text{oder} \quad \frac{\partial L_r}{\partial m} = \varepsilon_n - \frac{dQ}{dt}. \quad (1.111)$$

Unter Verwendung des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik, d.h.

$$dQ = dU + Pdv, \quad \text{mit} \quad v = \frac{1}{\rho} \quad (1.112)$$

folgt nach zahlreichen Umformungen (siehe z.B. Kippenhahn & Weigert, 1980) die zeitabhängige Energiegleichung

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \epsilon_n - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\hat{\delta}}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1.113)$$

Dazu wird die allgemeine Zustandsgleichung der Materie $P = P(\rho, T, \mu)$ oder $\rho = \rho(P, T, \mu)$ in differentieller Form verwendet. μ bezeichnet das mittlere Molekulargewicht, das sich durch nukleares Brennen ebenfalls ändert. Wir definieren uns dann folgende lokale Koeffizienten

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_{T, \mu} \quad (1.114)$$

$$\hat{\delta} = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_{P, \mu} \quad (1.115)$$

$$\hat{\varphi} = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \right)_{P, T}. \quad (1.116)$$

Für ein ideales Gas gilt demnach $\hat{\alpha} = \hat{\delta} = \hat{\varphi} = 1$. Eine Taylor-Entwicklung um den Gleichgewichtszustand führt in der ersten Ordnung auf

$$\begin{aligned} \rho_0(P, T, \mu) + \delta\rho &= \rho(P + \delta P, T + \delta T, \mu + \delta\mu) = \\ &= \rho_0(P, T, \mu) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{T, \mu} \delta P + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P, \mu} \delta T + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right)_{P, T} \delta\mu + \dots \end{aligned} \quad (1.117)$$

oder nach Division durch ρ_0 und Anwendung der obigen Definitionen

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \hat{\alpha} \frac{\delta P}{P_0} - \hat{\delta} \frac{\delta T}{T_0} + \hat{\varphi} \frac{\delta\mu}{\mu_0}, \quad (1.118)$$

was als Verallgemeinerung der adiabatischen Variation (1.183) aus Kapitel 1.10 zu sehen ist.

Ohne auf die Details einzugehen, möchte ich hinweisen, dass die zeitabhängigen Terme dann wichtig werden, wenn sich die Entwicklung des Stern auf der thermischen Zeitskala τ_{KH} (siehe dazu Gleichung 1.2) vollzieht, d.h. wenn *Energieproduktion und Energieabgabe nicht im Gleichgewicht* sind.

Als letzte Gleichung kommt noch der Energietransport hinzu, der durch Strahlung, Wärmeleitung und Konvektion erfolgen kann. Aus dem 1. Moment der Strahlungstransportgleichung lässt sich unter der Voraussetzung eines optisch dicken Mediums

im thermischen Gleichgewicht (siehe Abschnitt 1.14.2) folgende Gleichung für den Temperaturgradienten ableiten

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa_{\text{R}}\rho L_{\text{r}}}{16\pi a_{\text{R}}c r^2 T^3}, \quad (1.119)$$

die sich auch mit Hilfe der Massengleichung (1.107) in die Form

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{3\kappa_{\text{R}}L_{\text{r}}}{64\pi^2 a_{\text{R}}c r^4 T^3} \quad (1.120)$$

bringen lässt. Da der Strahlungsfluss F_{rad} mit der Leuchtkraft L_{r} über

$$L_{\text{r}} = 4\pi r^2 F_{\text{rad}} \quad (1.121)$$

zusammenhängt, sehen wir, dass diese Gleichung (1.119) eine Diffusionsgleichung mit dem Diffusionskoeffizienten D_{rad} für die Strahlung darstellt,

$$F_{\text{rad}} = -D_{\text{rad}}\nabla T \quad \text{mit} \quad D_{\text{rad}} = \frac{4a_{\text{R}}c T^3}{3\kappa_{\text{R}}\rho} \quad (1.122)$$

wie wir sie beispielsweise in Kapitel 1.4.5 zur Oberfläche von Weißen Zwergen verwendet haben.

In einem stellaren Plasma stellt sich heraus, dass der Temperaturgradient ∇T nicht immer stabil ist, und dass ein zu steiler Gradient zu sog. *Konvektionsbewegungen* Anlass gibt. Wann diese auftreten, werden wir im nächsten Kapitel behandeln, weitere Details zur Konvektionsbehandlung sind beispielsweise im Buch von Kippenhahn & Weigert (1980) nachzulesen.

Das klassische System der 4 Sternaufbaugleichungen (1.108), (1.107), (1.113), (1.120) für die Unbekannten P , r , L_{r} , T ist damit als Funktion der integrierten Masse m vorgestellt. Speziell sind die Randbedingungen, wobei zwei am Innenrand bei $m = 0$ mit $r = 0$ und $L_{\text{r}} = 0$ festgelegt sind. Die beiden anderen sind schwieriger am Außenrand bei $m = M$ durch die Abstrahlung in der Sternatmosphäre zu implementieren, d.h. $T(M) = T_{\text{eff}}$ mit der Effektivtemperatur T_{eff} bzw. $P(M) = P_{\text{phot}}$ mit dem Photosphärendruck P_{phot} . Dieses System wird erst durch weitere Materialfunktionen wie die Opazität $\kappa_{\text{R}} = \kappa_{\text{R}}(\rho, T)$ (vergl. Abschnitt 1.14.2 mit Abbildung 1.25), die nukleare Energieerzeugung $\varepsilon_{\text{n}} = \varepsilon_{\text{n}}(\rho, T)$ sowie die Zustandsgleichung $\rho = \rho(P, T, \mu)$ mit samt ihren thermodynamischen Eigenschaften, wie z.B. eine Relation (1.115), abgeschlossen.

1.6.3 Konvektion

Druckskalenhöhe

Ausgehend von einer hydrostatischen Schichtung wollen wir den Temperaturverlauf über den Druck angeben. Zu diesem Zweck definieren wir den Gradienten

$$\nabla = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} = \frac{P}{T} \frac{\partial T}{\partial P}. \quad (1.123)$$

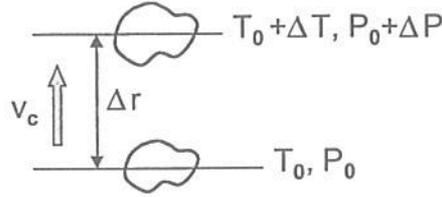


Abbildung 1.8: Schematische Bewegung eines Konvektionsballen im stellaren Hintergrund. Ausgehend von der Zone mit (T_0, P_0) bewegt sich das Konvektionselement um Δr zu den Werten $(T_0 + \Delta T, P_0 + \Delta P)$. v_c bezeichnet die Konvektionsgeschwindigkeit.

Verwenden wird das hydrostatische Gleichgewicht (1.10) zusammen mit dem Strahlungstransport im optischen dicken Medium (1.315) können wir in einer radiativen Schichtung

$$\frac{dT}{dP} = \frac{dT}{dr} \frac{dr}{dP} = \frac{3\kappa_R L_r}{16\pi acGT^3} \quad (1.124)$$

bestimmen, um den radiativen Gradienten festzulegen

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa_R L_r P}{16\pi acGT^4} \quad (1.125)$$

Als weitere wichtige Größe nehmen wir die sogenannte homogene Schichtdicke oder auch die *Druckskalenhöhe*

$$H_P = -\frac{dr}{d \ln P} = -P \frac{dr}{dP} = \frac{P}{\rho g}, \quad (1.126)$$

wobei der rechte Ausdruck aus der Hydrostatik (1.10) folgt. Schreiben wir für ein ideales Gas $c_s^2 = P/\rho$ so gilt

$$H_P = \frac{c_s^2}{g} \quad (1.127)$$

Im weiteren Verlauf der Vorlesung benötigen wir aus (1.126) noch folgende Relation

$$\nabla = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \frac{dr}{dP} = -\frac{H_P}{T} \frac{dT}{dr} \quad (1.128)$$

Bewegung eines Ballens

Um eine turbulente Strömung innerhalb einer hydrostatischen Konfiguration zu beschreiben, betrachten wir ein Materieelement (= einen Ballen), das sich um eine Wegstrecke Δr bewegt (siehe Abbildung 1.8). Bezeichnen wir mit Δ die Änderung in der äußeren Schichtung und mit d die Veränderungen im Ballen, so gilt

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_0 \Delta r = -\frac{T \nabla}{H_P} \Delta r \quad (1.129)$$

$$\Delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)_0 \Delta r = -\frac{P}{H_P} \Delta r \quad (1.130)$$

Mit $D = d - \Delta$ ist die Differenz zwischen innen und außen gemeint und da in der Schichtung mechanisches Gleichgewicht herrscht, ist die Zeitskala des Druckausgleichs die kürzeste, so dass wir Druckgleichgewicht zwischen dem Ballen und der Umgebung annehmen dürfen

$$DP = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta P = dP. \quad (1.131)$$

Betrachten wir nun eine adiabatische Bewegung des Ballens, d.h. $S = \text{const.}$ und dann gilt

$$\frac{dT}{T} = \nabla_{\text{ad}} \frac{dP}{P} = \nabla_{\text{ad}} \frac{\Delta P}{P} = -\nabla_{\text{ad}} \frac{\Delta r}{H_P}, \quad (1.132)$$

woraus sich aus (1.129) und (1.132) die Temperaturdifferenz zwischen einem Ballen und der Umgebung ausrechnen lässt

$$\begin{aligned} DT &= dT - \Delta T = T \left[\frac{dT}{T} - \frac{\Delta T}{T} \right] = \\ &= T \left[-\nabla_{\text{ad}} \frac{\Delta r}{H_P} + \frac{\nabla}{H_P} \Delta r \right] = \frac{T}{H_P} [\nabla - \nabla_{\text{ad}}] \Delta r. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Nehmen wir an, dass $DT < 0$ ist, und die Bedingung des Druckgleichgewichts sagt nun $D\rho > 0$, worauf die Schwerkraft den Ballen wieder zurück zieht. Ist nun aber der Temperaturunterschied positiv $DT > 0$, so ist die Dichte geringer als die Umgebung $D\rho < 0$ und die Auftriebskräfte werden den Ballen weiter nach oben aufsteigen lassen. Zusammenfassend erhalten wir demnach ein Stabilitätskriterium

$$\nabla < \nabla_{\text{ad}}, \quad (1.134)$$

das nach dem Entdecker *Schwarzschild-Kriterium* für konvektive Stabilität genannt wird.

Nach dieser Relation gibt es zwei Möglichkeiten, wie der Gradient der Schichtung ∇ steiler als die rein thermodynamische Größe ∇_{ad} werden kann. Entweder ist der lokale Temperaturgradient ∇ z.B. durch die nukleare Energieerzeugung so groß, dass die Strömung konvektiv wird, oder im anderen Fall kann ∇_{ad} z.B. in den Ionisationszonen (siehe Abbildung 1.9) selbst so klein werden, dass bereits in kleiner Temperaturgradient im Stern gegenüber konvektiven Bewegungen instabil wird. Im ersten Fall haben wir die turbulenten Kernregionen massereicher Sterne vorliegen, der zweite Fall beschreibt die konvektiven Oberflächenschichten aller kühleren Sterne.

Das Schwarzschildkriterium (1.134) lässt sich für den Fall eines chemischen Gradienten verallgemeinern, wenn wir wiederum unsere Zustandsgleichung in differentieller Schreibweise (1.118) verwenden, d.h.

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \hat{\alpha} \frac{\Delta P}{P} - \hat{\delta} \frac{\Delta T}{T} + \hat{\varphi} \frac{\Delta \mu}{\mu} \quad \text{Schichtung} \quad (1.135)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \hat{\alpha} \frac{dP}{P} - \hat{\delta} \frac{dT}{T} + \hat{\varphi} \frac{d\mu}{\mu} \quad \text{Ballen.} \quad (1.136)$$

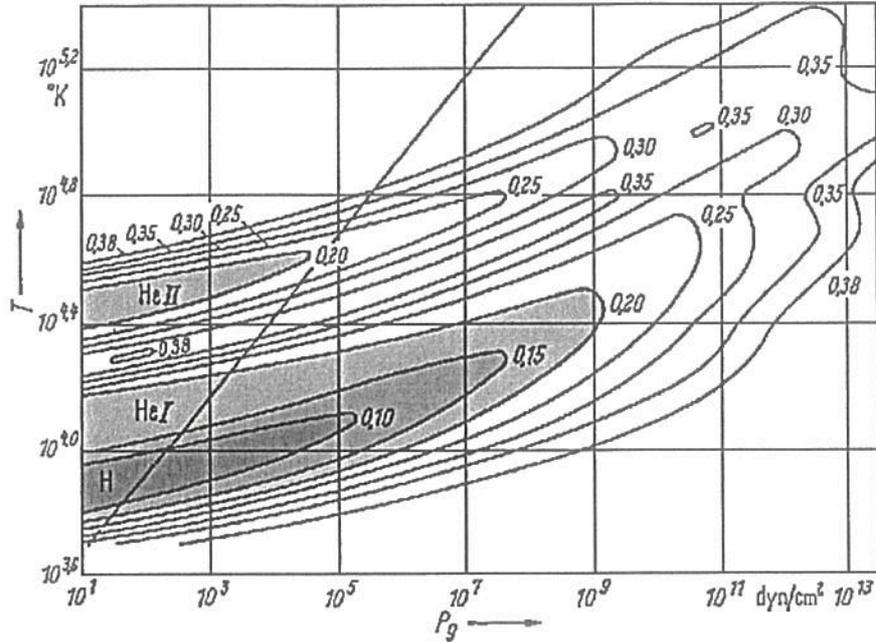


Abbildung 1.9: Die thermodynamische Größe $\nabla_{\text{ad}} = (\partial \ln T / \partial \ln P)_S$ als Funktion von Temperatur T und Gasdruck P_g im Bereich der Ionisationszonen von Wasserstoff und Helium. Für ein ideales einatomiges Gas gilt $\gamma = 5/3$ und $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$, in den Ionisationszonen kann ∇_{ad} stark absinken (graue Bereiche).

Mit der Annahme, dass sich die chemische Zusammensetzung des Ballens während seiner Bewegung (1.136) nicht ändert, also $d\mu = 0$, können wir die Dichtedifferenz $D\rho$ bestimmen und das sogenannte *Ledoux-Kriterium* für konvektive Stabilität in einem chemisch inhomogenen Medium ableiten

$$\nabla < \nabla_{\text{ad}} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \nabla_{\mu} \quad \text{mit} \quad \nabla_{\mu} = \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln P} \right)_S. \quad (1.137)$$

Wenn also der chemische Gradient nach außen abnimmt, d.h. $\nabla_{\mu} > 0$ gilt, da der Druck P nach außen abnimmt, so wirkt der chemische Gradient stabilisierend. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass man im Fall einer Schichtung mit

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla < \nabla_{\text{ad}} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \nabla_{\mu} \quad (1.138)$$

von *Semikonvektion* spricht.

1.7 Fragmentation

1.7.1 Jeans-Kriterium

In diesem Kapitel stellen wir die Frage nach der Stabilität unter dem Einfluss der Gravitation. Ausgangspunkt ist eine homogene Struktur, die gestört wird. Unter der

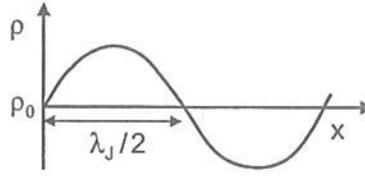


Abbildung 1.10: Eine Störung von der Länge $\lambda_J/2$ beinhaltet die Jeans-Masse M_J und ist gravitativ instabil.

Annahme von Isothermie, idealem Gas und eindimensionaler Geometrie verwenden wir die Gleichungen der Hydrodynamik für die Dichte ρ , die Geschwindigkeit u , den Druck P und das Gravitationspotential ψ , d.h.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} \quad (1.139)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \quad (1.140)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 4\pi G \rho. \quad (1.141)$$

Die Gleichgewichtskonfiguration ist zeitunabhängig und räumlich konstant, also ρ_0 , P_0 , ψ_0 und $u_0 = 0$. Dabei ist zu beachten, dass $\psi_0 = \text{const.}$ keine Lösung der Poissongleichung (1.141) ist. Ohne auf diesen sogenannten *Jeans-Schwindel* näher einzugehen, wird die Störung linearisiert und mit dem Index 1 bezeichnet, sodass aus (1.139)-(1.141) folgendes System entsteht

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (1.142)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad (1.143)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = 4\pi G \rho_1. \quad (1.144)$$

Als Zustandsgleichung wird ein ideales und isothermes Gas verwendet, d.h. man entwickelt die Druckstörung P_1 um das Gleichgewicht $P(\rho_0, T_0)$ mit $T_0 = \text{const.}$,

$$P_1 = \rho_1 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0 = \rho_1 c_s^2, \quad (1.145)$$

wobei c_s die isotherme Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Für ein ideales Gas gilt dann richtigerweise

$$c_s = \sqrt{\frac{\mathcal{R}T}{\mu}}. \quad (1.146)$$

Die räumliche Ableitung der linearisierten Bewegungsgleichung (1.143) liefert

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \rho_0 4\pi G \rho_1 = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}, \quad (1.147)$$

im 7F

wobei die linearisierte Poissongleichung (1.144) und die zeitliche Ableitung der linearisierten Massenerhaltung (1.142) eingesetzt werden. Mit Hilfe der Zustandsgleichung (1.145) wird eine einfache Wellengleichung aus (1.147) abgeleitet,

$$\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = \frac{4\pi G \rho_0 P_1}{c_s^2}. \quad (1.148)$$

Klarerweise gilt eine identische Form für ρ_1 , und diese lineare Gleichung lässt sich über einen Ansatz für ebene Wellen $P_1 = A \exp[i(kx - \omega t)]$ lösen, d.h.

$$-\frac{1}{c_s^2} \omega^2 + k^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2}. \quad (1.149)$$

Die letzte Gleichung stellt eine sogenannte Dispersionsrelation $F(\omega, k) = 0$ für Schallwellen in einem gravitierenden Medium dar. Um zeitlich anwachsende Lösungen von Gleichung (1.148) zu erhalten, muss man $\omega^2 \leq 0$ fordern, oder im Grenzfall $\omega^2 = 0$ und damit aus (1.149)

$$k^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda_J}\right)^2. \quad (1.150)$$

Aus dieser Definition der *Jeanslänge* λ_J bestimmt man diese mit Hilfe der idealen Gasgleichung zu

$$\lambda_J = \left(\frac{\pi c_s^2}{G \rho_0}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi \mathcal{R} T_0}{\mu G \rho_0}}. \quad (1.151)$$

Führen wir nun die *Jeansmasse* M_J mit folgender Definition ein

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} \rho_0 \lambda_J^3, \quad (1.152)$$

so ergibt sich aus den beiden letzten Ausdrücken

$$M_J = \frac{\pi^{5/2}}{6} \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu G}\right)^{3/2} T_0^{3/2} \rho_0^{-1/2}. \quad (1.153)$$

Die Jeansmasse nimmt also mit steigender Dichte ab, d.h. während einer Kollapsströmung, in der die mittlere Dichte ρ_0 anwächst, können immer kleinere Fragmente instabil werden. Andererseits wirkt eine höhere Temperatur T_0 stabilisierend, da die Druckkräfte besser gegen gravitative Störungen arbeiten können. Während die Jeanslänge (1.151) eindeutig festgelegt ist, kann der Vorfaktor der Jeansmasse (1.152) in einzelnen Definitionen, je nach angenommener Geometrie, etwas abweichen.

1.7.2 Minimale Masse

Wir werden ausrechnen, wie lange der Vorgang der Fragmentation in einer interstellaren Wolke unter der Annahme von Isothermie stattfinden kann. Dazu schätzt man die Energieabgabe ab, die bei Kontraktion abgestrahlt wird, d.h. die freiwerdende Gravitationsenergie soll auf der typischen Kollapszeitskala τ_{ff} (siehe Abschnitt 1.8) aus dem kollabierenden Fragment entweichen,

$$A = \frac{dE}{dt} \simeq \frac{GM^2}{R} \frac{1}{\tau_{\text{ff}}} \simeq \frac{GM^2}{R} \sqrt{G\bar{\rho}}. \quad (1.154)$$

Die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ liefert dann

$$A \simeq \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sqrt{\frac{M^5 G^3}{R^5}}. \quad (1.155)$$

Die Abstrahlung eines Körpers ist nach dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz gegeben durch

$$B = 4\pi\sigma R^2 f T^4, \quad (1.156)$$

wobei der Faktor $f \leq 1$ die Effektivität der Abstrahlung bezeichnet. Ein schwarzer Körper ist durch $f = 1$ gekennzeichnet. Solange Isothermie aufrecht ist, gilt demnach $B \gg A$.

Kann die Energie aus dem Fragment nicht mehr entweichen, so setzen wir $A \simeq B$ und bestimmen daraus die limitierende Jeans-Masse

$$M_{\text{J,lim}}^5 \simeq \frac{64\pi^3 \sigma^2}{3G^3} f^2 R^9 T^8. \quad (1.157)$$

Den Radius R rechnen wir über Dichte und Masse um

$$M_{\text{J,lim}}^2 \simeq \frac{9\sigma^2}{G^3} f^2 T^8 \rho^{-3}.$$

Mit Hilfe der abgeleiteten Beziehung der Jeans-Masse (1.153) wird daraus

$$M_{\text{J,lim}} \simeq \left(\frac{\pi^9}{9}\right)^{1/4} \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu}\right)^{9/4} \left(\frac{1}{G^3\sigma}\right)^{1/2} f^{-1/2} T^{1/4}. \quad (1.158)$$

Einsetzen der Naturkonstanten und Umrechnung in Sonnenmassen liefert für $\mu = 1$ die Abschätzung

$$M_{\text{J,lim}} = 0.02 \frac{T^{1/4}}{f^{1/2}} M_{\odot}. \quad (1.159)$$

Die kleinste Masse, die typischer Weise fragmentiert, liegt für $f \simeq 0.1$ und $T \simeq 1000 \text{ K}$ bei etwa

$$M_{\text{J,lim}} \simeq 0.35 M_{\odot}. \quad (1.160)$$

Es ist bemerkenswert, dass diese Masse im stellaren Bereich, nicht aber in der Größenordnung von Planeten oder ganzen Sternhaufen, liegt. Da die Temperatur mit der Potenz von $1/4$ eingeht und die Abstrahlungseigenschaften (also f) kaum von der chemischen Zusammensetzung abhängen, kann diese Masse $M_{\text{J,lim}}$ im kosmologischen Kontext als nahezu konstant angesehen werden.

1.8 Druckloser Kollaps

Im folgenden Abschnitt betrachten wir eine vereinfachte Kollapsströmung, in der wir die Druckkräfte vernachlässigen, d.h. $P = 0$ setzen. Als Anfangsbedingungen einer sphärischen Konfiguration mit einer mittleren Dichte $\bar{\rho}$ wählen wir

$$u(t=0) = 0, \quad M(t=0) = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} R^3. \quad (1.161)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet in sphärischer Symmetrie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \rho u}{\partial r} = 0. \quad (1.162)$$

Erweitert man diese Gleichung mit dem Faktor $4\pi r^2$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial(4\pi r^2 \rho)}{\partial t} + \frac{\partial(4\pi r^2 \rho u)}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial m}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(u \frac{\partial m}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial m}{\partial t} + u \frac{\partial m}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial m}{\partial t} + u \frac{\partial m}{\partial r} &= A(t), \end{aligned} \quad (1.163)$$

wobei die Massengleichung (1.11) mit der integrierten Masse m zur Anwendung gekommen ist. Aufgrund unserer Anfangsbedingungen (1.161) erhalten wir für $A(t) = 0$, also die Aussage, dass sich einzelne Massenschalen, die ja an der Koordinate m hängen, *nicht* überholen können, was mit Hilfe der Lagrangeableitung besonders deutlich wird,

$$\frac{\partial m}{\partial t} + u \frac{\partial m}{\partial r} = \frac{dm}{dt} = 0. \quad (1.164)$$

Die Bewegungsgleichung lautet in Lagrangeform

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{Gm}{r^2} = 0. \quad (1.165)$$

Indem wir den ersten Term wie folgt umschreiben,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dt} = u' u,$$

erhalten wir eine neue Form der Bewegungsgleichung

$$r^2 u' u = -Gm, \quad \frac{1}{2} d(u^2) = -\frac{Gm}{r^2} dr. \quad (1.166)$$

Da sich die Massenschalen nicht überholen, bleibt m für jeden Radius konstant und man kann (1.166) direkt integrieren,

$$\frac{1}{2} u^2 = +\frac{Gm}{r} + konst., \quad konst = -\frac{GM}{R}, \quad (1.167)$$

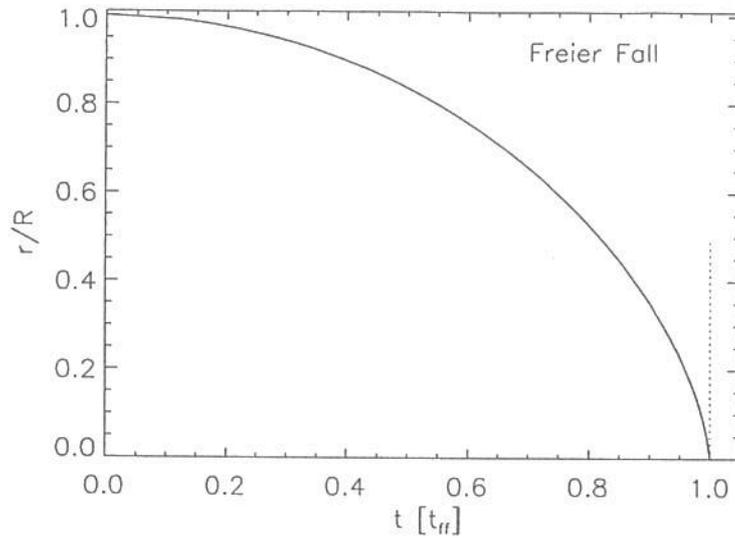


Abbildung 1.11: Der Radius r/R als Funktion der Zeit in Einheiten der Frei-Fall-Zeit τ_{ff} bei einem drucklosen Kollaps.

wobei die Anfangsbedingung die Konstante festlegt. Für die Geschwindigkeit der äußersten Massenschale $m = M$ gilt die folgende Gleichung

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}. \quad (1.168)$$

Die Mehrdeutigkeit von (1.168) wird dadurch vermieden, dass wir eine Kollapslösung suchen, d.h. es muss $dr/dt < 0$ gelten. Durch Umformung von (1.168) folgt

$$\begin{aligned} dt &= - \frac{dr}{\sqrt{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2GM/R^3}} \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi, \quad \text{mit } \xi = \frac{r}{R}. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Im letzten Ausdruck sehen wir, dass die Lösung nur von der mittleren Ausgangsdichte $\bar{\rho}$ abhängen wird, d.h.

$$dt = - \frac{1}{\sqrt{\frac{8\pi G \bar{\rho}}{3}}} \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi. \quad (1.170)$$

Wir definieren die *Frei-Fall Zeit* τ_{ff} durch die Zeitspanne des Kollaps bis zum Zentrum ($r = \xi = 0$), also

$$\tau_{\text{ff}} = - \sqrt{\frac{3}{8\pi G \bar{\rho}}} \int_1^0 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi. \quad (1.171)$$

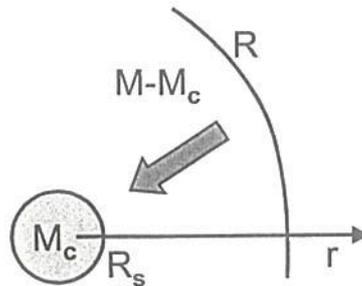


Abbildung 1.12: Einfache Akkretionsströmung auf einen hydrostatischen Kern mit Masse M_c und Radius R_s , der von einer Akkretionsstoßfront umgeben ist.

Das verbleibende Integral lässt sich mit der Variablentransformation $\xi = \sin^2 \phi$ einfach zu $\pi/2$ auswerten und man erhält

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}}}. \quad (1.172)$$

Der zeitliche Verlauf der Kollapsströmung, d.h. der Radius r/R , ist in Abbildung 1.11 aufgezeichnet. Die Form der Kurve entspricht einer Zykloide. Zum Zeitpunkt τ_{ff} ist die Wolke vollständig kollabiert, die Einfallsgeschwindigkeit divergiert zu diesem Zeitpunkt. Im weiteren Verlauf der Vorlesung wird deutlich werden, dass alle dynamischen Phänomene in einer hydrostatischen Konfiguration mit dieser Zeitskala τ_{ff} einhergehen.

1.9 Akkretionsströmungen

Im folgenden Kapitel behandeln wir eine einfache Akkretionsströmung mit der Gesamtmasse M auf einen bereits vorhandenen hydrostatischen Kern mit genügend Masse M_c . Wir können annehmen, dass die Materie im Wesentlichen frei fällt, d.h. die Geschwindigkeit im Abstand r durch

$$u_{\text{ff}}(r) = \sqrt{\frac{2GM_c}{r}} \quad (1.173)$$

gegeben ist. Im stationären Fall ergibt sich die Massenakkretionsrate zu

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho u_{\text{ff}}, \quad \rho(r) \propto r^{-3/2}, \quad (1.174)$$

wenn das Geschwindigkeitsgesetz aus (1.173) zugrundegelegt wird.

Der Kern ist von einer Stoßfront mit Radius R_s umgeben, in der die kinetische Energie des einfallenden Gases in Strahlung und thermische Energie umgewandelt wird. Die Konfiguration ist in Abbildung 1.12 skizziert. Mit Hilfe von Gleichung (1.174) schreiben wir die Dichte als

$$\rho(r) = \rho_s \left(\frac{r}{R_s} \right)^{-3/2}, \quad (1.175)$$

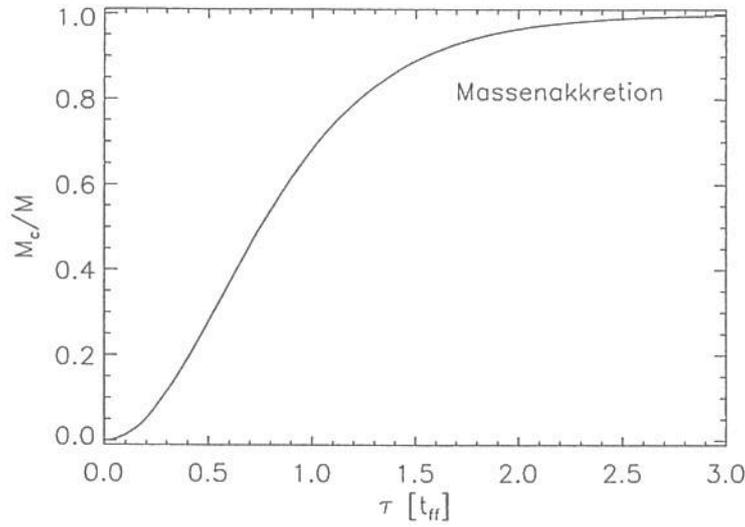


Abbildung 1.13: Die Kernmasse $\mu(\tau)$ in Einheiten der Gesamtmasse M als Funktion der dimensionslosen Zeit τ in Einheiten von τ_{ff} .

wobei ρ_s die Dichte an der Stoßfront bezeichnet. Der Stoßradius ist zwar nicht zeitlich konstant, aber die Variationen sind relativ gering, sodass wir für die verbleibende Hüllenmasse

$$\begin{aligned}
 M - M_c &= \int_{R_s}^R 4\pi r^2 \rho_s \left(\frac{r}{R_s}\right)^{-3/2} dr \\
 &= 4\pi \rho_s R_s^{3/2} \frac{2}{3} r^{3/2} \Big|_{R_s \approx 0}^R \\
 &\simeq \frac{8\pi}{3} \rho_s R_s^{3/2} R^{3/2}
 \end{aligned} \tag{1.176}$$

erhalten. Der Radius der Wolke ist wesentlich größer als der Stoßradius, d.h. $R \gg R_s$. Die Massenakkretionsrate ergibt sich aus dem Materiefluss über die Oberfläche und mit Verwendung von Gleichung (1.173) und $u_s = u_{ff}(R_s)$

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_c}{dt} &= 4\pi R_s^2 \rho_s u_s \\
 &= 4\pi R_s^2 \rho_s \sqrt{\frac{2GM_c}{R_s}} = 4\pi (2G)^{1/2} \rho_s R_s^{3/2} M_c^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{1.177}$$

Aus Gleichung (1.176) kann man $\rho_s R_s^{3/2}$ ausrechnen, sodass sich eine Differentialgleichung für M_c ableiten lässt,

$$\frac{dM_c}{dt} = 4\pi (2G)^{1/2} M_c^{1/2} (M - M_c) \frac{3}{8\pi} R^{-3/2}. \tag{1.178}$$

Nach Einführung einer dimensionslosen Zeit τ (in Einheiten der Frei-Fall Zeit, siehe

Kap. 1.8 und Gleichung (1.172) sowie des Massenverhältnisses μ durch

$$\tau = \frac{t}{\tau_{\text{ff}}} = t \frac{\sqrt{8GM}}{\pi R^{3/2}}, \quad \text{und} \quad \mu = \frac{M_c}{M} \quad (1.179)$$

wird die Struktur von (1.178) deutlicher

$$\frac{d\mu}{d\tau} = \frac{3\pi}{4} \mu^{1/2} (1 - \mu). \quad (1.180)$$

Diese Differentialgleichung lässt sich lösen, wenn man

$$2 \frac{d\sqrt{\mu}}{1 - (\sqrt{\mu})^2} = \frac{3\pi}{4} d\tau \quad \text{und damit} \quad \arctanh \sqrt{\mu} = \frac{3\pi}{8} \tau$$

beachtet. Die Integrationskonstante verschwindet, da für $\tau = 0$ auch $\mu = 0$ gelten muss. Daraus errechnet sich die Massenanteil im Kern

$$\mu(\tau) = \left(\frac{\exp\left(\frac{3\pi}{4}\tau\right) - 1}{\exp\left(\frac{3\pi}{4}\tau\right) + 1} \right)^2, \quad (1.181)$$

deren Verlauf in Abbildung (1.13) dargestellt ist. Aus (1.181) wird ersichtlich, dass asymptotisch die gesamte Masse in den Kern fällt.

1.10 Dynamische Stabilität

In diesem Kapitel stellen wir die Frage, wie eine hydrostatische Konfiguration auf adiabatische Kompressionen reagiert. Dazu geht man von einer Gleichgewichtslage (1.10) aus, in der wir gemittelte Größen verwenden.

Diese Konfiguration soll nun eine kleine Radiusänderung $\delta R \ll R$ erfahren, dann wissen wir bereits aus Kap. 1.4.4, dass die Dichteänderung der Gleichung (1.61)

$$\frac{\delta \rho}{\bar{\rho}} = -3 \frac{\delta R}{R}, \quad (1.182)$$

genügt. Wir verwenden nun eine adiabatische Zustandsgleichung der Form

$$\bar{P} = K \bar{\rho}^\gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V} \quad (1.183)$$

und entwickeln diese Gleichung um \bar{P} ,

$$\begin{aligned} \bar{P} + \delta P &= \bar{P} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} \delta \rho = \bar{P} + \gamma \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \delta \rho = \bar{P} - \frac{3\bar{P}\gamma}{R} \delta R \\ \frac{\delta P}{\bar{P}} &= -3\gamma \frac{\delta R}{R}, \end{aligned} \quad (1.184)$$

wobei die Relation (1.182) verwendet wird. Nun lässt sich die Störung in der Druckkraft berechnen, d.h.

$$\delta F_{\text{Druck}} = \frac{\delta P}{R} - \frac{\bar{P}}{R^2} \delta R = \frac{-3\gamma \bar{P} \delta R}{R^2} - \frac{\bar{P}}{R^2} \delta R = \frac{\bar{P} \delta R}{R^2} (-3\gamma - 1). \quad (1.185)$$

Analog können wir die Störung in der Gravitationskraft ausrechnen, d.h.

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{Grav}} &= \frac{4\pi}{3} G [2\bar{\rho} \delta \rho R + \bar{\rho}^2 \delta R] \\ &= \frac{4\pi}{3} G \left[2\bar{\rho} \left(-3 \frac{\bar{\rho}}{R} \delta R \right) R + \bar{\rho}^2 \delta R \right] = \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}^2 \delta R [-5]. \end{aligned} \quad (1.186)$$

Schreibt man die Kraft als Masse mal Beschleunigung, so kann man eine Bewegungsgleichung ableiten, d.h.

$$\delta \ddot{R} \bar{\rho} = -\delta F_{\text{Druck}} - \delta F_{\text{Grav}} = \frac{\bar{P}}{R^2} \delta R (3\gamma + 1) + 5 \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}^2 \delta R. \quad (1.187)$$

Mit Hilfe der hydrostatischen Gleichung

$$\frac{\bar{P}}{R} = -\bar{\rho} \frac{GM}{R^2} = -\frac{4\pi}{3} \bar{\rho}^2 GR \quad (1.188)$$

umgeschrieben, folgt daraus

$$\begin{aligned} \delta \ddot{R} \bar{\rho} &= \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}^2 \delta R [-3\gamma - 1 + 5] \\ \delta \ddot{R} + \omega^2 \delta R &= 0, \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho} [3\gamma - 4]. \end{aligned} \quad (1.189)$$

Diese lineare Differentialgleichung lässt sich mit einem Ansatz der Form

$$\delta R = A \exp(i\omega t) + B \exp(-i\omega t) \quad (1.190)$$

lösen, wobei die Integrationskonstanten A und B durch die Anfangsbedingungen gegeben sind.

Die Form der Lösungen können wir weiter untersuchen, wenn wir γ festlegen und Gleichung (1.189) betrachten.

- $\gamma = 5/3$. Daraus ergibt sich

$$\omega^2 = \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho} > 0,$$

und somit eine stabile Oszillation. Eine Periode, definiert durch

$$\Pi = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{4\pi G \bar{\rho}}} = 4\sqrt{2} \tau_{\text{ff}}, \quad (1.191)$$

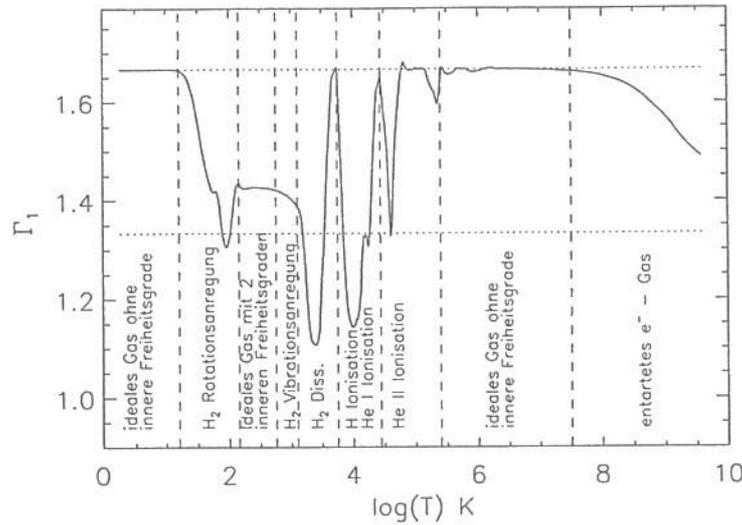


Abbildung 1.14: Die thermodynamische Größe $\Gamma_1 = \partial \ln P / \partial \ln \rho$ für ein typisches stellares Plasma bei einer festgehaltenen Dichte von $\rho = 10^{-11} \text{ kg m}^{-3}$ als Funktion der Temperatur. Die beiden horizontalen gestrichelten Linien zeigen die Werte von $\Gamma_1 = 5/3$ bzw. $\Gamma_1 = 4/3$. Es sind jeweils die einzelnen Prozesse aufgelistet, die Γ_1 wesentlich bestimmen.

greift auf die Frei-Fall Zeit (1.172) zurück. Wie bereits bekannt (siehe Abschnitt 1.8), stellt die Frei-Fall Zeit die Zeitdauer eines drucklosen Kollapses (siehe Abschnitt 1.8) dar, also eine charakteristische Zeitskala, in der eine Gaswolke mit der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ zu einem Punkt zusammenfällt. Damit ist klar, dass es in einer hydrostatischen Konfiguration nur *eine* dynamische Zeitskala gibt, auf der alle Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht ausgeglichen werden.

- $\gamma = 4/3$. In diesem Fall gilt

$$\omega^2 = 0, \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \delta \ddot{R} &= 0 \\ \delta R &= at + b, \end{aligned} \quad (1.192)$$

d.h. die Radiusänderung δR wächst linear mit der Zeit an. Das Gleichgewicht ist indifferent und in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen erhalten wir sowohl eine Expansions- als auch eine Kollapsbewegung. Ein radiativ dominiertes Plasma oder ein vollständig relativistisch entartetes Elektronengas ist durch $\gamma = 4/3$ charakterisiert.

- $\gamma < 4/3$. In diesem Fall gilt $\omega^2 < 0$, d.h. der Ansatz (1.190) führt zu exponentiell anwachsenden Lösungen. Wie in Abbildung 1.14 dargestellt, sind die Ionisations- bzw. Dissoziationszonen für $\gamma < 4/3$ verantwortlich, und in einem Stern wird es demnach immer solche Zonen mit $\Gamma_1 < 4/3$ geben.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass $\gamma = 4/3$ die Lösungen in stabile und instabile Schwingungen teilt. Ausgehend von einer einfachen Mittelung über den Stern wurde

dieses Kriterium abgeleitet, wobei sich für eine realistischere Zustandsgleichung $P = P(\rho, T)$ ein analoges Kriterium mit

$$\Gamma_1 = \frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} = \frac{\rho}{P} \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad (1.193)$$

ableiten lässt. Diese thermodynamische Größe ist auch in Abbildung 1.14 für eine typische stellare Zustandsgleichung gezeichnet. Wir finden darin zahlreiche Zonen mit $\Gamma_1 < 4/3$, die alle dynamisch instabil sind. Um das Stabilitätskriterium (1.189) anwenden zu können, muss man zunächst eine geeignete Mittelung für Γ_1 durchführen. Abschließend bleibt zu sagen, dass alle Objekte, deren gemittelt Γ_1 nahe bei $4/3$ liegt, zu dynamischen Instabilitäten neigen.

1.11 Virialtheorem, skalare Version

1.11.1 Formulierung

Das Virialtheorem ist aus der Mechanik bekannt und lässt sich auf die Gleichungen der Hydrodynamik erweitern. Dazu betrachtet man ein Volumen V im Raum, das von einer Oberfläche O umgeben ist. Mit Hilfe des *Virialtheorems* lässt sich dann der Zusammenhang einzelner Energieanteile verdeutlichen. Den Ausgangspunkt bildet die Bewegungsgleichung,

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla P + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \nabla \psi, \quad (1.194)$$

die nun auch die Lorentzkraft enthält. Diese Gleichung wird skalar mit dem Ortsvektor \mathbf{r} multipliziert und über das Volumen V integriert, d.h.

$$\int_V \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \rho dV = - \int_V \mathbf{r} \cdot \nabla P dV + \int_V \mathbf{r} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV - \int_V \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rho dV. \quad (1.195)$$

Die nächsten Gleichungen stellen nun Umformungen der einzelnen Terme dar, um daraus die Anteile der verschiedenen Energien zu bestimmen.

Beginnen wir mit dem Geschwindigkeitsterm und gebrauchen zur Umformung die Kettenregel,

$$\int_V \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \rho dV = \int_M \frac{d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})}{dt} dm - \int_M \mathbf{u}^2 dm,$$

wobei $dm = \rho dV$ zur Anwendung kommt. Der letzte Term stellt nun die zweifache kinetische Energie E_{kin} des Systems dar. Die Symmetrie des skalaren Produktes erlaubt es uns, den anderen Term mit Hilfe von

$$\frac{d}{dt} \int_M \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dm + \frac{d}{dt} \int_M \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} dm = \frac{d}{dt} \int_M \frac{d\mathbf{r}^2}{dt} dm \quad (1.196)$$

umzuschreiben, wobei das Integral

$$I = \int_M \mathbf{r}^2 dm \quad (1.197)$$

das polare Trägheitsmoment bezeichnet. Die letzten drei Gleichungen zusammen ergeben nun

$$\int_V \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \rho dV = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2E_{\text{kin}}. \quad (1.198)$$

Der folgende Druckterm ist ebenfalls mit Hilfe partieller Integration zu behandeln,

$$\int_V \mathbf{r} \cdot \nabla P dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{r} P dV - \int_V P \nabla \cdot \mathbf{r} dV = \int_O P_{\text{ext}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} - 3 \int_V P dV, \quad (1.199)$$

wobei der Gauß'sche Satz und $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ zur Anwendung kommen. Der erste Term stellt einen Oberflächenterm mit dem Außendruck P_{ext} dar und wird mit

$$S_1 = \int_O P_{\text{ext}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} \quad (1.200)$$

bezeichnet.

Das zweite Integral in Gleichung (1.199) stellt die thermische Energie E_{therm} dar und es gilt im Falle eines idealen Gases mit Adiabatenindex γ

$$3 \int_V P dV = 3(\gamma - 1)E_{\text{therm}}. \quad (1.201)$$

Etwas aufwändiger gestaltet sich die Berechnung der magnetischen Terme, doch mit Hilfe des Maxwell'schen Spannungstensor wird die Vorgangsweise klar, d.h.

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right). \quad (1.202)$$

Mit dieser Definition gilt für die i -te Komponente der Kraftdichte

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.203)$$

wobei hier die Summe explizit, d.h. ohne die Einstein'sche Summenkonvention, ausgeschrieben ist. Die Kraftdichte ist die Vektordivergenz des Maxwell'schen Spannungstensors. Damit schreibt sich der magnetische Term

$$\int_V \sum_i x_i \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \sum_i \left[\int_V \sum_j \frac{\partial x_i T_{ij}}{\partial x_j} dV - \int_V \sum_j T_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dV \right]. \quad (1.204)$$

Der zweite Term in Gleichung (1.204) lässt sich einfacher auswerten, da der Differentialausdruck gleich δ_{ij} ist, und für den Spannungstensor (1.202)

$$\sum_i T_{ii} = \frac{1}{4\pi} \left(B_1^2 - \frac{1}{2} B^2 + B_2^2 - \frac{1}{2} B^2 + B_3^2 - \frac{1}{2} B^2 \right) = -\frac{1}{8\pi} B^2 \quad (1.205)$$

gilt. Die magnetische Gesamtenergie innerhalb des Volumens V ist definiert als

$$E_{\text{mag}} = \int_V \frac{B^2}{8\pi} dV, \quad (1.206)$$

wodurch der zweite Term eine einfache Deutung erfährt. Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes für Tensoren rückt man dem ersten Term von Gleichung (1.204) zu Leibe und erhält ebenfalls einen Oberflächenterm

$$\int_V \sum_i x_i \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \sum_i \int_O \sum_j x_i T_{ij} df_j + E_{\text{mag}} \quad (1.207)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_O \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbf{r} \right] \cdot d\mathbf{f} + E_{\text{mag}} \quad (1.208)$$

$$= \mathcal{S}_2 + E_{\text{mag}} \quad (1.209)$$

Der letzte Term des Virialtheorems (1.195) stellt die Gravitationsenergie dar, die mit Hilfe eines Rückgriffs auf das Potential von Punktmassen berechnet wird. Für die Gravitationsenergie gilt

$$\begin{aligned} E_{\text{grav}} &= -\frac{G}{2} \int_V \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (1.210) \\ &= -\frac{G}{2} \int_V \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \\ &= -G \int_V \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}') \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \\ &= - \int_V \int_{V'} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \cdot \nabla \left[\frac{G\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \\ &= - \int_V \rho \mathbf{r} \cdot \nabla \psi dV. \end{aligned}$$

Die Umformung in der 3. Zeile nützt dabei die Symmetrieeigenschaften des Integrals zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}' aus.

Fasst man nun alle Terme zusammen, so bestimmt sich für eine beliebige Konfiguration das Virialtheorem (Chandrasekhar und Fermi 1953) zu

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2E_{\text{kin}} + 3(\gamma - 1)E_{\text{therm}} + E_{\text{mag}} + E_{\text{grav}} + \mathcal{S}, \quad (1.211)$$

und erlaubt damit eine Aussage über die Umverteilung der einzelnen Energien einer Konfiguration. Die Summe beider Oberflächenterme \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 ist im Term

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi} \int_O (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} - \int_O \left(P_{\text{ext}} + \frac{B^2}{8\pi} \right) \mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} \quad (1.212)$$

zusammengefasst.

1.11.2 Stellare Gleichgewichte

Für einen Stern im hydrostatischen Gleichgewicht, $d/dt = 0$ und $\mathbf{u} = 0$ ist es erlaubt, den externen Druck P_{ext} sowie das Magnetfeld $\mathbf{B} = 0$ zu vernachlässigen. Daraus ergibt sich eine einfachere Version des Virialtheorems

$$3(\gamma - 1)E_{\text{therm}} = -E_{\text{grav}} \quad \text{oder} \quad E_{\text{therm}} = -\frac{E_{\text{grav}}}{3(\gamma - 1)}. \quad (1.213)$$

Diese Relation erlaubt das Umschreiben der thermischen Zeitskala (1.2) mit Hilfe der Gravitationsenergie.

Bezeichnet man die Gesamtenergie mit W , so gilt

$$W = E_{\text{therm}} + E_{\text{grav}} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} E_{\text{grav}}. \quad (1.214)$$

Für einen Stern mit einem mittleren Adiabatenindex von γ findet man demnach

$$W = \frac{E_{\text{grav}}}{2} < 0, \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{5}{3} \quad (1.215)$$

also eine gebundene Konfiguration, da ja $E_{\text{grav}} < 0$ ist. Dagegen gilt

$$W = 0, \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{4}{3}, \quad (1.216)$$

also ein indifferentes Gleichgewicht. Die Energieerhaltung führt auf

$$L + \frac{dW}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad L = -\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dE_{\text{grav}}}{dt}, \quad (1.217)$$

wobei der letzte Term für $\gamma = 5/3$ ausgewertet ist. Daraus sieht man, dass der Stern bei Kontraktion, also Änderung von W , die Hälfte seines Energiegewinns abstrahlt, die andere Hälfte in eine Erhöhung der thermischen Energie steckt.

Die Gravitationsenergie W lässt sich ebenfalls für sphärische Systeme abschätzen. Da für die Ableitung des sphärischen Potentials (vgl. Abschnitt 1.1.2)

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{Gm}{r^2} \quad (1.218)$$

gilt, kann man das verbleibende Integral als die Gravitationsenergie E_{grav}

$$-\int_M \frac{Gm}{r} dm = E_{\text{grav}} \quad (1.219)$$

aufschreiben. Im Falle konstanter Dichte ergibt sich durch einfache Integration beispielsweise

$$E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (1.220)$$

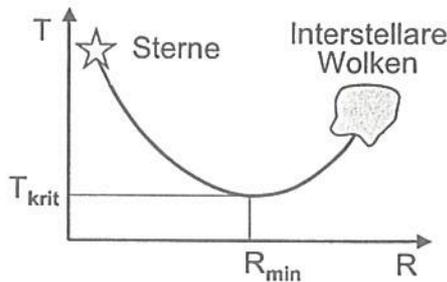


Abbildung 1.15: Schematische Darstellung der Gleichgewichte. Die Existenz des minimalen Radius R_{\min} verhindert einen statischen Übergang von interstellaren Wolken zu Sternen.

Generell hängt die Gravitationsenergie von der Dichteverteilung im Stern ab, und man schreibt allgemeiner für zahlreiche Abschätzungen

$$\underline{E_{\text{grav}}} = -\alpha \frac{GM^2}{R}, \quad (1.221)$$

wobei dann $\alpha \simeq 1$ gilt. Aus dieser Abschätzung und Relation (1.213) folgt schließlich der im ersten Abschnitt verwendete Ausdruck der thermischen Kelvin-Helmholtz Zeitskala (1.2).

1.11.3 Interstellare Wolken

Ist eine sphärische Konfiguration mit Radius R in ein Medium mit konstantem Druck P_{ext} eingebettet, so kann man das Oberflächenintegral (1.200)

$$\underline{S_1} = \int_S P \mathbf{r} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi R^3 P_{\text{ext}} \quad (1.222)$$

leicht auswerten, andernfalls ist eine aufwändigere Berechnung erforderlich. Vernachlässigt man die magnetischen Terme und nimmt man ein Gleichgewicht ohne weitere Bewegungen an, so reduziert sich das Virialtheorem (1.211) auf

$$E_{\text{grav}} + 3(\gamma - 1)E_{\text{therm}} + S_1 = 0. \quad (1.223) \leftarrow$$

Mit Hilfe der vorherigen Überlegungen und der thermischen Energie eines idealen Gases mit konstanter Temperatur T , d.h.

$$\underline{E_{\text{therm}}} = \frac{1}{\gamma - 1} \int_V P dV = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \int_V \rho dV \quad (1.224)$$

$P \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\mathcal{R}T}{\mu}$

ergibt sich aus dem vereinfachten Virialtheorem (1.223) ein Zusammenhang zwischen externem Druck P_{ext} , Temperatur und Radius

$$\frac{3\mathcal{R}}{\mu} MT = \alpha \frac{GM^2}{R} + 4\pi R^3 P_{\text{ext}}. \quad (1.225)$$

Da die rechte Seite dieser Relation für $P_{\text{ext}} \neq 0$ und $M \neq 0$ sowohl bei $R \rightarrow 0$, als auch bei $R \rightarrow \infty$ divergiert, muss dazwischen ein minimaler Radius R_{min} liegen. Schematisch ist dieser Sachverhalt in Abbildung 1.15 erläutert. Sinkt die Temperatur unter ein bestimmtes Minimum, wird daher kein stabiles Gleichgewicht mehr möglich sein und die interstellare Wolke kollabiert. Um R_{min} zu bestimmen, bildet man die Ableitung

$$\frac{d}{dR} \left(\alpha \frac{GM^2}{R} + 4\pi R^3 P_{\text{ext}} \right) = 0 ,$$

woraus sich der minimale Radius zu

$$R_{\text{min}} = \left(\frac{\alpha GM^2}{12\pi P_{\text{ext}}} \right)^{1/4} \quad (1.226)$$

ergibt. Einsetzen von R_{min} in die Gleichgewichtsbedingung (1.225) liefert eine minimale Temperatur T_{min} , die zur Aufrechterhaltung eines Gleichgewichts erforderlich ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{R}}{\mu} MT_{\text{min}} &= \frac{1}{3} \alpha \frac{GM^2}{R_{\text{min}}} + \frac{4\pi}{3} R_{\text{min}}^3 P_{\text{ext}} \\ &= \frac{1}{3} (12\pi P_{\text{ext}})^{1/4} (\alpha G)^{3/4} M^{3/2} + \frac{4\pi}{3} (12\pi)^{-3/4} P_{\text{ext}}^{1/4} (\alpha G)^{3/4} M^{3/2} \\ &= \frac{4}{9} (\alpha G)^{3/4} (12\pi P_{\text{ext}})^{1/4} M^{3/2} . \end{aligned} \quad (1.227)$$

Unterhalb dieser Temperatur T_{min} wird kein stabiles Gleichgewicht möglich sein. Aus der Relation (1.226) erkennt man nach dem Quadrieren weiters, dass

$$\frac{M}{R^2} = \left(\frac{12\pi P_{\text{ext}}}{\alpha G} \right)^{1/2} = f(P_{\text{ext}}) \quad (1.228)$$

eine maximale Säulendichte darstellt, die vom externen Druck P_{ext} abhängt. Übersteigt die Säulendichte M/R^2 einen bestimmten Wert, wird das stellare UV-Licht abgeschirmt, die Wolke kann weiter auskühlen und nach Gleichung (1.153) sinkt die Jeans-Masse, die Wolke kann in sich zusammenfallen. Drückt man den Radius durch Masse und Dichte aus, ergibt sich in Analogie zur Jeansmasse M_J (1.153) folgender Ausdruck

$$M = \left(\frac{3^{7/3}}{4^{1/3} \pi^{1/3} \alpha} \right)^{3/2} \left(\frac{\mathcal{R}}{\mu G} \right)^{3/2} \rho^{-1/2} T^{3/2} . \quad (1.229)$$

Abgesehen vom Vorfaktor entsteht damit die gleiche Abhängigkeit der kritischen Masse von Dichte ρ und Temperatur T , wie sie schon aus den linearisierten hydrodynamischen Gleichungen (Abschnitt 1.7.1) abgeleitet wurde. Die Konsistenz muss bestehen, da das Virialtheorem aus denselben Gleichungen hervorgegangen ist.

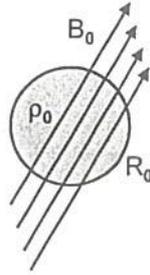


Abbildung 1.16: Eine interstellare Wolke wird von einem homogenen Magnetfeld B_0 durchdrungen und koppelt damit die Wolke an das ISM.

1.11.4 Magnetische Konfigurationen

Eine weitere wichtige Anwendung des Virialtheorems (1.211) untersucht den Einfluss von Magnetfeldern auf das Gleichgewicht. Im einfachsten Fall vergleicht man die magnetische Energie mit der Gravitationsenergie und vernachlässigt dabei auch die Oberflächenterme, d.h.

$$E_{\text{mag}} + E_{\text{grav}} = 0. \quad (1.230)$$

Betrachtet man ein homogenes Feld B_0 und eine homogene Kugel mit Dichte ρ_0 (vergl. Abbildung 1.16), so gilt

$$E_{\text{mag}} = \int_V \frac{B_0^2}{8\pi} dV = \frac{B_0^2 R^3}{6}.$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für die Gravitationsenergie (1.221) erhält man eine kritische Masse M_c , bei der sich Gravitation und Magnetfeld im Gleichgewicht befinden,

$$\frac{B_0^2}{6\alpha G} = \frac{M_c^2}{R^4}. \quad (1.231)$$

Ersetzen des Radius mit Hilfe der Masse und Dichte liefert

$$M_c = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 (6\alpha G)^{-3/2} \frac{B_0^3}{\rho^2}. \quad (1.232)$$

Umrechnen der Dichte ρ_0 in eine Teilchendichte $\rho_0 = \mu m_p n_0$ mit $\mu = 1.2$ und $\alpha = 3/5$ zeigt die kritische Masse in physikalischen (problemorientierten) Einheiten

$$M_c = 6 \cdot 10^4 \left(\frac{B_0}{[1 \mu\text{G}]}\right)^3 \left(\frac{n_0}{[10^6 \text{m}^{-3}]}\right)^{-2} M_\odot. \quad (1.233)$$

Im Fall $M < M_c$ kann ein Magnetfeld der Stärke B_0 die interstellare Wolke stabilisieren, im Fall $M > M_c$ kann das Magnetfeld einen Kollaps nicht verhindern.

Ein weiteres wichtiges Konzept stellt der *magnetische Fluss* Φ_M durch eine Fläche \mathcal{F} mit einem gerichteten Flächenelement df und einem geschlossenen Rand \mathcal{L} dar (Abbildung 1.17). Seine Definition lautet

$$\Phi_M = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}, \quad (1.234)$$

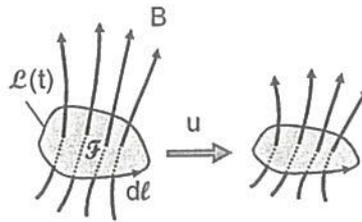


Abbildung 1.17: Erhaltung des magnetischen Flusses Φ_M durch eine Fläche \mathcal{F} , die von einer geschlossenen Kurve $\mathcal{L}(t)$ berandet ist. Im Lauf der Zeit verformen sich \mathcal{F} und \mathcal{L} durch ein Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} . Anschaulich: Die Anzahl der Feldlinien durch die von \mathcal{L} aufgespannte Fläche \mathcal{F} bleibt erhalten.

der bei hoher (unendlicher) Leitfähigkeit λ erhalten bleibt

$$\frac{d\Phi_M}{dt} = 0 \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty. \quad (1.235)$$

Anschaulich gesprochen bedeutet die letzte Bedingung, dass die 'Anzahl' der Feldlinien durch eine Fläche erhalten bleibt. Im Weltraum sind fast immer genügend Ladungsträger vorhanden, sodass Gleichung (1.235) oftmals eine sehr gute Näherung darstellt.

Betrachtet man einen sphärischen Kollaps einer Wolke, die von einem anfänglichen Radius R_0 zum Radius R kontrahiert und von einem homogenen Magnetfeld B_0 durchdrungen ist, so gelten Fluss- bzw. Massenerhaltung

$$\Phi_M = \pi B_0 R_0^2 = \pi B R^2 \quad (1.236)$$

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R_0^3 = \frac{4\pi}{3} \rho R^3. \quad (1.237)$$

Aus den beiden Relationen lässt sich ableiten, wie sich das Magnetfeld während der Kompression verstärkt

$$\frac{B}{B_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3}. \quad (1.238)$$

In diesem Fall sieht man, dass die magnetische kritische Masse M_c (1.232) erhalten bleibt.

Allgemein haben numerische Rechnungen gezeigt, dass eine leicht modifizierte Version von (1.238) gilt, nämlich

$$\frac{B}{B_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa \quad \text{mit } \kappa \simeq \frac{1}{2}. \quad (1.239)$$

Eingesetzt in Relation (1.233) ergibt das

$$M_c = 5 \cdot 10^4 \left(\frac{n_0}{[10^6 \text{ m}^{-3}]} \right)^{-2+3\kappa} M_\odot, \quad (1.240)$$

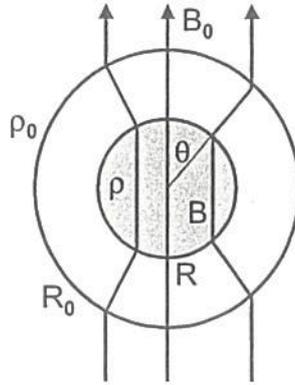


Abbildung 1.18: Schematischer Verlauf der Feldlinien bei einem sphärischen Kollaps vom Radius R_0 zum Radius R . Das Magnetfeld in der Zwischenzone ist radial gerichtet.

wobei sich der etwas kleinere Vorfaktor ebenfalls aus numerischen Gleichgewichtsrechnungen (Mouschovias 1976) ergeben hat.

Diese magnetischen Gleichgewichte stellen das Analogon zu den isothermen Bonnor-Ebert-Sphären (vergl. Abschnitt 1.5) dar. Auch hier gilt, dass Stabilität nur bis zu einem maximalen Verhältnis von Außendichte zu zentraler Dichte von $\rho_c/\rho \lesssim 30$ möglich ist.

Aus der kritischen Masse M_c (1.232) und der Definition des magnetischen Flusses (1.234) leitet sich folgende Relation ab

$$M_c^2 = \frac{\Phi_M^2}{6\pi^2\alpha G}. \quad (1.241)$$

Berechnet man die magnetische Energie, der in Abbildung 1.18 dargestellten Konfiguration, so setzt sie sich aus der magnetischen Energie der inneren Kugel mit Radius R , dem Zwischenmedium ($R \leq r \leq R_0$) und den Oberflächentermen zusammen.

$$E_{\text{mag}} = \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{8\pi} \int_R^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi B_r^2 r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr. \quad (1.242)$$

Die radiale Komponente B_r im Zwischenbereich ergibt sich aus der Divergenzfreiheit des radialen Magnetfeldes, d.h.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 B_r) = 0, \quad \text{oder} \quad r^2 B_r = \text{const.}$$

Die Integrationskonstante ist am Rand $r = R_0$ bestimmt und es gilt

$$B_r = B_0 \cos\theta \left(\frac{R_0}{r} \right)^2. \quad (1.243)$$

Nach Einsetzen in Gleichung (1.242) lassen sich die Integrationen elementar durchführen und man gelangt zu

$$E_{\text{mag}} = \frac{B^2 R^3}{6} + \frac{B_0^2 R_0^4}{6} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right). \quad (1.244)$$

Es bleibt die Bestimmung der Oberflächenterme, die man mit Hilfe eines Tricks berechnen kann (Mestel 1965). Dazu legen wir den Rand außerhalb von R_0 und so kann der Lorentz-Term im Virialtheorem $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ keinen Beitrag liefern, d.h. der Oberflächenterm muss gleich dem negativen Volumenterm sein

$$S = -\frac{B_0^2 R_0^3}{6} = -\frac{B^2 R^4}{6R_0}, \quad (1.245)$$

wobei die letzte Umformung aus der Flusserhaltung (1.236) stammt. Das Zusammenfügen aller Terme liefert schließlich

$$E_{\text{mag}} + S + E_{\text{grav}} = \frac{B^2 R^4}{3} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right] - \alpha \frac{GM^2}{R} = 0. \quad (1.246)$$

Umgeformt mit Hilfe des magnetischen Flusses (1.236) liefert dieser Ausdruck

$$\left[\frac{\Phi_M^2}{3\pi^2 \alpha G} \left(1 - \frac{R}{R_0} \right) - M^2 \right] \frac{1}{R} = 0. \quad (1.247)$$

Die magnetische kritische Masse M_c aus Gleichung (1.232) erlaubt (bis auf einen Faktor 2) eine weitere Umformung

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \left(\frac{M}{M_c} \right)^2. \quad (1.248)$$

Aus dieser Relation ist ersichtlich, dass für $M < M_c$ die Wolke von einem anfänglichen Radius R_0 bis zu einem Gleichgewichtsradius R kontrahiert. Die Feldlinien sind dann so verbogen, dass die magnetischen Zugspannungen den weiteren Kollaps verhindern können.

1.12 Stoßwellen

1.12.1 Rankine-Hugoniot-Bedingungen

Zur näheren Betrachtung der Ausbreitung solcher hydrodynamischer *Unstetigkeiten*, wird die Welle als infinitesimal dünn angesehen. Um das physikalische Bild weiter zu vereinfachen, nehmen wir ein Koordinatensystem an, in dem die Unstetigkeit ruht. Um in das System der Beobachter zu transformieren, muss man die Stoßgeschwindigkeit u_s kennen, die sich z.B. aus den Anfangsbedingungen ergibt. Die Stoßfläche sei in der (y, z) -Ebene gelegen, die Strömung nur in x -Richtung. Das Medium vor der Stoßwelle ist durch den Index 0, das Medium nach dem Stoßdurchgang mit dem Index 1 bezeichnet. Weiters betrachten wir in einer stationären Situation die Kontinuitätsgleichung

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = \oint_O \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (1.249)$$

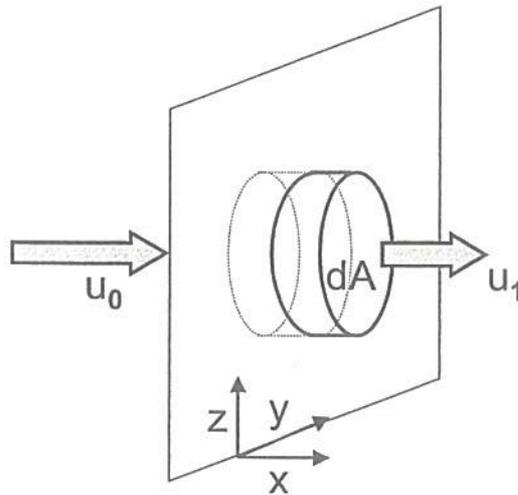


Abbildung 1.19: Eindimensionale, ebene Stoßwelle in x-Richtung. Die Darstellung zeigt den Bereich, über den die hydrodynamischen Gleichungen integriert werden, um die Stoßbedingungen (Erhaltungssätze) abzuleiten.

Eine Auswertung des Oberflächenintegrals über die *Dose* (siehe Abbildung 1.19) liefert die Massenerhaltung

$$\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1. \quad (1.250)$$

In analoger Weise können wir die Impulsbilanz über die Diskontinuität bilden und erhalten

$$\rho_0 u_0^2 + P_0 = \rho_1 u_1^2 + P_1. \quad (1.251)$$

Mit der Energiegleichung haben wir die dritte Erhaltungsgleichung

$$e_0 + \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{u_0^2}{2} = e_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} \quad (1.252)$$

abgeleitet, die sich mit Hilfe der Enthalpie $h = e + P/\rho$ als

$$h_0 + \frac{u_0^2}{2} = h_1 + \frac{u_1^2}{2} \quad (1.253)$$

übersichtlicher schreiben lässt. In unserem Fall nehmen wir ein ideales Gas mit Adiabatenindex γ an. Die Enthalpie ergibt sich dann zu

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad (1.254)$$

und wir erhalten aus (1.253)

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{u_0^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2}. \quad (1.255)$$

Die Gleichungen (1.250, 1.251, 1.255) heißen auch *Rankine-Hugoniot Bedingungen* und bilden ein System von 3 algebraischen Gleichungen für die 6 Unbekannten ρ_0 ,

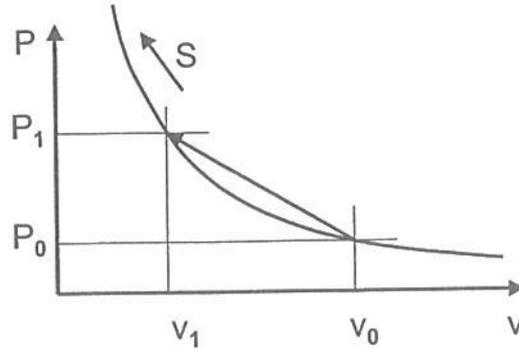


Abbildung 1.20: Hugoniot-Kurve einer Stoßwelle, die den Anfangszustand ρ_0, P_0 mit dem Endzustand ρ_1, P_1 verbindet. Entlang einer solchen Hugoniot-Kurve nimmt die Entropie S von rechts nach links zu.

$P_0, u_0, \rho_1, P_1, u_1$. Einerseits ist der Zustand vor der Stoßwelle (ρ_0, P_0, u_0) bekannt, andererseits führt die Bewegung der Stoßwelle mit der Geschwindigkeit u_s zu einer weiteren Unbekannten. Mit einer Parametrisierung über die Machzahl (siehe Abschnitt 1.12.2) findet man dann eine eindeutige Lösung des Problems, d.h. der Zustand hinter dem Stoß kann mit ρ_1, P_1, u_1 eindeutig charakterisiert werden.

Mit der Einführung des spezifischen Volumens $v = 1/\rho$ lässt sich (1.250) als

$$\frac{u_0}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{v_0}{v_1} \quad (1.256)$$

schreiben und aus der Impulsbilanz (1.251) folgt

$$\frac{u_0^2}{v_0} - \frac{u_1^2}{v_1} = P_1 - P_0 \quad \text{und} \quad u_1^2 = v_1^2 \frac{P_1 - P_0}{v_0 - v_1}. \quad (1.257)$$

Setzen wir die Relation (1.256) nochmals ein, so finden wir

$$u_0^2 = v_0^2 \frac{P_1 - P_0}{v_0 - v_1}. \quad (1.258)$$

Mit Hilfe der Energieerhaltung (1.255), sowie den obigen Relationen (1.257, 1.258) gilt

$$\frac{1}{2}[u_1^2 - u_0^2] = \frac{1}{2}[v_1^2 - v_0^2] \frac{P_1 - P_0}{v_0 - v_1} = h_0 - h_1. \quad (1.259)$$

Daraus können wir eine Beziehung ableiten, welche die Werte vor und hinter dem Stoß verbindet,

$$\frac{1}{2}[v_0 + v_1][P_1 - P_0] = h_1 - h_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}[P_1 v_1 - P_0 v_0], \quad (1.260)$$

oder allgemein daraus eine sogenannte *Hugoniot-Kurve*

$$P_1 = \mathcal{H}(P_0, v_0, v_1) \quad (1.261)$$

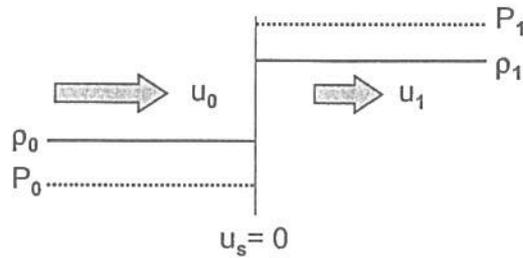


Abbildung 1.21: Schematischer Verlauf von Druck P und Dichte ρ über eine Stoßfront hinweg. Die Größen sind im System der Stoßwelle (d.h. $u_s = 0$) dargestellt.

ableiten. Entlang dieser Kurve (Abb. 1.20) ordnen sich alle möglichen Zustände hinter der Stoßfront an, in unserem Fall handelt es sich dabei um eine Hyperbel. Es lässt sich allgemein zeigen, dass über eine Stoßfront die Entropie $S \sim \ln P/\rho$ zunehmen muss und dass daher nur Verdichtungen $\rho_1 > \rho_0$ möglich sind. Der schematische Verlauf der Variablen über eine Stoßfront ist in Abbildung (1.21) dargestellt.

Berechnen wir nun aus (1.260)

$$P_1 \left[\frac{1}{2}(v_0 + v_1) - \frac{\gamma}{\gamma - 1}v_1 \right] = P_0 \left[\frac{1}{2}(v_0 + v_1) - \frac{\gamma}{\gamma - 1}v_0 \right], \quad (1.262)$$

woraus sich unmittelbar das Druckverhältnis

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{(\gamma + 1)v_0 - (\gamma - 1)v_1}{(\gamma + 1)v_1 - (\gamma - 1)v_0} \quad (1.263)$$

oder das Dichte- und Kompressionsverhältnis

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{(\gamma - 1)P_1 + (\gamma + 1)P_0}{(\gamma + 1)P_1 + (\gamma - 1)P_0} \quad (1.264)$$

bestimmen lässt. Da wir ein ideales Gas mit $T \propto Pv$ angenommen haben, gilt für das Temperaturverhältnis

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{P_1 v_1}{P_0 v_0}. \quad (1.265)$$

Hinter dem Stoß muss $P_1 > P_0$ gelten und im Grenzfall eines starken Stoßes folgt für $\gamma > 1$ das Kompressionsverhältnis

$$P_1 \gg P_0 : \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{T_1}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{P_1}{P_0}. \quad (1.266)$$

Im Fall eines isothermen Stoßes $\gamma = 1$ geht formal $\rho_1/\rho_0 \rightarrow \infty$ und ein derartiger Stoß kann nur (ohne darauf hier einzugehen) mit Hilfe eines Energietransportes weg von der Stoßregion korrekt beschrieben werden.

1.12.2 Machzahl

Bezeichnen wir mit $a_{0,1}$ die Schallgeschwindigkeiten in den beiden Medien vor (0) und hinter (1) dem Stoß, so sind die *Machzahlen* $M_{0,1}$ durch das Verhältnis zur Strömungsgeschwindigkeit im System des Stoßes gegeben, d.h.

$$a_{0,1}^2 = \gamma \frac{P_{0,1}}{\rho_{0,1}}, \quad M_{0,1} = \frac{u_{0,1}}{a_{0,1}}. \quad (1.267)$$

Nach einigen Umformungen mit Hilfe der obigen Gleichungen lässt sich zeigen, dass einerseits

$$v > a_s \quad M_0^2 = \frac{1}{2\gamma} \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{P_1}{P_0} \right] > 1 \quad (1.268)$$

gilt, da in einem Stoß stets $P_1/P_0 > 1$, und dass $P_1/P_0 \rightarrow 1$ auch zu $M_0 \rightarrow 1$ führt. Andererseits ist

$$v < a_s \quad M_1^2 = \frac{1}{2\gamma} \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{P_0}{P_1} \right] < 1 \quad (1.269)$$

gültig. Aus diesen Bedingungen sehen wir $u_0 > a_0$ und $u_1 < a_1$, so dass ein Stoß immer einen Überschall-Unterschall Übergang darstellt. Für einen starken Stoß mit $P_0/P_1 = 0$ finden wir als Grenzfall

$$M_1 = \frac{u_1}{a_1} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \quad (1.270)$$

vor. Mit Einführung der Größe

$$\mu^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (1.271)$$

können wir das Druckverhältnis (1.263) in einer kompakten Form mit der Machzahl M_0 aus dem Vorland des Stoßes schreiben

$$\frac{P_1}{P_0} = (1 + \mu^2) M_0^2 - \mu^2, \quad (1.272)$$

bzw. lässt sich für das Kompressionsverhältnis (1.264)

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1) M_0^2}{2 + (\gamma - 1) M_0^2} \quad (1.273)$$

ableiten.

Da für die Machzahl im Vorland $M_0 > 1$ gilt und da nach dem Stoß $M_1 < 1$ erfüllt ist, müssen sich hintereinander laufende Stoßwellen stets einholen. Die Wechselwirkung von Stoßwellen hängt stark von dem Adiabatenindex γ ab. Wie eingangs erwähnt, ist die Machzahl im stationären Fall ein Parameter, der sich z.B. aus den Anfangsbedingungen einer zeitlichen Entwicklung ergibt.

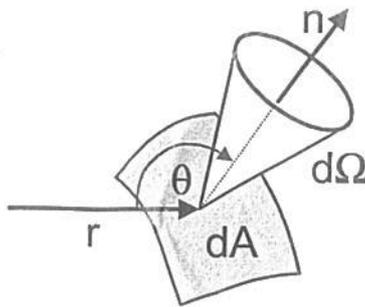


Abbildung 1.22: Eigenschaften der spezifischen Intensität $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$, die vom Ort \mathbf{r} , der Blickrichtung \mathbf{n} , der Frequenz ν und der Zeit t abhängt. Zwischen dem Ortsvektor \mathbf{r} und der Blickrichtung \mathbf{n} wird der Winkel θ aufgespannt.

1.13 Strahlungsfelder

1.13.1 Strahlungsintensität

Die wichtigste Größe bei der Beschreibung von Strahlungsfeldern stellt die spezifische Intensität $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ dar, die vom Ort \mathbf{r} , der Blickrichtung \mathbf{n} , der Zeit t und der Frequenz ν abhängt. Sie ist über die Energiemenge dE definiert, die durch eine Fläche dA , orientiert in Richtung \mathbf{n} pro Zeit- und Frequenzintervall geht,

$$dE = I_\nu dA d\Omega dt d\nu. \quad (1.274)$$

Das Raumwinkelement $d\Omega$ lässt sich in sphärischer Geometrie als

$$d\Omega = d\varphi \sin \theta d\theta \quad (1.275)$$

schreiben und wir werden im Folgenden oft axialsymmetrische Strahlungsfelder beschreiben, d.h. eine Integration über den Azimutwinkel φ durchführen können. Die grundsätzliche Anordnung ist in Abbildung 1.22 dargestellt.

1.13.2 Nettostrahlungsfluss

Nehmen wir ein Flächenelement dA , das in Richtung \mathbf{n} orientiert ist (vergl. Abbildung 1.22). Durch dieses Element geht in Richtung von $d\Omega$ ein differentieller Fluss dF_ν , der eine effektive Fläche $\cos \theta dA$ sieht

$$dF_\nu = I_\nu \cos \theta d\Omega, \quad (1.276)$$

d.h. der gesamte Fluss ergibt sich durch Integration über alle Raumwinkel

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega. \quad (1.277)$$

Da man im Falle von Isotropie die spezifische Intensität $I_\nu \neq I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$ vor das Integralzeichen ziehen kann, ist in diesem Fall der Nettofluss gleich null, da $\int \cos \theta d\Omega = 0$ gilt. Anschaulich kommt aus jeder Richtung der gleiche Energieanteil, der sich im Integral weghebt.

1.13.3 Strahlungsdruck

Zur Berechnung des Strahlungsdruckes bedenken wir, dass nur die Normalkomponente des Impulses auf unser Flächenelement dA übertragen wird (vergl. Abbildung 1.22), und dass der Photonenimpuls durch $h\nu/c$ gegeben ist,

$$P_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega. \quad (1.278)$$

1.13.4 Strahlungsenergiedichte

Die spezifische Strahlungsenergiedichte u_ν definieren wir als die Energie pro Einheitsvolumen dV und Frequenzintervall $d\nu$. Um eine Verbindung mit der spezifischen Intensität I_ν herzustellen, gehen wir von der Strahlungsenergiedichte pro Raumwinkel $u_\nu(\Omega)$ aus, d.h. es muss gelten

$$dE = u_\nu(\Omega) dV d\Omega d\nu = u_\nu(\Omega) dA c dt d\Omega d\nu, \quad (1.279)$$

wobei wir das Zylindervolumen als $dV = dA c dt$ angesetzt haben. Der Vergleich mit Gleichung (1.274) zeigt,

$$u_\nu(\Omega) = \frac{I_\nu}{c} \quad (1.280)$$

und nach Integration über den Raumwinkel erhält man für die spezifische Strahlungsenergiedichte

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega. \quad (1.281)$$

1.13.5 Strahlungsmomente

Im Folgenden wollen wir die Abhängigkeiten im Strahlungsfeld etwas vereinfachen, und nehmen nur axialsymmetrische Felder an, d.h. wir können die Integration über $d\varphi$ durchführen. Dazu verwenden wir

$$\mu = \cos \theta, \quad d\mu = -\sin \theta d\theta. \quad (1.282)$$

Beginnend mit der Strahlungsenergiedichte berechnen wir

$$\begin{aligned} J_\nu &= \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu, \end{aligned} \quad (1.283)$$

sowie die höheren Momente in den Potenzen von $\mu = \cos \theta$ als

$$\begin{aligned} H_\nu &= \frac{1}{4\pi} \int I_\nu \cos \theta d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu \end{aligned} \quad (1.284)$$

sowie den Strahlungsdruck

$$\begin{aligned} K_\nu &= \frac{1}{4\pi} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu. \end{aligned} \quad (1.285)$$

Diese Definitionen gehen auf Eddington zurück und der Vergleich dieser mathematischen Größen mit den physikalischen Termen (1.281, 1.277, 1.278) sei hier nochmals zusammengefasst:

$$\begin{aligned} u_\nu &= \frac{4\pi}{c} J_\nu, & J_\nu &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu \\ F_\nu &= 4\pi H_\nu & H_\nu &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu \\ P_\nu &= \frac{4\pi}{c} K_\nu & K_\nu &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu. \end{aligned} \quad (1.286)$$

1.13.6 Eddington-Faktor

Betrachten wir ein anisotropes Strahlungsfeld I_ν am Ort r und entwickeln wir es in eine Potenzreihe nach dem Winkel $\mu = \cos \theta$,

$$I_\nu(r, \mu) = a_\nu(r) + b_\nu(r)\mu + c_\nu(r)\mu^2 + \dots, \quad (1.287)$$

die wir aber für die weitere Berechnung nach dem linearen Glied abbrechen. Bestimmen wir nun die Momente der Intensitätsverteilung (1.287), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_0: \quad J_\nu &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [a_\nu(r) + b_\nu(r)\mu] d\mu = a_\nu(r) \\ \mu_1: \quad H_\nu &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [a_\nu(r) + b_\nu(r)\mu] \mu d\mu = \frac{b_\nu(r)}{3} \\ \mu_2: \quad K_\nu &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [a_\nu(r) + b_\nu(r)\mu] \mu^2 d\mu = \frac{a_\nu(r)}{3}, \end{aligned} \quad (1.288)$$

bzw. aus dem Vergleich von 0-tem und 2-tem Moment

$$K_\nu = \frac{J_\nu}{3}. \quad (1.289)$$

Dieser Idee folgend können wir nun den sogenannten *Eddington-Faktor*

$$f_\nu = \frac{K_\nu}{J_\nu} \quad (1.290)$$

definieren, der sich im Fall isotroper bzw. leicht anistropen (1.287, bis zur 1. Ordnung in μ) Strahlungsfelder zu $f_\nu = 1/3$ ergibt. Der Eddingtonfaktor beinhaltet im Wesentlichen die Geometrie des Strahlungsfeldes und in fast allen Fällen gilt $1/3 \leq f_\nu \leq 1$. Im allgemeinen Fall ist der Strahlungsdruck K_ν ein symmetrischer Tensor, so dass auch der Eddington-Faktor zum Eddington-Tensor wird.

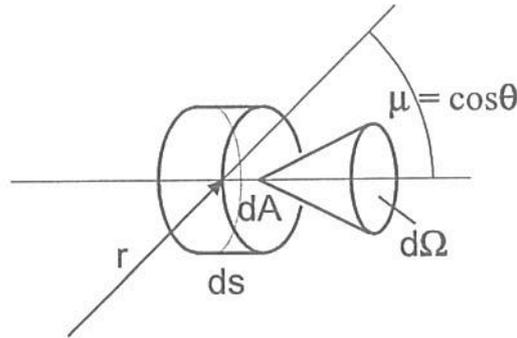


Abbildung 1.23: Geometrie der Strahlungstransportgleichung.

1.14 Strahlungstransport

1.14.1 Strahlungstransportgleichung

Um weitere Eigenschaften von Strahlungsfeldern zu untersuchen, leiten wir in einer einfachen Form die Strahlungstransportgleichung her. Dazu ziehen wir Bilanz, d.h. es soll lokaler Verlust gleich lokaler Gewinn gelten. Wie in Abbildung 1.23 zu sehen ist, kommt an der Unterseite des Zylinders dA die Strahlung $I_\nu(r, \theta, t)$ unter dem Raumwinkel $d\Omega$ hinein, an der Oberseite tritt die Strahlung $I_\nu(r + dr, \theta + d\theta, t + dt)$ aus. In Inneren des Zylinders kann Strahlung entlang des Weges ds absorbiert werden, wobei folgender linearer Ansatz zum Tragen kommt. Es wird der Anteil

$$-I_\nu \alpha_\nu ds \quad (1.291)$$

aus dem Strahl herausgenommen. Durch diese Gleichung haben wir den Absorptionskoeffizienten $\alpha_\nu = \kappa_\nu \rho$ eingeführt, der die Dimension Fläche pro Masse hat. Im Rückgriff auf andere Elementarprozesse sehen wir, dass die Absorption als Wirkungsquerschnitt pro Masse verständlich wird, bzw. $\kappa_\nu \rho$ die Einheit $1/\text{Länge}$ hat. Die Größe κ_ν heißt *Opazität* und liegt für die astrophysikalischen Anwendung meist in Form von Tabellen vor.

Die Emission im Zylinder schreiben wir als

$$j_\nu ds = \frac{\epsilon_\nu}{4\pi} \rho ds, \quad (1.292)$$

wobei der rechte Teil für isotrope Emission gilt und der Faktor 4π als Normierung über den Raumwinkel explizit mitgenommen wird.

Sammeln wir alle Terme zusammen, so ergibt sich folgende Bilanz

$$\begin{aligned} I_\nu(r, \theta, t) dA d\omega - I_\nu(r + dr, \theta + d\theta, t + dt) dA d\omega \\ - I_\nu \kappa_\nu \rho dA d\omega ds + \frac{\epsilon_\nu}{4\pi} \rho dA d\omega ds = 0. \end{aligned} \quad (1.293)$$

Den zweiten Term entwickeln wir bis zur ersten Ordnung,

$$I_\nu(r + dr, \theta + d\theta, t + dt) = I_\nu(r, \theta, t) + \frac{\partial I_\nu}{\partial r} dr + \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial I_\nu}{\partial t} dt + \dots \quad (1.294)$$

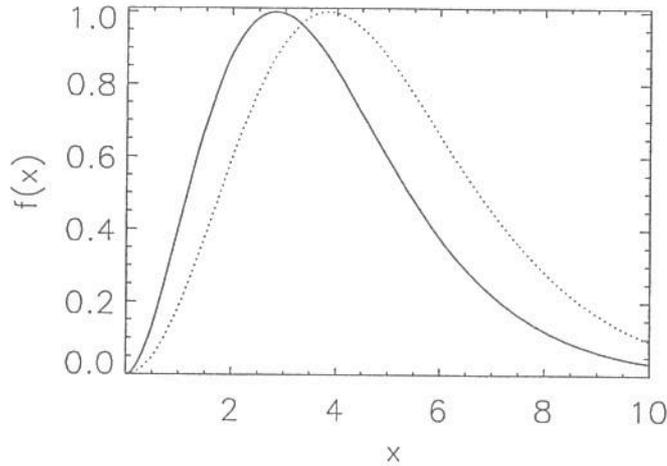


Abbildung 1.24: Der funktionale Verlauf der Planckfunktion mit $x = h\nu/kT$ und $f(x) = x^3/(e^x - 1)$ als durchgezogene Linie. Die Ableitung der Planckfunktion nach der Temperatur tritt als Gewicht beim Rosseland-Mittel auf und ist als $g(x) = x^4 e^x / (e^x - 1)^2$ strichliert dargestellt. Beide Kurven sind auf eins normiert.

Eingesetzt in (1.293) erhalten wir nach dem Kürzen von $dAd\omega$

$$-\left[\frac{\partial I_\nu}{\partial r} dr + \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial I_\nu}{\partial t} dt \right] - I_\nu \kappa_\nu \rho ds + \frac{\varepsilon_\nu}{4\pi} \rho ds = 0. \quad (1.295)$$

Das verbleibende Wegelement ds lässt sich einfach geometrisch ausrechnen,

$$\begin{aligned} dr &= \cos \theta ds \\ rd\theta &= -\sin \theta ds \\ cdt &= ds, \end{aligned} \quad (1.296)$$

um schließlich mit der Strahlungstransportgleichung (STG) zu enden

$$\cos \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \theta} + \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + I_\nu \kappa_\nu \rho - \frac{\varepsilon_\nu}{4\pi} \rho = 0. \quad (1.297)$$

In Falle thermischer Emission gilt das *Kirchhoff'sche Gesetz*

$$\frac{\varepsilon_\nu}{4\pi} = \kappa_\nu B_\nu(T), \quad (1.298)$$

mit der Planckfunktion (siehe Abbildung 1.24)

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (1.299)$$

Nehmen wir beispielsweise den Fall einer isotropen, homogenen und zeitunabhängigen *Hohlraumstrahlung* an, d.h. alle Ableitungen der STG (1.297) verschwinden, so gilt

$$I_\nu = B_\nu(T). \quad (1.300)$$

Berechnen wir in diesem Fall die Energiedichte (1.281) mit (1.283)

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 B_\nu(T) d\mu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T), \quad (1.301)$$

bzw. durch Integration der Planck-Funktion über alle Frequenzen

$$u_{\text{rad}} = \int_0^\infty u_\nu d\nu = a_R T^4, \quad \text{mit} \quad a_R = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} \quad (1.302)$$

und erhalten das *Stefan-Boltzmann'sche Gesetz*.

Unter Zuhilfenahme von $\mu = \cos\theta$ und nach Einführung der *Quellfunktion*

$$S_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{4\pi\kappa_\nu} \quad (1.303)$$

können wir die STG (1.297) im stationären Fall in eine kompaktere Form umschreiben

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} \right) \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} + \kappa_\nu \rho (I_\nu - S_\nu) = 0. \quad (1.304)$$

Wir haben schon gesehen, dass im Fall thermischen Gleichgewichts das Kirchhoff'sche Gesetz gilt, d.h.

$$S_\nu = B_\nu(T). \quad (1.305)$$

1.14.2 Strahlungstransport im Sterninneren

Von der stationären Strahlungstransportgleichung (1.304) ausgehend bilden wir zunächst das 1. Moment,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mu I_\nu d\mu + \frac{\partial}{\partial r} \int \mu^2 I_\nu d\mu + \frac{1}{r} \int (\mu - \mu^3) \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} d\mu + \int \kappa_\nu \rho (I_\nu - S_\nu) \mu d\mu = 0, \quad (1.306)$$

das wir durch partielle Integration auf eine Gleichung für den Strahlungsdruck vereinfachen können

$$\frac{dH_\nu}{dt} + \frac{dK_\nu}{dr} - \frac{3K_\nu - J_\nu}{r} = -\kappa_\nu \rho H_\nu, \quad (1.307)$$

wobei eine isotrope Quellfunktion S_ν angenommen wird. Im Sterninneren sind die Dichten so hoch, dass sowohl die Eddington-Näherung (siehe Abschnitt 1.13.6) als auch das lokale thermodynamische Gleichgewicht (LTE) mit $J_\nu = B_\nu(T)$ gilt,

$$K_\nu = \frac{1}{3} J_\nu = \frac{1}{3} B_\nu(T), \quad (1.308)$$

wodurch der zweite Term auf der linken Seite wegfällt. Mit Hilfe der Beziehung zwischen dem 1. Moment H_ν aus (1.286) und dem Strahlungsfluss F_ν haben wir dann

$$\frac{dB_\nu(T)}{dr} = -3\kappa_\nu \rho H_\nu = -\frac{3\kappa_\nu \rho}{4\pi} F_\nu. \quad (1.309)$$

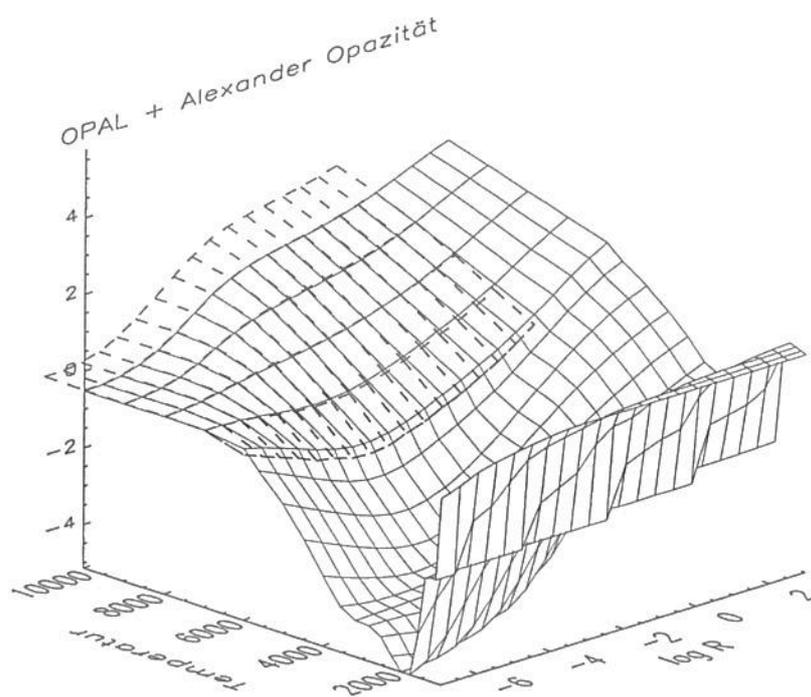


Abbildung 1.25: Ein Ausschnitt aus dem Rosseland-Mittel κ_R der Opazität als Funktion der Temperatur T und $R = \rho/T_6^3$, wobei $T_6 = T/[10^6 \text{ K}]$. Die gestrichelten Kurven zeigen die OPAL-Opazitäten, die durchgezogenen Linien stellen die Opazitäten nach Alexander et al. (1994) für niedrigere Temperaturen dar. Beide Bereiche überlappen sich und stimmen in den Übergangszonen relativ gut überein.

Der Gesamtfluss ergibt sich dann aus einer Integration über alle Frequenzen

$$F_{\text{rad}} = \int_0^\infty F_\nu d\nu = -\frac{4\pi}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu(T)}{dr} d\nu. \quad (1.310)$$

Diese Gleichung können wir nun umschreiben, um daraus eine einfachere, bzw. von der Struktur des Sterns unabhängige Größe zu extrahieren

$$F_{\text{rad}} = -\frac{4\pi}{3\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} d\nu = -\frac{4\pi}{3\rho} \frac{\partial T}{\partial r} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu. \quad (1.311)$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, das sogenannte *Rosseland-Mittel* der frequenzabhängigen Opazität zu definieren

$$\frac{1}{\kappa_{\text{R}}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}. \quad (1.312)$$

Der funktionale Verlauf der Gewichtsfunktion $dB_\nu(T)/dT$ ist in Abbildung 1.24 als strichlierte Kurve dargestellt. Die Integration der Planckfunktion $B_\nu(T)$ über die Frequenz liefert

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{a_{\text{RC}}}{4\pi} T^4 \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu = \frac{a_{\text{RC}}}{\pi} T^3, \quad (1.313)$$

so dass wir den radiativen Fluss aus (1.311)

$$F_{\text{rad}} = -\frac{4a_{\text{RC}}}{3\rho\kappa_{\text{R}}} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (1.314)$$

bzw. die Leuchtkraft L_{r} für die Verwendung im Sternaufbau als

$$L_{\text{r}} = -\frac{16\pi a_{\text{RC}}}{3\rho\kappa_{\text{R}}} r^2 T^3 \frac{dT}{dr} \quad (1.315)$$

schreiben können.

Das Rosseland-Mittel liegt heute meistens in Form von Tabellen, $\kappa_{\text{R}} = \kappa_{\text{R}}(\rho, T)$ für verschiedene chemische Mischungen vor (siehe Abbildung 1.25). Da die frequenzabhängige Opazität κ_ν in nichtlinearer Weise zur Mittelbildung (1.312) beiträgt, muss eine solche Tabelle für jede chemische Mischung zur Verfügung stehen. Die Gewichtsfunktion dB_ν/dT im Rosseland-Mittel unterscheidet sich in der Form kaum von der Planckfunktion B_ν , die Opazität κ_ν betont hingegen die Minima in der Durchsichtigkeit, d.h. die Photonen versuchen auf dem einfachsten Weg dem stellaren Plasma zu entkommen.

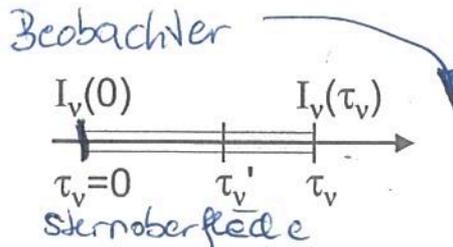


Abbildung 1.26: Die Intensität an der Stelle $I_\nu(\tau_\nu)$ setzt sich aus der eingestrahnten Intensität $I_\nu(0)$ sowie den Anteilen $0 \leq \tau'_\nu \leq \tau_\nu$ zusammen.

1.14.3 Formale Lösung der ebenen Strahlungstransportgleichung

Die allgemeinen Eigenschaften der STG lassen sich in einer planparallelen Schichtung anschaulich diskutieren. Dazu lassen wir formal den Radius groß werden $r \rightarrow \infty$. Zur besseren Unterscheidung nennen wir unsere Raumkoordinate nun z ,

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} + \kappa_\nu \rho (I_\nu - S_\nu) = 0. \quad (1.316)$$

Wir definieren die *optische Tiefe* als natürliche Skala der Photonenwegstrecken

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho dz \quad \text{oder} \quad \tau_\nu = \int_{z_0}^{z_1} \kappa_\nu \rho dz, \quad (1.317)$$

womit sich Gleichung (1.316) als

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \quad (1.318)$$

aufschreiben lässt. Diese Gleichung kann formal gelöst werden, wenn man bedenkt, dass $e^{\tau_\nu/\mu}$ den integrierenden Faktor angibt. Mit

$$\mathcal{J} = I_\nu e^{\tau_\nu/\mu} \quad \text{und} \quad \mathcal{S} = S_\nu e^{\tau_\nu/\mu} \quad (1.319)$$

transformiert sich (1.318) auf

$$\mu \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \tau_\nu} = \mathcal{S} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}(\tau_\nu) = \mathcal{J}(0) + \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau_\nu} \mathcal{S}(\tau'_\nu) d\tau'_\nu, \quad (1.320)$$

die wir sofort formal integriert haben. Die Rücksubstitution von (1.319) in die letzte Gleichung liefert die formale Lösung der STG (auch in Abbildung 1.26 dargestellt)

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)/\mu} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu. \quad (1.321)$$

Allerdings handelt es sich dabei um eine formale Lösung, weil S_ν a priori nicht bekannt ist und $S_\nu = S_\nu(I_\nu)$ gilt. Normalerweise ist die optische Tiefe positiv $\tau_\nu > 0$ und die Lösung lässt sich anschaulich interpretieren. Es ist aber möglich, dass $\tau_\nu < 0$ wird, und man auf diese Art ein exponentielles Ansteigen der Intensität I_ν erhält. Diese sogenannte *Laser-* oder *Maser-Emission* wird hier nicht weiter diskutiert.

Im einfachsten Fall setzt man S_ν konstant und erhält

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0) e^{-\tau_\nu/\mu} + \frac{S_\nu}{\mu} \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)/\mu} d\tau'_\nu \\ &= S_\nu + e^{-\tau_\nu/\mu} (I_\nu(0) - S_\nu). \end{aligned} \quad (1.322)$$

Dadurch gelangt man zur Definition von

$$\begin{array}{ll} \tau_\nu \gg 1 & \text{optisch dick,} & I_\nu &= S_\nu \\ \tau_\nu \ll 1 & \text{optisch dünn,} & I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0) \end{array} \quad (1.323)$$

1.15 Graue ebene Atmosphäre

Eine einfache Lösung der Strahlungstransportgleichung (1.304) kann man ableiten, wenn wir frequenzunabhängige Größen verwenden, und eine planparallele Schichtung voraussetzen, d.h. $r \rightarrow \infty$. In dieser Anwendung ist es üblich, die optische Tiefe τ von außen nach innen zu definieren, d.h. $\tau = 0$ ist der Außenrand, $\tau = \infty$ das Sterninnere. Die zu lösende Gleichung hat dann die Form

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S. \quad (1.324)$$

Eine weitere wesentliche Voraussetzung ist *Strahlungsgleichgewicht*, d.h.

$$\int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu S_\nu d\nu, \quad (1.325)$$

welches sich im grauen Fall auf $J = S$ reduziert. Unsere graue Atmosphäre wird dann durch die Integrodifferentialgleichung

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - J \quad \text{mit} \quad J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I d\mu. \quad (1.326)$$

beschrieben. Zur weiteren Berechnung bilden wir von Gleichung (1.326) das 0-te und 1-te Moment, also

$$\int \mu \frac{dI}{d\tau} d\mu = \frac{d}{d\tau} \int \mu I d\mu = \frac{dH}{d\tau} = \int I d\mu - \int J d\mu = J - J = 0 \quad (1.327)$$

sowie

$$\int \mu^2 \frac{dI}{d\tau} d\mu = \frac{d}{d\tau} \int \mu^2 I d\mu = \frac{dK}{d\tau} = \int \mu I d\mu - \int \mu J d\mu = H, \quad (1.328)$$

wobei wir die letzte Gleichung mit der Konstanz von H aus Gleichung (1.327) mit der Integrationskonstante C zu

$$K(\tau) = H[\tau + C] = \frac{1}{4} F[\tau + C] \quad (1.329)$$

integrieren können. Wie wir früher schon gesehen haben (1.289), gibt es für isotrope Strahlungsfelder die Eddington-Beziehung, d.h. für große optische Tiefen muss $J = 3K$ gelten. Für $\tau \gg 1$ haben wir demnach

$$\tau \rightarrow \infty : \quad K(\tau) \rightarrow \frac{1}{4}F\tau \quad \text{und} \quad J(\tau) \rightarrow \frac{3}{4}F\tau. \quad (1.330)$$

Die mittlere Intensität J nimmt asymptotisch mit der optischen Tiefe linear zu, so dass folgender Ansatz

$$J(\tau) = \frac{3}{4}F[\tau + q(\tau)] \quad (1.331)$$

mit $q(\tau)$ als sogenannter *Hopf-Funktion* naheliegt. Den obigen Überlegungen folgend gilt demnach

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3}J(\tau) - K(\tau) \right] &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4}F(\tau) - \frac{1}{4}Fq(\tau) - \frac{1}{4}F(\tau + C) \right] = 0 \\ C &= q(\infty). \end{aligned} \quad (1.332)$$

Die analytische Bestimmung der Hopf-Funktion $q(\tau)$ ist eine schwierige Aufgabe und wir wollen hier das Problem nur in der Eddington-Näherung betrachten, d.h. wir setzen überall in der Atmosphäre (und nicht nur in großen optischen Tiefen) $J = 3K$. Damit wird für die Strahlungsenergiedichte der folgende Ansatz möglich (1.331)

$$J_E(\tau) = \frac{3}{4}F\tau + c_E. \quad (1.333)$$

Unter Zuhilfenahme der formalen Lösung der STG (Abschnitt 1.14.3) und der Eigenschaften der Exponentialintegrale (siehe Appendix) kann man J_E berechnen und damit

$$c_E = \frac{F}{2}, \quad J_E(\tau) = \frac{3}{4}F \left[\tau + \frac{2}{3} \right] \quad (1.334)$$

festlegen. Im Falle thermischer Emission haben wir $J = B = a_{\text{RC}}/4\pi T^4$ und bestimmen unter der Annahme der Eddington-Näherung die Temperaturschichtung in einer grauen, ebenen Atmosphäre

$$T^4 = \frac{3}{4}T_{\text{eff}}^4 \left[\tau + \frac{2}{3} \right]. \quad (1.335)$$

Diese Schichtung ist so aufgebaut, dass $T(\tau = 2/3) = T_{\text{eff}}$ gilt. In einer optischen Tiefe von $\tau = 2/3$ gilt ziemlich genau $\exp(-2/3) \simeq 0.5$, also 50% aller Photonen aus dieser Schicht gelangen zum Beobachter und 50% werden nochmals absorbiert. Definiert man die Oberflächentemperatur T_0 mit $\tau = 0$, so haben wir

$$\frac{T_0}{T_{\text{eff}}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/4} = 0.841, \quad (1.336)$$

was ohne Eddington-Approximation mit einer vollständigen Berechnung der Hopf-Funktion (1.331) auf $(\sqrt{3}/4)^{1/4} = 0.8114$ geführt hätte. Man sieht, dass sich die Eddington-Approximation als sehr gute Näherung herausstellt.

1.16 Strahlungsprozesse

1.16.1 Einstein Koeffizienten

Relationen zwischen den Einstein-Koeffizienten

Da das Kirchhoff'sche Gesetz (1.298) die Verbindung zwischen Emission und Absorption herstellt, muss es auch auf mikroskopischer, atomarer Ebene eine Relation zwischen diesen Prozessen geben. Betrachten wir dazu, A. Einstein folgend, ein einfaches System mit zwei Energieniveaus. Das eine Niveau besitzt die Energie E mit dem statistischen Gewicht g_1 , das andere Niveau ist durch $E + h\nu_0$ mit g_2 charakterisiert (siehe Abb. 1.27). Das System kann durch Absorption einen Übergang von Niveau 1 zu Niveau 2 machen, der umgekehrte Prozess bewirkt die Emission eines Photons mit der Energiedifferenz $\Delta E = h\nu_0$.

Albert Einstein hat drei Prozesse identifiziert, die dabei stattfinden können:

1. *Spontane Emission*: Das Atom ändert seinen Zustand durch Emission eines Photons ohne Vorhandensein eines Strahlungsfeldes. Diesen Vorgang beschreibt der Einsteinkoeffizient

$$A_{21} = \text{Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit [s]}^{-1} \quad (1.337)$$

2. *Absorption*: Dieser Prozess findet in einem Strahlungsfeld statt und der Vorgang der Absorption wird proportional zum *mittleren* Strahlungsfeld sein. Dabei ist zu beachten, dass das Energieniveau nicht unendlich schmal ist, sondern durch eine sogenannte Linienprofilfunktion $\phi(\nu)$ beschrieben wird, d.h. der dazugehörige Einsteinkoeffizient ist

$$B_{12}\bar{J} = \text{Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit} \quad (1.338) \\ \text{der Absorption,}$$

wobei die gemittelte Strahlungsenergiedichte (1.283) mit

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \quad \text{mit} \quad \int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1 \quad (1.339)$$

eingeht.

3. *Stimulierte Emission*: Einstein hat noch den dritten Prozess der stimulierten Emission definiert, der ebenfalls das Vorhandensein eines Strahlungsfeldes erfordert, daher gilt

$$B_{21}\bar{J} = \text{Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit} \quad (1.340) \\ \text{der stimulierten Emission.}$$

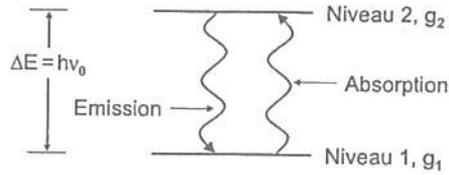


Abbildung 1.27: Emission und Absorption in einem einfachen Atom mit zwei Energieniveaus, deren Energiedifferenz $\Delta E = h\nu_0$ beträgt.

Da J_ν nur wenig über das Frequenzintervall $\Delta\nu$ der Linie variiert, verhält sich $\phi(\nu)$ praktisch wie eine δ -Funktion.

Sind nun die Besetzungszahlen der vorhandenen Atome durch in den beiden Niveaus durch n_1 und n_2 gegeben, so muss sich im thermodynamische Gleichgewicht folgende Bilanz aufschreiben lassen

$$n_1 B_{12} \bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J}. \quad (1.341)$$

Diese Gleichung lässt sich nach \bar{J} auflösen

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(n_1/n_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}. \quad (1.342)$$

In unserem Fall des thermodynamischen Gleichgewichts sind die Besetzungszahlen n_1 und n_2 durch die Boltzmann'sche Formel festgelegt, d.h.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E/kT)}{g_2 \exp(-(E + h\nu_0)/kT)} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu_0/kT) \quad (1.343)$$

so dass sich aus Gleichung (1.342) der Ausdruck

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21}) \exp(h\nu_0/kT) - 1} \quad (1.344)$$

ergibt. Im Fall der thermodynamischen Gleichgewichts (LTE) wissen wir bereits aus Gleichung (1.301), dass $J_\nu = B_\nu$ gilt und aus der Tatsache, dass die Planckfunktion B_ν kaum über das Intervall $\Delta\nu$ variiert, kann man $\bar{J} = B_\nu$ ableiten. Setzt man in den letzten Ausdruck die Planck-Funktion (1.299) ein, so müssen folgende Relationen zwischen den Einstein Koeffizienten gelten

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (1.345)$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}. \quad (1.346)$$

Diese Relationen sind von der Temperatur unabhängig und müssen daher auch für Atome gelten, die sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Diese Relationen sind daher die Verallgemeinerung des Kirchhoff'schen Gesetzes (1.298) für den Fall von Nichtgleichgewichtszuständen.

Absorption und Emission als Einstein-Koeffizienten

Der Vergleich der Definitionen von Intensität, Absorption (1.291) und Emission (1.292) liefert dann folgende Beziehungen

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu). \quad (1.347)$$

Da Absorption und stimulierte Emission von der vorhandenen Intensität abhängen, fasst man beide im Absorptionskoeffizienten zusammen

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}). \quad (1.348)$$

Die stimulierte Emission (in Form des Einstein-Koeffizienten B_{21}) tritt dabei formal als negative Absorption auf. Damit können wir die ebene Strahlungstransportgleichung (1.316) mit $\mu = 1$ mit Hilfe der Einstein Koeffizienten schreiben

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\frac{h\nu}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \phi(\nu) I_\nu + \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu) \quad (1.349)$$

und die Quellfunktion (1.303) ermitteln

$$S_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}. \quad (1.350)$$

Verwenden wir die Beziehungen der Einstein Koeffizienten (1.345, 1.346) untereinander, so finden wir

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} (1 - g_1 n_2 / g_2 n_1) \phi(\nu) \quad (1.351)$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1}, \quad (1.352)$$

wobei wir (1.352) als verallgemeinertes Kirchhoff'sches Gesetz (siehe auch Gleichung 1.298) verstehen können.

Thermische Emission

Betrachten wir zunächst eine rein thermische Emission mit der Temperatur T , die nicht der Gastemperatur entsprechen muss, so sind die Niveaus nach der Boltzmann-Formel verteilt, d.h.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right), \quad (1.353)$$

wir sprechen von lokalem thermischen Gleichgewicht (engl. *local thermodynamic equilibrium* (*LTE*)) und erhalten in diesem Fall

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \quad (1.354)$$

$$S_\nu = B_\nu(T). \quad (1.355)$$

Wir sehen wiederum das Kirchhoff'sche Gesetz (1.298), und andererseits den klassischen Absorptionskoeffizienten modifiziert durch die stimulierte Emission.

Nichtthermische Emission

In diesem Fall sind die Niveaus n_1 und n_2 nicht nach der Boltzmann-Gleichung verteilt, d.h.

$$\frac{n_1}{n_2} \neq \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right), \quad (1.356)$$

wie es beispielsweise in einem Plasma mit einer Nicht-Maxwell'schen-Geschwindigkeitsverteilung oder auch starker Streuung vorkommen kann. Für ein System im thermischen Gleichgewicht haben wir ja immer

$$\frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) < 1, \quad (1.357)$$

so dass gilt

$$\frac{n_1}{g_1} > \frac{n_2}{g_2} \quad (1.358)$$

und diese Bedingung ist in vielen Fällen erfüllt, auch wenn das Material nicht im thermischen Gleichgewicht ist, und man von einer *normalen Besetzung* spricht.

Werden jedoch in das höhere Niveau n_2 mehr Teilchen gepumpt, so kann dies zu einer *invertierten Besetzung* führen, also

$$\frac{n_1}{g_1} < \frac{n_2}{g_2}, \quad (1.359)$$

was für den Absorptionskoeffizienten α_ν (1.351) den Effekt von

$$\alpha_\nu < 0 \quad \text{mit} \quad I = I_0 e^{|\alpha_\nu|}, \quad (1.360)$$

hat, d.h. die Intensität erfährt bei einer bestimmten Frequenz eine enorme Verstärkung. Die Intensität wird demnach entlang ihres Weges um den Faktor $\exp|\alpha_\nu|$ mit $\alpha_\nu < 0$ verstärkt und wir sprechen von einem *Maser* oder im Optischen von einem *Laser*. Solche Maser/Laser-Emissionen eignen sich aufgrund ihrer sehr engen Liniensbreiten besonders gut, die Geschwindigkeitsfelder mit Hilfe des Dopplereffektes zu messen.

1.16.2 Bremsstrahlung

Zunächst besprechen wir die Bewegung einer Ladung mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in einem Coulomb-Feld im Abstand \mathbf{R} , d.h. ein Elektron mit Ladung $-e$ bewegt sich im Feld der Ladung Ze mit einem Impaktparameter b . Wir können das Dipolmoment $\mathbf{d} = -e\mathbf{R}$ definieren

$$\ddot{\mathbf{d}} = -e\dot{\mathbf{v}}. \quad (1.361)$$

Die Funktion $\hat{d}(\omega)$ wird über eine Fourier-Transformation definiert,

$$d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{d}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.362)$$

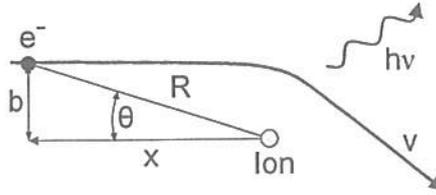


Abbildung 1.28: Vereinfachte Geometrie des Elektrons in Coulomb-Feld eines Ions. Die Abbremsung führt zur Emission von sog. *Bremsstrahlung*.

woraus sich die resultierende Fouriertransformierte von Gleichung (1.361)

$$-\omega^2 \hat{\mathbf{d}}(\omega) = -\frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}} e^{i\omega t} dt. \quad (1.363)$$

ergibt. Ohne die Bewegung im Detail zu berechnen werden wir dieses Integral abschätzen und betrachten dazu eine typische Zeitskala der Wechselwirkung

$$\tau = \frac{b}{v},$$

wobei die Exponentialfunktion (vgl. 1.363) in zwei Bereiche unterteilt wird. Im Fall $\omega\tau \gg 1$ oszilliert die Exponentialfunktion heftig und ist damit klein, im Fall $\omega\tau \ll 1$ ist dieser Integrandterm konstant eins, also

$$\hat{\mathbf{d}} \simeq \begin{cases} \frac{e}{2\pi\omega^2} \Delta\mathbf{v}, & \omega\tau \ll 1 \\ 0, & \omega\tau \gg 1, \end{cases} \quad (1.364)$$

wobei $\Delta\mathbf{v}$ die Geschwindigkeitsänderung in der Zeitspanne τ bezeichnet.

Zur weiteren Berechnung machen wir einen vereinfachenden Ansatz, die sog. *Dipolapproximation*, die allgemein für ein Ensemble von Teilchen mit Ladungen q_i an den Orten \mathbf{r}_i gilt. Dazu führt man den Vektor

$$\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i \quad (1.365)$$

ein und nach den Formeln der klassischen Elektrodynamik schreibt sich die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel $d\Omega$ in dieser Näherung als

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta. \quad (1.366)$$

Bezeichnet \mathbf{n} den Einheitsvektor in Richtung des Raumwinkels $d\Omega$ (wie in Abb. 1.29 dargestellt) so gelten für das entsprechende elektrische Feld im Abstand R

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(t) = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}})}{c^2 R} \quad \text{und} \quad E(t)_{\text{rad}} = \frac{\ddot{d} \sin \theta}{c^2 R}. \quad (1.367)$$

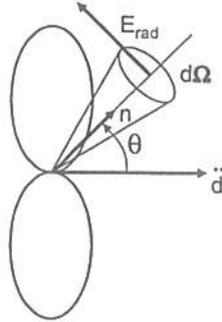


Abbildung 1.29: Abstrahlungsgeometrie eines Dipols, der in Richtung $\ddot{\mathbf{d}}$ beschleunigt wird.

Wenden wir unsere Fourier-Darstellung (1.362) auf die letzte Gleichung an

$$E(\omega) = -\frac{\omega^2}{c^2 R} \sin \theta \hat{d}(\omega). \quad (1.368)$$

Aus der Elektrodynamik wissen wir mit $dA = R^2 d\Omega$, dass die abgestrahlte Energie W pro Zeit und Fläche durch

$$\frac{dW}{dt dA} = \frac{c}{4\pi} E^2(t) \quad \text{oder} \quad \frac{dW}{dA} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{4\pi} E^2(t) dt \quad (1.369)$$

gegeben ist. Diese Relation werten wir mit den Eigenschaften der Fouriertransformierten aus,

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega, \quad (1.370)$$

wobei die letzte Form durch die Symmetrieeigenschaft von $|\hat{E}(\omega)|^2 = |\hat{E}(-\omega)|^2$ zustande kommt. Somit erhalten wir

$$\frac{dW}{dA} = c \int_0^{\infty} |\hat{E}^2(\omega)|^2 d\omega \quad \text{und} \quad \frac{dW}{dA d\omega} = c |\hat{E}^2(\omega)|^2. \quad (1.371)$$

Die Integration über die Fläche $dA = R^2 d\Omega$ liefert schließlich

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega} &= \int \frac{dW}{dA d\omega} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} c \left| \frac{-\omega^2}{c^2 R} \sin \theta \hat{d}(\omega) \right|^2 R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{8\pi\omega^4}{3c^3} |\hat{d}(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (1.372)$$

Mit Hilfe unserer Approximation (1.364) können wir nun die Dipolapproximation in eine Geschwindigkeitsänderung umrechnen

$$\frac{dW}{d\omega} = \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c^3} |\Delta \mathbf{v}|^2, & \omega\tau \ll 1 \\ 0, & \omega\tau \gg 1, \end{cases} \quad (1.373)$$

Zum Abschluß benötigt man noch einen Ausdruck für die Geschwindigkeitsänderung Δv , die wir über die senkrechte Komponente Δv_{\perp} approximieren, d.h.

$$\begin{aligned}\Delta v_{\perp} &= \int \frac{F_{\perp}}{m} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ze^2 \cos \theta}{mR^2} dt \\ &= \frac{Ze^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} dt = \frac{Ze^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{(b^2 + (vt)^2)^{3/2}} dt \\ &= \frac{Ze^2}{mbv} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + s^2)^{-3/2} ds = \frac{2Ze^2}{mbv}\end{aligned}\quad (1.374)$$

Wir erhalten somit die abgestrahlte Energie pro Kreisfrequenz ω in Abhängigkeit vom Impaktparameter b als

$$\frac{dW(b)}{d\omega} = \begin{cases} \frac{8Z^2e^6}{3\pi c^3 m^2 b^2 v^2}, & b \ll v/\omega \\ 0, & b \gg v/\omega. \end{cases}\quad (1.375)$$

Damit kann man mit Hilfe der letzten Formel das Ergebnis auf eine astrophysikalisch relevante Form bringen, welche eine große Anzahl von Elektronen und Ionen charakterisiert; n_i bezeichnet die Ionendichte und n_e die Elektronendichte, wobei sich alle Elektronen mit der gleichen Geschwindigkeit v bewegen sollen. Um die gesamte abgestrahlte Energie pro Volumen und Zeit zu bestimmen, muss man den Teilchenfluss über alle möglichen Impaktparameter b integrieren, d.h.

$$\begin{aligned}\frac{dW}{d\omega dV dt} &= n_i n_e v \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{dW(b)}{d\omega} 2\pi b db = \frac{16e^6}{3c^3 m^2 v} n_i n_e Z^2 \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} \\ &= \frac{16e^6}{3c^3 m^2 v} n_i n_e Z^2 \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right).\end{aligned}\quad (1.376)$$

Es bleibt noch eine Abschätzung für b_{\min} bzw. b_{\max} zu finden. So kann man beispielsweise die Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ mit $\Delta x \simeq b$ und $\Delta p \simeq mv$ verwenden und erhält

$$b_{\min} \simeq \frac{\hbar}{mv}.\quad (1.377)$$

Genauere Rechnungen liefern einen Ausdruck

$$\frac{dW}{d\omega dV dt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3 m^2 v} n_i n_e Z^2 g_{\text{eff}}(v, \omega),\quad (1.378)$$

wobei g_{eff} für den sog. effektiven *Gaunt-Faktor* steht. Nach unserer Rechnung (1.376) ist er beispielsweise

$$g_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right).\quad (1.379)$$

Thermische Bremsstrahlung

Besondere Bedeutung in der Astrophysik hat die Kühlung von dünnen, heißen Plasmen, in denen nur frei-frei Übergänge möglich sind. Bei dieser thermischen Bremsstrahlung geht man davon aus, dass die Elektronen ein thermisches Gas bilden und damit eine Maxwell-Verteilung in den Geschwindigkeiten aufweisen. Die abgestrahlte Energie folgt aus der entsprechenden Mittelung über die Verteilungsfunktion

$$\frac{dW}{d\omega dV dt} = \frac{\int_{v_{\min}}^{\infty} \frac{dW(v, \omega)}{d\omega dV dt} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}{\int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}, \quad (1.380)$$

wobei sich die untere Grenze v_{\min} aus der Bedingung $h\nu \geq \frac{1}{2}mv^2$ folgt. Die Integration von (1.380) liefert mit der Relation $d\omega = 2\pi d\nu$ die gesamte Bremsstrahlungsemission pro Frequenz, Zeit und Volumen zu

$$\frac{dW}{d\nu dV dt} = \frac{2^5 \pi e^6}{3c^3 m} \left(\frac{2\pi}{3km}\right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 n_i n_e e^{-h\nu/kT} g_{\text{eff}}^{-1}, \quad (1.381)$$

womit sich der Emissionskoeffizient (siehe auch Abschnitt 1.14.1)

$$\epsilon_{\nu, \text{eff}} = \frac{dW}{d\nu dV dt} = 3.8 \cdot 10^{-39} T^{-1/2} Z^2 n_i n_e e^{-h\nu/kT} g_{\text{eff}}^{-1} \quad [\text{W m}^{-3} \text{Hz}^{-1}] \quad (1.382)$$

berechnen lässt. Für den Gaunt-Faktor gilt in guter Näherung $g_{\text{eff}}^{-1} \simeq 1$. Der Faktor $T^{-1/2}$ in (1.381) kommt aus der Tatsache, dass $\epsilon_{\nu, \text{eff}} \sim \nu^{-1}$ (1.378) mit $\langle v \rangle \sim T^{1/2}$ gilt, der $\exp(-h\nu/kT)$ -Term aus der unteren Grenze der Maxwell-Verteilung. Für sehr hohe Temperaturen können noch relativistische Korrekturen notwendig werden.

1.16.3 Synchrotronstrahlung (einfach)

Geladene Teilchen bewegen sich auf Spiralen im Magnetfeld (siehe Abb. 1.30 und Kapitel 1.17.1). Es handelt sich um eine beschleunigte Bewegung und damit ist Abstrahlung unvermeidlich. Allerdings ist eine relativistische, exakte Behandlung ziemlich aufwendig, daher beschränken wir uns hier auf die wichtigsten Grundtatsachen. Ausgehend von den relativistischen Bewegungsgleichungen für ein Teilchen der Masse m und der Ladung q

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = \frac{q}{e} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.383)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m c^2) = q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.384)$$

sieht man, dass $\gamma = \text{const.}$ gilt. Demnach folgt die einfachere Gleichung

$$\gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{e} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.385)$$

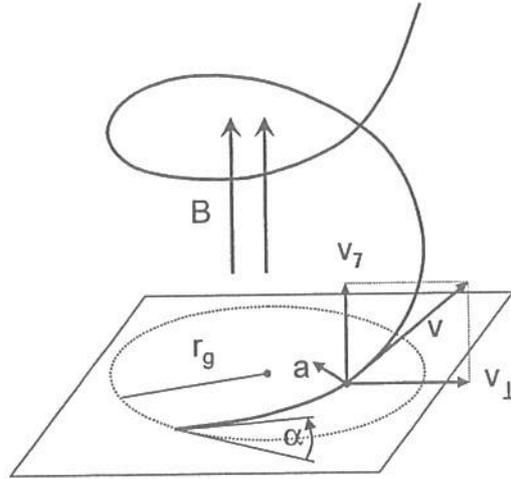


Abbildung 1.30: Spiralförmige Bewegung eines Elektrons im homogenen Magnetfeld B . Die Spirale weist einen Anstellwinkel (engl. *pitch angle*) α auf. Diese beschleunigte Bewegung führt zur Emission von *Synchrotronstrahlung* oder auch *Magnetobremstrahlung*.

Trennt man die Geschwindigkeit in zum Magnetfeld parallele bzw. vertikale Komponenten, so ist

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (1.386)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} = 0 \quad (1.387)$$

Da $v_{\parallel} = \text{const.}$ und auch wegen

$$\gamma m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{e} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (1.388)$$

$\mathbf{v} = \text{const.}$ gilt, findet man $\mathbf{v}_{\perp} = \text{const.}$ Wir werden im folgenden

$$\beta = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.389)$$

verwenden und die Teilchen vollführen eine Gyrationbewegung mit der Gyrationfrequenz ω_B

$$\omega_B = \frac{qB}{\gamma mc} = \frac{1}{\gamma} \frac{qB}{mc} = \frac{1}{\gamma} \omega_L, \quad (1.390)$$

wobei ω_L die sog. *Lamor-Frequenz* ist, wie sie im nicht-relativistischen Grenzfall $\gamma = 1$ (1.451) auftritt. Die entsprechende Beschleunigung steht senkrecht auf die Geschwindigkeit mit $\mathbf{a}_{\perp} = \omega_B \mathbf{v}_{\perp}$ und es gilt für die abgestrahlte Leistung die relativistische Verallgemeinerung der Lamor'schen Abstrahlungsformel

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} |a'^2| = \frac{2q^2}{3c^3} |a_{\parallel}'^2 + a_{\perp}'^2| = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 |a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2|, \quad (1.391)$$

wobei wir die Transformation vom augenblicklichen Ruhssystem des Teilchens in das System des Beobachters mit $a'_{\parallel} = \gamma^2 a_{\parallel}$ bzw. $a'_{\perp} = \gamma^2 a_{\perp}$ verwendet haben. Die abgestrahlte Leistung ist dann

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^2 \frac{q^2 B^2}{m^2 c^2} v_{\perp}^2. \quad (1.392)$$

Mit Hilfe des klassischen Elektronenradius

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (1.393)$$

und einer Mittelung über alle möglichen Winkel

$$\langle \beta_{\perp}^2 \rangle = \frac{\beta^2}{4\pi} \int \sin^2 \alpha \, d\Omega = \frac{\beta^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \alpha \, d\varphi \, d\alpha = \frac{2}{3} \beta^2. \quad (1.394)$$

sowie der Relation zum klassischen *Thomson-Querschnitt*

$$\sigma_T = \frac{8\pi r_0^2}{3} \quad (1.395)$$

und der Energiedichte eines Magnetfeldes B (siehe auch Kapitel 1.17.2)

$$U_B = \frac{B^2}{8\pi} \quad (1.396)$$

können wir die abgestrahlte Leistung (1.392), gemittelt über eine isotrope Anstellwinkelverteilung (siehe auch Abb. 1.30), angeben

$$\langle P \rangle = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B. \quad (1.397)$$

Spektrale Verteilung

Ein externer Beobachter sieht von einem Elektron in Gyrationbewegung nur einzelne Lichtpulse, deren Geometrie in Abb. 1.31 skizziert ist. Bezeichnet Δs das Bogenstück der Flugbahn, so gilt

$$a = \frac{\Delta s}{\Delta \theta}, \quad \text{mit} \quad \Delta \theta = \frac{2}{\gamma}, \quad \text{d.h.} \quad \Delta s = \frac{2a}{\gamma}. \quad (1.398)$$

Mit Hilfe der relativistischen Bewegungsgleichung (1.385) bestimmen wir daraus

$$\gamma m \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{q}{c} v B \sin \alpha, \quad (1.399)$$

mit $\Delta v = v \Delta \theta$ sowie $\Delta s = v \Delta t$

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{q B \sin \alpha}{\gamma m c v}$$

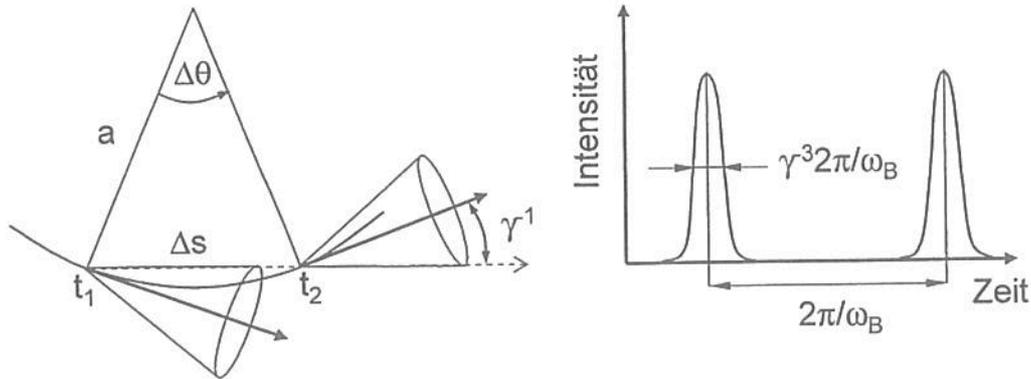


Abbildung 1.31: Emissionscharakteristik eines einzelnen gyrierenden Elektrons in Richtung eines Beobachters auf der x -Achse. Der Lichtpuls erfolgt alle $2\pi/\omega_B$, die Breite der Emission skaliert wie $\gamma^{-3}2\pi/\omega_B$.

und dem Krümmungsradius der Gyration

$$a = \frac{v}{\omega_B \sin \alpha} \quad (1.400)$$

wird daraus die Abschätzung

$$\Delta s = \frac{2v}{\gamma \omega_B \sin \alpha}, \quad \text{oder} \quad \Delta t = \frac{2}{\gamma \omega_B \sin \alpha}. \quad (1.401)$$

Diese Formel gilt im lokalen Ruhssystem des Teilchens, nicht für die Ankunftszeiten beim Beobachter, die wir mit $t^{(B)}$ bezeichnen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Puls vom Zeitpunkt t_1 bereits weitergelaufen ist, wenn der Puls zum Zeitpunkt t_2 erfolgt, d.h. die Zeitspanne $\Delta t = t_2 - t_1$ verkürzt sich für den Beobachter um den Faktor $\Delta s/c$. Damit wird aus (1.401)

$$\Delta t^{(B)} = \frac{2}{\gamma \omega_B \sin \alpha} (1 - \beta).$$

Da für sehr schnelle Teilchen $\gamma \gg 1$ der Ausdruck $1 - \beta = 1/(2\gamma^2)$ gilt, sieht man

$$\Delta t^{(B)} = \frac{1}{\gamma^3 \omega_B \sin \alpha}, \quad (1.402)$$

d.h. der Puls ist um den Faktor γ^3 kürzer als die Gyrationperiode $\omega_B \sin \alpha$. Anhand dieser Zeitspanne ist es sinnvoll eine typische Frequenz zu definieren,

$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B \sin \alpha \quad \text{oder} \quad \nu_c = \frac{3}{4\pi} \gamma^3 \omega_B \sin \alpha \quad (1.403)$$

um welche das spektrale Fenster der Emission konzentriert sein wird.

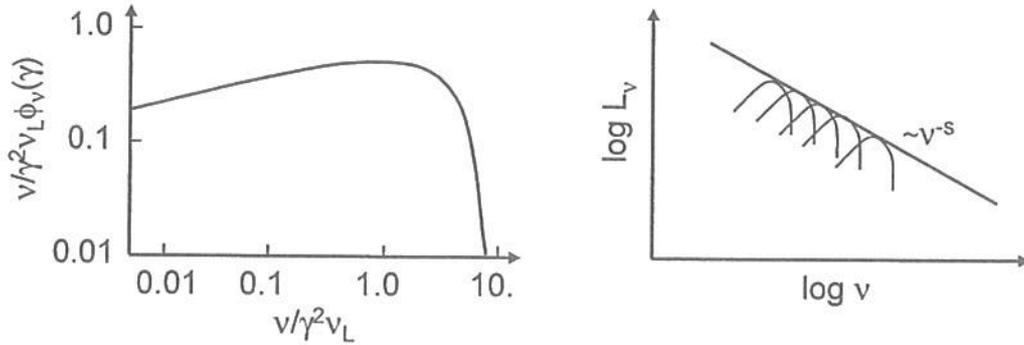


Abbildung 1.32: Frequenzabhängige Emission $\phi_\nu(\gamma)$ eines einzelnen gyrierenden Elektrons als Funktion von $\nu/\gamma^2\nu_L$, sowie die schematische Zusammensetzung eines Potenzgesetzes durch viele Einzelspektren.

Nun können wir dazu übergehen, ein Ensemble von relativistischen Elektronen mit Energien γmc^2 zu betrachten, welches sich in einem Magnetfeld bewegt und dabei Synchrotronstrahlung emittiert, d.h.

$$\langle P_\nu(\gamma) \rangle = \frac{4}{3} \sigma_{\text{T}} c \beta^2 \gamma^2 U_{\text{B}} \phi_\nu(\gamma), \quad (1.404)$$

wobei $\phi_\nu(\gamma)$ die Frequenzverteilung eines emittierenden Elektrons im Magnetfeld bezeichnet. Diese spektrale Verteilung ist ohne detaillierte Ableitung in Abbildung 1.32 dargestellt. Dabei gilt die Normierung

$$\int_0^\infty \phi_\nu(\gamma) d\nu = 1. \quad (1.405)$$

Die Elektronen sollen durch eine Potenzverteilung in der Energie gegeben sein,

$$n(\gamma) d\gamma = n_0 \gamma^{-p} d\gamma, \quad \text{mit} \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2, \quad (1.406)$$

wenn $n(\gamma)$ die Anzahl der Elektronen mit Energien im Intervall zwischen γmc^2 und $(\gamma + d\gamma) mc^2$ angibt. Die Gesamtemission pro Volumen und Frequenz schreibt sich dann unter Verwendung von (1.404) als

$$\rho j_\nu = \int_1^\infty \langle P_\nu(\gamma) \rangle n(\gamma) d\gamma = \int_1^\infty \frac{4}{3} \sigma_{\text{T}} \beta^2 \gamma^2 U_{\text{B}} \phi_\nu(\gamma) n_0 \gamma^{-p} d\gamma. \quad (1.407)$$

Das Pulszeitintervall (1.402) schreiben wir um, so dass wir es später als eine Bedingung für eine Frequenz verwenden können

$$\gamma^3 \nu_{\text{B}} = \gamma^2 \nu_{\text{L}}. \quad (1.408)$$

In einfachsten Fall approximieren wir die spektrale Emission durch eine an der Stelle $\gamma^2 \nu_{\text{L}}$ zentrierte Delta-Funktion, wie in Abb. 1.32 illustriert,

$$\phi_\nu(\gamma) = \delta(\nu - \gamma^2 \nu_{\text{L}}), \quad (1.409)$$

was die Integration von (1.407) wesentlich erleichtert. Bei derartigen Prozessen hat die genaue Form von $\phi_\nu(\gamma)$ eher wenig Relevanz. Eingesetzt erhalten wir das Ergebnis

$$\rho j_\nu = \frac{4}{3} \sigma_T \beta^2 n_0 U_B \int_1^\infty \gamma^{2-p} \delta(\nu - \gamma^2 \nu_L) d\gamma = \frac{2}{3} \sigma_T \beta^2 n_0 U_B \frac{1}{\nu_L} \left(\frac{\nu}{\nu_L} \right)^{(1-p)/2}. \quad (1.410)$$

Die Gesamtleuchtkraft einer optisch dünnen Region mit Volumen V , die Synchrotronstrahlung emittiert, ergibt sich somit zu

$$L_\nu = \int_V \rho j_\nu dV \sim \nu^{-(p-1)/2}. \quad (1.411)$$

Zusammengefasst folgt im Fall von Synchrotronemission das für Beobachtungen wichtige Resultat: Ein Elektronenspektrum

$$n(E) dE \sim E^{-p} dE \quad \text{ergibt} \quad L_\nu \sim \nu^{-s} \quad \text{mit} \quad s = \frac{p-1}{2}. \quad (1.412)$$

Anwendung auf Radiogalaxien

Bei manchen Quellen dominiert Synchrotron-Emission den gesamten Radiobereich, so beispielsweise bei Radiogalaxien, deren gigantische Radiolobes am Ende der Jets durch relativistische Elektronen als helle Radioquellen sichtbar werden. Um die Energie einer solchen Radiolobe abzuschätzen, nehmen wir ein Potenzgesetz von hochenergetischen Elektronen der Form (1.406) an und berechnen die gesamte Energiedichte U_{CR} in den Teilchen als

$$U_{CR} = n_0 \int_{\gamma_{\min}}^\infty (m_e c^2 \gamma) \gamma^{-p} d\gamma = \frac{n_0 m_e c^2}{2-p} \gamma_{\min}^{-(p-2)}. \quad (1.413)$$

Die gesamte Synchrotron-Emission L_ν ist aus (1.410) und (1.411) zu bestimmen, wobei wir die Abhängigkeit (1.390) der Lamorfrequenz ν_L von der Magnetfeldstärke B verwenden und alle Konstanten in C unterbringen,

$$\begin{aligned} L_\nu = \rho j_\nu V &= \frac{2}{3} \sigma_T \beta^2 n_0 U_B \frac{1}{\nu_L} \left(\frac{\nu}{\nu_L} \right)^{(1-p)/2} \\ C &= n_0 B^2 \frac{1}{B} \left(\frac{1}{B} \right)^{-(p-1)/2} = n_0 B^{(p+1)/2} \\ n_0 &= C B^{-(p+1)/2}. \end{aligned} \quad (1.414)$$

Eingesetzt in die Energie der Teilchen (1.413) mit einer neuen Konstanten C'

$$U_{CR} = C' B^{-(p+1)/2} \quad (1.415)$$

Weiters können wir die Gesamtenergie W einer Region mit Volumen V betrachten, die sich aus den Teilchen und dem Magnetfeld zusammensetzt,

$$W = (U_{CR} + U_B) V, \quad (1.416)$$

von der wir im Sinne unserer Abschätzung das Minimum suchen, also

$$\frac{dW}{dB} = \frac{d}{dB} \left(\frac{B^2 V}{8\pi} + C' B^{-(p+1)/2} \right) = \frac{2U_B}{B} - \frac{p+1}{2} \frac{U_{CR}}{B} = 0. \quad (1.417)$$

Daraus folgt eine einfache Relation für die beiden Energieanteile

$$U_B = \frac{p+1}{4} U_{CR}. \quad (1.418)$$

Da die Beobachtungen einen Spektralindex $p \simeq 2.5$ zeigen, ist der Vorfaktor annähernd eins, so dass sich die sog. *Äquipartitionsenergie* ergibt

$$U_B \simeq U_{CR}. \quad (1.419)$$

Die Abschätzung der extrem leuchtkräftigen Radiogalaxie Cyg A liefert bei einer beobachteten Ausdehnung von $R = 30$ kpc und einer magnetischen Feldstärke von 10^{-4} Gauß nach (1.418) zumindest eine Energie von

$$U_{B,CyGA} \simeq \frac{B^2}{8\pi} \frac{4\pi}{3} R^3 \simeq 10^{53} \text{ J} \simeq 10^9 E_{SN}.$$

Für andere Radiogalaxien sind die magnetischen Feldstärken zwar um einen Faktor 10 geringer, aber die Energie in den Radiolobes entspricht noch immer der Energie von 10^7 Supernova-Explosionen.

1.16.4 Compton-Streuung

Streuraten

Beim sog. *Compton-Effekt* wird ein Teil der Energie eines Photons $h\nu$ auf ein Elektron übertragen, bzw. in der Astrophysik spielt auch der *Inverse Compton-Effekt* eine wichtige Rolle, da beispielsweise niederenergetische Photonen (z.B. aus der kosmischen Hintergrundstrahlung) durch schnelle Elektronen in den Röntgen-Bereich gestreut werden.

Im einfachsten Fall hat das Photon nach der Wechselwirkung die Energie $h\nu_1$. Dieser Prozess ist in Abbildung 1.33 im Ruhssystem des Elektrons dargestellt. Das Elektron hat die kinetische Energie T , den Impuls p und wird durch das Photon in Richtung des Winkels φ gestreut. Dabei muss Energie-

$$h\nu = T + h\nu_1 \quad (1.420)$$

und Impulserhaltung sowohl in x - als auch y -Richtung gelten

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu_1}{c} \cos \theta + p \cos \varphi \quad (1.421)$$

$$0 = \frac{h\nu_1}{c} \sin \theta - p \sin \varphi. \quad (1.422)$$

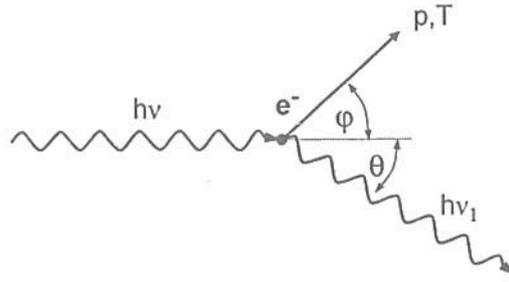


Abbildung 1.33: *Compton-Effekt*: Geometrie im Ruhesystem des Elektrons bei Wechselwirkung mit einem ankommenden Photon $h\nu$. Der Energieübertrag ändert sowohl die Energie des Photons als auch die des Elektrons.

Weiters benötigen wir die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p^2 c^2 = (T + 2mc^2)T \quad \text{mit} \quad p = \gamma m v \quad \text{und} \quad T = (\gamma - 1)mc^2. \quad (1.423)$$

Quadrieren der beiden Impulskomponenten und anschließende Addition liefert zusammen mit (1.423)

$$h^2 (\nu^2 - 2\nu_1 \nu \cos \theta + \nu_1^2) = p^2 c^2 = T(2mc^2 + T), \quad (1.424)$$

woraus sich mit der Energieerhaltung (1.420) und der dimensionslosen Energie des Photons (in Einheiten der Ruheenergie des Elektrons)

$$\epsilon = \frac{h\nu}{mc^2}. \quad (1.425)$$

die Frequenzänderung bestimmen lässt

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1 + \epsilon(1 - \cos \theta)}. \quad (1.426)$$

Wir sehen, dass im nicht-relativistischen Fall, d.h. $\epsilon \ll 1$, die Frequenz erhalten bleibt, $\nu_1 = \nu$, und es liegt klassische *Thomson-Streuung* vor. Die kinetische Energie ergibt sich aus (1.420)

$$T = h(\nu - \nu_1) = h\nu - \frac{h\nu}{1 + \epsilon(1 - \cos \theta)} = h\nu \frac{\epsilon(1 - \cos \theta)}{1 + \epsilon(1 - \cos \theta)}, \quad (1.427)$$

wobei man sieht, dass die maximale kinetische Energie für $\cos \theta = -1$ oder $\theta = \pi$ auftritt,

$$T_{\max} = h\nu \frac{2\epsilon}{1 + 2\epsilon}. \quad (1.428)$$

Der Winkel φ aus Abbildung 1.33 ergibt sich aus bzw. nach Verwendung von (1.426)

$$\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\nu - \nu_1 \cos \theta}{\nu_1 \sin \theta} = \frac{(1 + \epsilon)(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} = (1 + \epsilon) \tan \frac{\theta}{2}. \quad (1.429)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt lässt sich nur quantenmechanisch berechnen und sprengt den Rahmen dieser Darstellung (siehe z.B. Landau & Lifschitz, 1966, Bd. 4, §X), die sog. *Klein-Nishima-Formel*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^2 \left(\frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu}{\nu_1} - \sin^2 \theta\right), \quad (1.430)$$

welche im Fall kleiner Energien $\nu = \nu_1$ in

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (1.431)$$

übergeht und damit der Thomson-Streuung mit dem klassischen Elektronradius r_0 (1.393) entspricht. Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich durch Integration der Klein-Nishima-Formel (1.430) über den Raumwinkel

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{KN}} &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \frac{1}{2} r_0^2 \int \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^2 \left(\frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu}{\nu_1} - \sin^2 \theta\right) \sin \theta d\theta \\ &= \pi r_0^2 \int \left[\frac{\sin \theta}{(1 + \epsilon(1 - \cos \theta))^3} + \frac{\sin \theta}{1 + \epsilon(1 - \cos \theta)} - \frac{\sin^3 \theta}{(1 + \epsilon(1 - \cos \theta))^2} \right] d\theta \\ &= \frac{\pi r_0^2}{\epsilon} \left[\left(1 - \frac{2\epsilon + 2}{\epsilon^2}\right) \ln(1 + 2\epsilon) + \frac{1}{2} + \frac{4}{\epsilon} - \frac{1}{2(1 + 2\epsilon)^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.432)$$

Für den Fall kleiner Energien $\epsilon \ll 1$ folgt der Thomson-Querschnitt

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 (1 - 2\epsilon + \frac{26\epsilon^2}{5} + \dots) \simeq \sigma_{\text{T}} (1 - 2\epsilon + \frac{26\epsilon^2}{5}) \quad (1.433)$$

oder der extrem relativistische Grenzfall $\epsilon \gg 1$

$$\sigma \simeq \frac{\pi r_0^2}{\epsilon} \left(\ln 2\epsilon + \frac{1}{2} \right). \quad (1.434)$$

Energieverlust eines Elektronen-Plasmas

Um die Energieverluste eines Elektronen-Plasmas durch ein Photonenfeld mit der Energiedichte U_{rad} zu bestimmen, müssen wir das Ergebnis des letzten Abschnitts zwischen den einzelnen Bezugssystemen transformieren. Es bezeichnet K' das Ruhesystem des Elektrons, K das System des Beobachters (siehe Abbildung 1.34). Damit sind die vorherigen Formeln im System K' zu verwenden. Zunächst gelten die Doppler-Formeln zum Umrechnen der Frequenzen in den beiden Bezugssystemen

$$\nu' = \nu \gamma (1 - \beta \cos \theta) \quad (1.435)$$

$$\nu_1 = \nu'_1 \gamma (1 + \beta \cos \theta_1). \quad (1.436)$$

Zur weiteren Rechnung verwenden wir die differentielle Photonendichte

$$dn = n(h\nu, \mathbf{i}\Omega) d(h\nu) d\Omega, \quad (1.437)$$

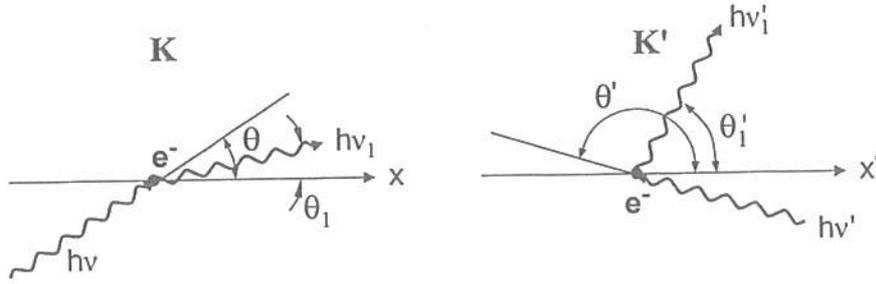


Abbildung 1.34: *Compton-Effekt*: Streuung im System des Beobachters K und dem Ruhesystem des Elektrons K' .

welche die Anzahl von Photonen pro Volumen mit Energien zwischen $[h\nu, h\nu + d(h\nu)]$ und in Richtung Ω mit Raumwinkel $d\Omega$ angibt. Mit dN bezeichnen wir die Gesamtzahl der Photonen im Volumen,

$$dn = \frac{dN}{dV} = \frac{dN}{dV dt} dt, \quad (1.438)$$

da wir die Größe $dV dt$ als relativistische Invariante verwenden wollen. Daraus sieht man, dass sich dn wie dt transformieren muss, und aus dem 4-Vektor eines Photons

$$k^\mu = \frac{\hbar}{c}(\omega, \omega \mathbf{k}). \quad (1.439)$$

folgt, dass das Verhältnis

$$\frac{dn}{\nu} = \text{const.} \quad (1.440)$$

invariant sein wird. Die totale Streurrate lässt sich im Ruhesystem K' schreiben als

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dN'}{dt'} = \frac{c}{\gamma} \int \sigma dn', \quad (1.441)$$

da $dt = \gamma dt'$ gilt. Die Integration erfolgt über die Photonenzahl im Ruhesystem K' , die wir mit Hilfe von relativistischen Invarianten und der Dopplerformel (1.435) weiter ausführen

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{c}{\gamma} \int \sigma \frac{dn'}{\nu'} \nu' = \frac{c}{\gamma} \int \sigma \nu' \frac{dn}{\nu} = \\ &= \frac{c}{\gamma} \int \sigma \gamma \nu (1 - \beta \cos \theta) \frac{dn}{\nu} = c \int (1 - \cos \theta) \sigma dn. \end{aligned} \quad (1.442)$$

Falls die Photonenverteilung isotrop ist, fällt der $\cos \theta$ -Anteil weg und es ergibt sich aus (1.442) in der Thomson-Näherung

$$\frac{dN}{dt} = c \sigma_T n. \quad (1.443)$$

Bei der Berechnung der Energieverluste durch Compton-Streuung machen wir die Näherung, dass die Energie des gestreuten Photons im Laborsystem viel größer vor der Streuung als nachher ist, d.h. $P \gg P_1$ und

$$-\frac{dE'}{dt'} = P_1 - P = P_1' - P', \quad (1.444)$$

mit der Folgerung

$$P_1 = P_1' = \int \sigma_T c h \nu' dn' = c \sigma_T U'_{\text{rad}}, \quad (1.445)$$

wenn U'_{rad} die gesamte Strahlungsenergie im Ruhssystem des Elektrons bezeichnet. Mit der Annahme von $\gamma^2 - 1 \gg \epsilon/mc^2$ können wir $\epsilon' = \epsilon$ oder auch $\nu = \nu'$ in der Verteilungsfunktion der Elektronen setzen und erhalten mit Hilfe der Invarianten (1.440) und der Dopplerformel (1.435)

$$U'_{\text{rad}} = h \int \nu'^2 \frac{dn'}{\nu'} = \gamma^2 \int (1 - \cos \theta)^2 h \nu dn = \frac{4}{3} \gamma^2 U_{\text{rad}}. \quad (1.446)$$

und damit das Endresultat von

$$P = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 U_{\text{rad}}. \quad (1.447)$$

Der Vergleich mit den Synchrotronverlusten (1.404) zeigt, dass für $U_{\text{rad}} > U_B$ die Compton-Verluste die Synchrotronverluste dominieren.

1.17 Elementare Plasmaphysik

In vielen Bereichen der Astrophysik spielen Magnetfelder eine wichtige Rolle. In wenigen Fällen kann man ihre Wirkung in einfacher Geometrie untersuchen, meistens entwickeln die Felder eine komplexe, 3-dimensionale Topologie. Entsprechend selten ist es möglich, analytische Lösungen zu präsentieren, und so muss ich mich in diesem Abschnitt auf einige Grundtatsachen beschränken. Dabei es gibt verschiedene Beschreibungsebenen, mit welchen die Vorgänge in einem Plasma behandelt werden können; die drei wichtigsten sind mit ihren Voraussetzungen hier aufgelistet, wobei an dieser Stelle nur eine Beschreibung mit Hilfe der *Magnetohydrodynamik* in Frage kommt.

- a) Aus den hydrodynamischen Grundgleichungen und den nichtrelativistischen Maxwell-Gleichungen setzt sich das Gleichungssystem der *Magnetohydrodynamik* zusammen, das im folgenden fast immer zugrunde gelegt wird. Es stellt eine gute Approximation von astrophysikalischen Plasmen dar; die mittlere freie Weglänge der Teilchen ist dabei stets kleiner als die typischen Dimensionen des Mediums.

- b) Um den unterschiedlichen Teilchensorten (*i.e.* Ionen, Elektronen und Neutralgasteilchen) gerecht zu werden, verwendet man die *Mehrkomponententheorie*, oft mit der Annahme, dass das Plasma als Ganzes neutral ist.
- c) Schließlich lässt sich ein Plasma mit Hilfe der *statistischen Theorie* beschreiben, wobei man von den einzelnen geladenen Teilchen ausgeht und durch geeignete Mittelungen zu den makroskopischen Eigenschaften des Plasmas gelangt.

1.17.1 Einfache Teilchenbewegungen im Magnetfeld

Die nichtrelativistische Bewegungsgleichung eines Teilchens der Ladung Ze und der Masse m lautet und diese Gleichung kennen wir im Rahmen der Bremsstrahlung aus Abschnitt (1.16.2)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = Ze (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.448)$$

wobei der erste Term die Beschleunigung durch das elektrische Feld beschreibt, der zweite Term die *Lorentz-Kraft* darstellt. Durch skalare Multiplikation mit der Geschwindigkeit des Teilchens \mathbf{v} erhält man daraus

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = Ze \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.449)$$

Hervorzuheben ist in (1.449), dass die Lorentzkraft keinen Beitrag zur kinetischen Energie des Teilchens liefert.

Für den Fall $\mathbf{B} = \text{const.}$ und $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ lassen sich die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten leicht formulieren. Es sei $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ und $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, dann ergibt sich aus (1.448)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{Ze}{c} B \dot{y}, & m\ddot{y} &= -\frac{Ze}{c} B \dot{x} \\ m\ddot{z} &= 0, & \Rightarrow z &= \alpha + \beta t, \quad \alpha = \beta = \text{const.} \end{aligned} \quad (1.450)$$

In Richtung des Magnetfeldes (z -Richtung) bewegt sich das Teilchen gleichförmig und geradlinig. Zur Lösung der weiteren Gleichungen erinnern wir an die *Gyrations-* oder *Lamorfrequenz* (vergl. Abschnitt 1.16.3 und Gleichung (1.390))

$$\omega_B = \frac{ZeB}{mc} \quad (1.451)$$

ein; damit lautet (1.450) wie folgt

$$\ddot{x} = \omega_B \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\omega_B \dot{x}. \quad (1.452)$$

Mit Hilfe der komplexen Variablen $r = x + iy$ erhält man daraus eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{r} = -i\omega_B \dot{r} \quad (1.453)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$r = ae^{(-i\omega_B t)} + b, \quad (1.454)$$

wobei a, b komplexe Konstanten sind. Durch Wahl der Anfangsbedingungen lässt sich $b = 0$ erreichen und weiters sei r zum Zeitpunkt $t = 0$ reell, so dass auch a reell ist. Die Gleichung (1.454) beschreibt eine Kreisbewegung in der (x, y) -Ebene mit dem Radius a und der Kreisfrequenz ω_B . Da eine Bewegung in z -Richtung überlagert ist, resultiert daraus eine Spirale. Wenn v_\perp die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Feld bezeichnet, so gilt

$$v_\perp = |\dot{r}| = a|\omega_B|, \quad a = \frac{v_\perp}{|\omega_B|} = \frac{m c v_\perp}{|Ze|B} \quad (1.455)$$

und a heißt *Gyrations-* oder *Lamorradius* des Teilchens mit der Ladung Ze .

Falls zusätzlich zum homogenen Magnetfeld \mathbf{B} ein konstantes elektrisches Feld mit $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ vorhanden ist, so wird die Bewegungsgleichung (1.448) mit Hilfe der Substitution

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1.456)$$

und der Identität

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = -\mathbf{E} B^2 \quad (1.457)$$

in eine zu (1.448) analoge Form übergeführt

$$m \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{Ze}{c} (\mathbf{w} \times \mathbf{B}), \quad (1.458)$$

und hat demnach ebenfalls die Lösung der Lamorgyration. Die Substitution entspricht einer Transformation in ein mit

$$\mathbf{v}_D = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1.459)$$

bewegtes Koordinatensystem. In diesem gilt $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ und zusätzlich zur Gyration kommt eine Drift des Gyrationszentrums mit \mathbf{v}_D hinzu.

In obigen Fall ist die Driftgeschwindigkeit (1.459) unabhängig von der Masse m und der Ladung Ze des Teilchens. Anders verhält sich die Teilchendrift unter dem Einfluß eines Gravitationsfeldes. Der Einfachheit halber sei wiederum $\mathbf{g} \perp \mathbf{B}$ und (1.448) wird auf

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \frac{Ze}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.460)$$

erweitert. Die Schwerkraft $m\mathbf{g}$ entspricht nun dem $Ze\mathbf{E}$ -Term und demgemäß führt die Transformation mit der Driftgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_D = \frac{cm}{Ze} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1.461)$$

auf eine Gleichung der Form (1.448). Hier fällt auf, dass \mathbf{v}_D sowohl ladungs- als auch massenabhängig ist, was einem Strom im Plasma zur Folge hat.

Ein letzter Aspekt der einfachen Teilchenbewegungen sei noch erwähnt. Wenn sich das Magnetfeld nicht wesentlich über die Länge eines Gyrationradius ändert, d.h. $|a\nabla B| \ll B$, so führt dies ebenfalls zu einer Teilchendrift mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_D = \frac{c\mu}{ZeB^2} \mathbf{B} \times \nabla B, \quad (1.462)$$

wobei die Größe

$$\mu = \frac{mv_{\perp}}{2B} \quad (1.463)$$

das *magnetische Moment* bezeichnet; es spielt bei der Bewegung von geladenen Teilchen in Magnetfeldern eine wichtige Rolle, da auch in inhomogenen Feldern μ konstant (oder zumindest annähernd konstant) bleibt.

1.17.2 Gleichungssystem der MHD

Unter der Voraussetzung kleiner Geschwindigkeiten ($v \ll c$) vereinfachen sich die Maxwell-Gleichungen so, dass sie einfach zur Hydrodynamik hinzugefügt werden können, um das Gleichungssystem der Magnetohydrodynamik (kurz: MHD) zu bilden. Neu hinzukommen wird in der Bewegungsgleichung (1.467) die Lorentz-Kraft.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1.464)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.465)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.466)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + \rho \mathbf{g} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.467)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.468)$$

wobei die üblichen Variablenbezeichnungen verwendet werden, d.h. ρ für die Dichte, \mathbf{u} die Materiegeschwindigkeit, P den Gasdruck und \mathbf{g} die Schwerebeschleunigung. Die Zustandsgleichung ist in allen hier behandelten Fällen sehr einfach, d.h. entweder isotherm oder adiabatisch:

$$P = c_s^2 \rho \quad \text{oder} \quad P = K \rho^\gamma, \quad (1.469)$$

c_s bezeichnet die isotherme Schallgeschwindigkeit, K eine Konstante, die nur von der Entropie abhängt, und γ ist der Adiabatenindex. Bei interstellaren Wolken gilt beispielsweise für lange Entwicklungsphasen eine isotherme Zustandsgleichung.

Bei astrophysikalischen Problemen spielt Gravitation eine wesentliche Rolle, so dass die Schwerebeschleunigung \mathbf{g} über die Poissongleichung bestimmt werden muss

$$\Delta \psi = 4\pi \rho, \quad \text{mit} \quad \nabla \psi = -\mathbf{g}, \quad (1.470)$$

ψ steht für das Gravitationspotential (siehe auch Abschnitt 1.1.2).

Zur Ableitung des Ohmschen Gesetzes erinnern wir an die in Abschnitt 1.17.1 erläuterten Teichenbewegungen. Weiters sei mit n_i die Anzahldichte der Ionen [cm^{-3}] und mit n_e die Anzahldichte der Elektronen [cm^{-3}] bezeichnet. Dann ist der durch die Eigenbewegung der Teichen erzeugte elektrische Strom

$$\mathbf{j} = Z|e|n_i\mathbf{v}_i - |e|n_e\mathbf{v}_e. \quad (1.471)$$

Setzt man die Lösungen der Bewegungsgleichungen, d.h. \mathbf{v}_i und \mathbf{v}_e in die obige Formel ein, erhält man einen Ausdruck der sich in der Form

$$\mathbf{j} = \Lambda \mathbf{E}, \quad (1.472)$$

schreiben lässt, wobei Λ den *Leitfähigkeitstensor* darstellt. Im allgemeinen ist die Leitfähigkeit eines Plasmas richtungsabhängig, doch für die astrophysikalischen Anwendungen bleibt dieser Effekt stets vernachlässigbar, so daß wir im folgenden den Tensor Λ durch eine Materialkonstante λ ersetzen; damit ist der Zusammenhang zwischen dem Strom und der Leitfähigkeit des Mediums im lokalen Ruhesystem des Plasmas hergestellt. Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen muss nun eine Transformation ins System des Beobachters, das sich mit der Materiegeschwindigkeit \mathbf{u} bewegt, durchgeführt werden und man erhält das Ohm'sche Gesetz

$$\mathbf{j} = \lambda \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right). \quad (1.473)$$

Die Induktionsgleichung (1.465) lässt sich mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes (1.473) und der Maxwell-Gleichung (1.464) auf die Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}}{\lambda} - \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{c^2}{4\pi\lambda} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (1.474)$$

$$= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\lambda} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.475)$$

bringen. Dabei ist angenommen, dass die Leitfähigkeit λ räumlich konstant bleibt. Bei hoher Leitfähigkeit, d.h. $\lambda \rightarrow \infty$, verschwindet der dissipative Term in (1.475) und die Induktionsgleichung erhält die einfache Form

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.476)$$

in diesem Fall bleibt der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche erhalten (siehe auch Abbildung 1.17) bzw. Gleichung 1.234).

Schließlich kann mit Hilfe von (1.464) noch der Strom \mathbf{j} aus der Bewegungsgleichung (1.467)

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P - \rho \nabla \psi + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (1.477)$$

eliminiert werden und die nächsten Abschnitte zeigen einfache Anwendungen dieses sehr komplexen Gleichungssystems. Dabei bestimmen die magnetischen Effekte das Verhalten des Plasmas entscheidend.

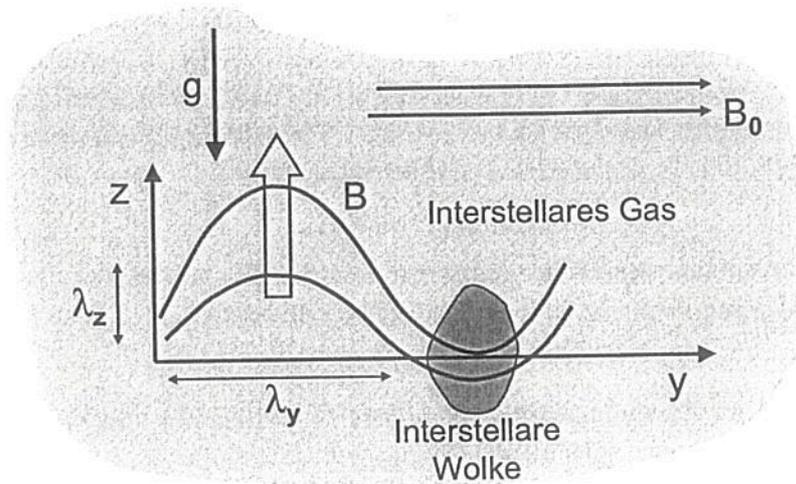


Abbildung 1.35: Schematische Darstellung einer magnetischen Parker-Instabilität im galaktischen Schwerfeld g . Das interstellare Gas sammelt sich in den Tälern der Feldlinien. Die Störung muss sowohl in y - als auch z -Richtung eine minimale Wellenlänge überschreiten.

1.17.3 Parker-Instabilität

Die Frage, warum das interstellare Medium nicht homogen mit Gas ausgefüllt ist, stellt ein schwieriges Problem der Astrophysik dar. So ist beispielsweise das kalte Gas im interstellaren Medium nicht räumlich homogen verteilt, es kommt zu Verdichtungen, den sog. *Interstellaren Wolken*, aus denen sich neue Sterne durch einen Gravitationskollaps bilden können. Im Rahmen dieses Abschnittes soll der Frage nach der Entstehung solcher interstellarer Wolken nachgegangen werden.

In einer Galaxie wird ein Teil eines Spiralarmes betrachtet, wobei die z -Richtung senkrecht auf die galaktische Ebene steht. Vereinfachend gelte vertikal hydrostatisches Gleichgewicht und alle Größen hängen nur vom Abstand zur galaktischen Scheibe z ab. Damit ergibt sich für eine galaktische Schwerebeschleunigung g und eine vertikale Schichtung aus Gas, Magnetfeldern und kosmischer Strahlung

$$\frac{d}{dz} \left(P_g + \frac{B^2}{8\pi} + P_c \right) = -\rho g. \quad (1.478)$$

Eine weitere wichtige Annahme ist nun, dass sich alle Druckbeiträge in Gleichung (1.478) einander proportional sind, d.h.

$$\frac{B^2}{8\pi} = \alpha P_g \quad \text{und} \quad P_c = \beta P_g. \quad (1.479)$$

Damit vereinfacht sich (1.478) zu

$$(1 + \alpha + \beta) \frac{dP_g}{dz} = -\rho g. \quad (1.480)$$

Führt man nun eine isotherme Zustandsgleichung mit der Schallgeschwindigkeit c_s ein, d.h. $P_g = c_s^2 \rho$, so erhält man eine Gleichung, die direkt integrierbar wird

$$c_s^2(1 + \alpha + \beta) \frac{d\rho}{dz} = -\rho g \quad (1.481)$$

und eine exponentielle Dichteschichtung mit $\rho_{00} = \rho_0(0)$ liefert

$$\rho(z)_0 = \rho_{00} \exp\left(-\frac{1}{c_s^2(1 + \alpha + \beta)} \int_0^z g(z) dz\right). \quad (1.482)$$

Damit ist es möglich, eine Skalenhöhe Λ sowie eine mittlere Schwerebeschleunigung $\langle g \rangle$ zu definieren

$$\langle g \rangle \Lambda = \int_0^\Lambda g(z) dz = c_s^2(1 + \alpha + \beta) \quad (1.483)$$

$$\Lambda = \frac{c_s^2(1 + \alpha + \beta)}{\langle g \rangle}. \quad (1.484)$$

Aus den Beobachtungen der Sterne und des Gases in unserer Milchstraße lässt sich dieser mittlere Wert von $\langle g \rangle$ in der Sonnenumgebung auf etwa $\langle g \rangle = 1.6 \cdot 10^{-11} \text{m s}^{-2}$ bestimmen. Nimmt man im Folgenden diese Größe als konstant an, folgt daraus für den Gesamtdruck P bei einem Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, B(z), 0)$, das beispielsweise nur parallel zur y -Richtung gegeben ist

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{\langle g \rangle}{c_s^2(1 + \alpha + \beta)} = \frac{2}{B} \frac{dB}{dz} = -\frac{1}{\Lambda}. \quad (1.485)$$

Bringt man an eine derartig festgelegte Anfangskonfiguration eine kleine Störung an, d.h. das System der MHD-Gleichungen (Abschnitt 1.17) wird mit folgenden Annahmen linearisiert, wobei die zweiten Terme rechts die Störungen darstellen, die nur von der Zeit t und z abhängen

$$\mathbf{B} = (0, B_0(z), 0) + (0, b_y(t, z), b_z(t, z)) \quad (1.486)$$

$$\mathbf{u} = (0, 0, 0) + (0, u_y(t, z), u_z(t, z)) \quad (1.487)$$

$$\rho = \rho_0(z) + \delta\rho(t, z) \quad (1.488)$$

$$\frac{\delta P}{P} = \gamma \frac{\delta\rho}{\rho} \quad (1.489)$$

Schließlich kann man noch das Vektorpotential A mit

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B} \quad \text{bzw.} \quad \delta\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \delta A(y, z) \quad (1.490)$$

eingeführen, um $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ zu garantieren. Dabei ist \mathbf{e}_z der Einheitsvektor in z -Richtung.

Einsetzen dieser Größen, Linearisierung und längere Rechnung (Parker, 1966) führt zu einer Gleichung für δA , die man mit Hilfe des Ansatzes

$$\delta A = f(\xi) \exp(i\omega t + ik y), \quad \text{mit} \quad \xi = kz \quad (1.491)$$

löst. So gelangt man zu einer Dispersionrelation, d.h.

$$D(\xi, \omega, k) = 0. \quad (1.492)$$

Dabei zeigt sich, dass Störungen (also $\omega^2 < 0$) anwachsen können, wenn sowohl in der horizontalen y -Richtung λ_y als auch in der vertikalen z -Richtung λ_z eine minimale Wellenlänge Λ_y überschritten wird

$$\lambda_y > \Lambda_y = \frac{4\pi\Lambda}{\sqrt{2\alpha + \beta + 1}} \quad (1.493)$$

$$\lambda_z = \frac{\Lambda_y}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{\Lambda_y}{\lambda_y} < 1. \quad (1.494)$$

Wichtig ist dabei, dass $\alpha = \beta = 0$ stets eine stabile Lösung liefert. Eine hydrostatische Atmosphäre im äußeren Schwerfeld g ist ohne kosmische Strahlung und/oder Magnetfeld immer stabil.

Der physikalische Mechanismus dieser Instabilität besteht darin, dass Gas entlang der verbogenen Feldlinien tiefer in das Potential sinkt (vergl. Abb. 1.35). Auf den verdünnten Gebieten lastet damit ein geringeres Gewicht und der magnetische Druck kann zusammen mit dem Druck der kosmischen Strahlung diese Region weiter nach oben drücken, die Feldlinien verformen sich weiter und noch mehr Gas kann entlang der Feldlinien nach unten sinken. Die minimale Wellenlänge ergibt sich daraus, dass sich die Feldlinien aufgrund der magnetischen Zugspannungen gegen ein Verbiegen wehren und dass damit erst eine gewisse Menge an Gas die notwendige Schwelle der Schwerkraft überschreiten kann.

Die Anwachszeit einer solchen Störung ergibt sich zu

$$\tau = -\frac{i}{\omega}, \quad (1.495)$$

und liegt für die Parameter des ISM bei etwa 10^7 Jahren. Für die Längenskala ergibt sich etwa $2\pi\Lambda \simeq 1$ kpc, d.h. beide Werte stehen in Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

1.17.4 Wellen in magnetischen Medien

Um Wellen in einem magnetisiertem Medium zu beschreiben, ersetzt man im Gleichungssystem der MHD (siehe Abschnitt 1.17) die physikalischen Größen X durch

$$X = X_0 + X_1, \quad \text{mit} \quad |X_1| \ll |X_0| \quad (1.496)$$

und führt um die zeitunabhängige Gleichgewichtslösung X_0 eine Linearisierung durch. Zur weiteren Vereinfachung vernachlässigt man die Eigengravitation und nimmt unendliche Leitfähigkeit ($\lambda \rightarrow \infty$) an. Mit den Annahmen $\mathbf{B}_0 = (B_0, 0, 0)$, $\mathbf{u}_0 = 0$ und

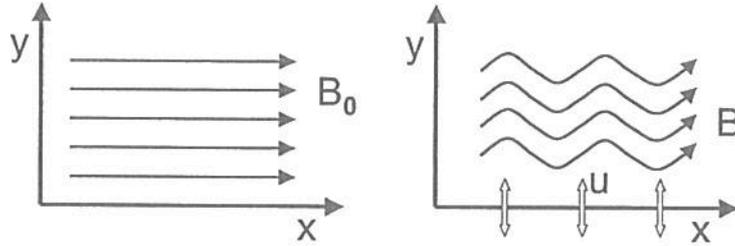


Abbildung 1.36: Transversale Alfvén-Wellen in einem homogenen Magnetfeld B_0 . Die linke Abbildung zeigt den Anfangszustand. Die Ausbreitung entlang der Feldlinien erfolgt mit der Alfvén-Geschwindigkeit v_A in x -Richtung.

einer einfachen Zustandsgleichung der Form $P = K\rho^\gamma$ erhält man folgendes System

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 \quad (1.497)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_1) \quad (1.498)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad (1.499)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \quad (1.500)$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (1.501)$$

Diese Gleichungen bilden ein homogenes System für die gestörten Größen und können mit einem Exponentialansatz gelöst werden. Wir werden im Weiteren jedoch nur zwei wichtige Spezialfälle diskutieren.

Alfvén-Wellen

In diesem Fall nehmen wir an, dass die Störgrößen nur von x und t abhängen, und dass die Geschwindigkeit nur eine y -Komponente besitzt, also $\mathbf{u}_1 = (0, u_{1y}(x, t), 0)$. Das ungestörte Feld sei in x -Richtung homogen, d.h. $\mathbf{B}_0 = (B_0, 0, 0)$. Diese Situation ist in Abbildung 1.36 dargestellt.

Für die Störung u_{1y} machen wir folgenden Exponentialansatz

$$u_{1y}(x, t) = C e^{-i\omega t \pm ilx} \quad (1.502)$$

wobei C eine beliebige Konstante darstellt. Die Induktionsgleichung (1.499) liefert

$$-i\omega \mathbf{B}_1 = (0, B_0 u'_{1y}, 0), \quad (1.503)$$

wobei $'$ die Ableitung nach x bezeichnet. Eingesetzt in den Lorentz-Term der linearisierten Bewegungsgleichung (1.497) liefert nur die y -Komponente einen Beitrag

$$-i\omega \rho_0 u_{1y} = \frac{i}{4\pi\omega} B_0^2 u''_{1y}. \quad (1.504)$$

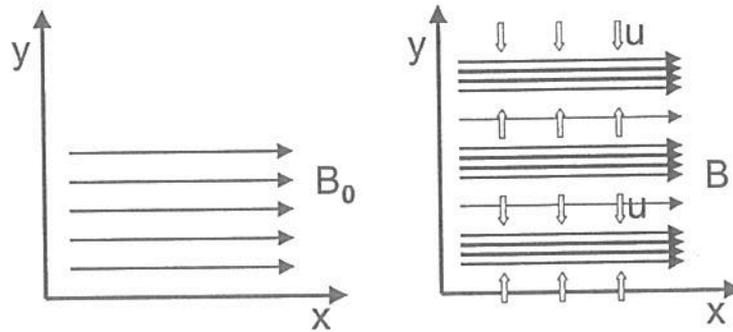


Abbildung 1.37: Magnetoakustische Wellen parallel zu Feld. Diese Wellen entsprechen Schallwellen mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von $\sqrt{c_s^2 + v_A^2}$. Die Ausbreitung erfolgt quer zum Feld in y -Richtung.

Dabei ist zu beachten, dass alle Größen nur von x abhängen, d.h. die Ableitung der Druckstörung P_1 fällt weg (vergleiche dazu auch den folgenden Abschnitt). Mit Hilfe des Exponentialansatzes (1.502) lässt sich die gesuchte Dispersionsrelation

$$l^2 = \frac{4\pi\omega^2\rho_0}{B_0^2} \quad (1.505)$$

ableiten. Die Phasengeschwindigkeit dieser Wellen

$$v_A = \frac{\omega}{l} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (1.506)$$

wird nach ihren Entdecker H. Alfvén als *Alfvén-Geschwindigkeit* bezeichnet. Es handelt sich dabei um eine typische Geschwindigkeit, mit der sich Störungen entlang der Feldlinien ausbreiten. Da die Auslenkung u_{1y} der Welle (y -Richtung im verwendeten Koordinatensystem) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (x -Richtung) steht, handelt es sich um *Transversalwellen*.

Formal kann die Alfvén-Geschwindigkeit v_A (1.506) für kleine Dichten ρ_0 beliebig groß werden, da bei der Ableitung ein vereinfachtes Gleichungssystem verwendet wurde. Mit den vollen Maxwell-Gleichungen hat v_A für $\rho_0 \rightarrow 0$ die Lichtgeschwindigkeit als Grenzfall.

Magnetoakustische Wellen

Nachdem im letzten Abschnitt Transversalwellen betrachtet wurden, wenden wir uns hier einem weiteren Spezialfall einer Longitudinalwelle zu, in dem die Störung nur von der y -Koordinate abhängen soll, also $\mathbf{u}_1 = (0, u_{1y}(y, t), 0)$. Das ungestörte Feld \mathbf{B}_0 sei wiederum in x -Richtung homogen, d.h. $\mathbf{B}_0 = (B_0, 0, 0)$ und die entsprechende Situation ist in Abbildung 1.37 skizziert.

Für die Störung u_{1y} machen wir folgenden Exponentialansatz

$$u_{1y}(y, t) = Ce^{-i\omega t \pm ily} \quad (1.507)$$

wobei C eine beliebige Konstante darstellt. Die weitere Vorgangsweise erfolgt analog zum vorherigen Abschnitt, wo nun die Induktionsgleichung den Ausdruck

$$-i\omega\mathbf{B}_1 = (-B_0 u'_{1y}, 0, 0) \quad (1.508)$$

liefert. Man beachte, dass nun $'$ die Ableitung nach y darstellt. Die y -Komponente der Bewegungsgleichung hat nach der Auswertung des Lorentz-Terms folgende Gestalt

$$-i\omega\rho_0 u_{1y} = -\nabla P_1 + \frac{i}{4\pi\omega} B_0^2 u''_{1y}, \quad (1.509)$$

da nun auch die Ableitung der thermischen Druckstörung P_1 auftritt. Aus der linearisierten Kontinuitätsgleichung (1.498) folgt

$$-i\omega\rho_1 = -\rho_0 u'_{1y}, \quad (1.510)$$

und die linearisierte Zustandsgleichung (1.501) ergibt nach Einführung der Schallgeschwindigkeit c_s

$$P_1 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \rho_1 = c_s^2 \rho_1 \quad (1.511)$$

die fehlende Relation zwischen ρ_1 und P_1 . Somit kann man (1.510) und (1.511) in die Bewegungsgleichung (1.509) einsetzen

$$-i\omega\rho_0 u_{1y} = -c_s^2 \frac{\rho_0}{i\omega} u''_{1y} + \frac{i}{4\pi\omega} B_0^2 u''_{1y}. \quad (1.512)$$

Die Definition der Alfvén-Geschwindigkeit (1.506) erlaubt nach dem Ansatz (1.507) folgende Dispersionsrelation

$$\omega^2 = (c_s^2 + v_A^2) l^2. \quad (1.513)$$

Es handelt sich dabei um *magnetohydrodynamische* oder *magnetoakustische* Longitudinalwellen, die sich mit einer kombinierten Phasengeschwindigkeit von

$$v = \pm \frac{\omega}{l} = \pm \sqrt{c_s^2 + v_A^2} \quad (1.514)$$

senkrecht zu den Feldlinien ausbreiten. Im Grenzfall eines verschwindenden Magnetfeldes ($v_A \rightarrow 0$) erhält man normale Schallwellen, überwiegt das Magnetfeld, so erfolgt die Ausbreitung mit Alfvéngeschwindigkeit. Es handelt sich hier (wie bei den Alfvén-Wellen) um eine dispersionsfreie Propagation, d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist von der Frequenz unabhängig.

1.17.5 Magnetische Bremsung

Sei Ω_0 die Winkelgeschwindigkeit einer interstellaren Wolke mit Anfangsradius R_0 und Masse M . Zur Vereinfachung nehmen wir sphärische Symmetrie an und vernachlässigen eine Abplattung durch Rotation. Betrachtet man den Drehimpuls J ,

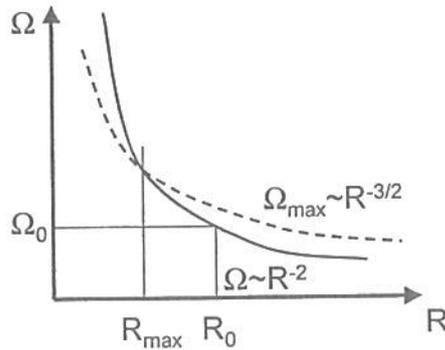


Abbildung 1.38: Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Schwerkraft bei Drehimpulserhaltung.

so gilt

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{2}{5} M R_0^2 \Omega_0 && \text{für eine homogene Kugel} \\
 &= K M R_0^2 \Omega_0 && \text{allgemein, z.B. } K_{\text{Stern}} \simeq \frac{1}{13}.
 \end{aligned}
 \tag{1.515}$$

Bei der Kontraktion der Wolke ändert sich die Winkelgeschwindigkeit mit dem Radius bei Drehimpulserhaltung gemäß

$$\frac{R_0}{R} = \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^{1/2} \quad \text{oder} \quad \Omega \propto R^{-2}.
 \tag{1.516}$$

Da bei maximaler Winkelgeschwindigkeit Ω_{max} ein Gleichgewicht zwischen Schwerkraft und Fliehkraft erfüllt ist, folgt eine Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned}
 \frac{GM}{R^2} &= R \Omega_{\text{max}}^2 && (1.517) \\
 \Omega_{\text{max}}^2 &= \frac{GM}{R^3} = \text{const. } \bar{\rho} && \text{oder} \quad \Omega_{\text{max}} \sim R^{-3/2}.
 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Kurven (1.516) und (1.517) liefert den minimalen Radius R_{min} , auf den die Wolke kollabieren kann, um Gleichgewicht zwischen Schwerkraft und Fliehkraft zu erlangen. Setzt man einen typischen Wert für $\Omega_0 = 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ ein, so liefert die Bedingung (1.517) mit $\bar{\rho} = 10^{-20} \text{ kg m}^{-3}$ ein Verhältnis von minimalem Radius zu Ausgangsradius $R/R_0 \sim 0.36$, d.h. die Interstellare Wolke kann ihren Radius bei Drehimpulserhaltung nur auf etwa 1/3 verkleinern. Interstellare Wolken müssen demnach beim Kollaps Drehimpuls verlieren, um Sterne bilden zu können. Betrachtet man eine Interstellare Wolke, die als Teil unserer Milchstraße an der galaktischen differentiellen Rotation teilnimmt, kann man den spezifischen Drehimpuls, also den Drehimpuls pro Masse abschätzen. Es gilt in etwa

$$\frac{J}{M} \simeq 10^{20} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.
 \tag{1.518}$$

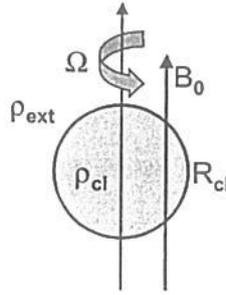


Abbildung 1.39: Konfiguration einer magnetisch gebremsten interstellaren Wolke, deren Rotation Ω um die z -Achse parallel zur Ausrichtung des Magnetfeldes \mathbf{B}_0 erfolgt.

Anders für einen Stern auf der Hauptreihe, der einen spezifischen Drehimpuls der Größenordnung

$$\frac{J}{M} \simeq 10^{13} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (1.519)$$

aufweist, d.h. jeder Stern hat einen 10^7 -fachen kleineren spezifischen Drehimpuls. Anders formuliert, jeder gravitierende Körper muss während seines Bildungsprozesses seinen Drehimpuls um mehrere Größenordnungen reduziert haben, um nicht gegen die Zentrifugalbarriere zu laufen. Dieses sogenannte *Drehimpulsproblem* wurde erstmals von Mestel (1956) formuliert.

Die Lösung dieses Drehimpulsproblems lässt sich durch die Fragmentation der Interstellaren Wolke nicht lösen, da man bei einem weiteren Kollaps rasch in die Zentrifugalbarriere läuft, wie bereits in Gleichung (1.517) illustriert. Da aber Magnetfelder räumlich weit getrennte Gebiete mit einander verbinden, können sie über die magnetischen Zugspannungen, d.h. über Alfvén-Wellen, zu einem Drehimpulstransport beitragen. Diesen Vorgang nennt man *magnetische Bremsung* und im Folgenden wird ein einfacher Fall behandelt.

Dazu betrachten wir eine axialsymmetrische Konfiguration (Abb. 1.39) in Zylinderkoordinaten (s, φ, z) , d.h. $\partial/\partial\varphi = 0$. Die Bewegung der Wolke erfolgt als starre Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die z -Achse,

$$\mathbf{u} = (u_s, u_\varphi, u_z) = (0, u_\varphi(t, s), 0) \quad \text{mit} \quad u_\varphi(t, s) = \Omega(t)s. \quad (1.520)$$

Das anfängliche Magnetfeld ist parallel zur Rotationsachse besitzt nur eine z -Komponente

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_0) \quad (1.521)$$

und soll auch im Weiteren keine radiale Komponente $B_s = 0$ aufweisen. Die Divergenzfreiheit von \mathbf{B} liefert die Bedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{s} \frac{\partial s B_s}{\partial s} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \text{oder} \quad B_z = B_z(s). \quad (1.522)$$

Durch die Rotation der Wolke wird aufgrund der Kopplung durch das Magnetfeld das äußere Medium mit der Dichte ρ_{ext} in Bewegung versetzt. Die Induktionsgleichung

der MHD (1.475) liefert für unendliche Leitfähigkeit ($\lambda \rightarrow \infty$) eine φ -Komponente

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = B_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \quad (1.523)$$

und die Geschwindigkeit ist durch die Bewegungsgleichung (1.477)

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{B_z}{4\pi\rho_{\text{ext}}} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \quad (1.524)$$

festgelegt, wobei wir ein homogenes externes Medium ohne Eigengravitation voraussetzen. Die zeitliche Ableitung von Gleichung (1.524) erlaubt die Substitution von (1.523)

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \frac{B_z}{4\pi\rho_{\text{ext}}} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial t \partial z} = \frac{B_z}{4\pi\rho_{\text{ext}}} \frac{\partial}{\partial z} \left(B_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) = \frac{B_z^2}{4\pi\rho_{\text{ext}}} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}, \quad (1.525)$$

wobei die Eigenschaft (1.522) von B_z zum Tragen kommt. Mit Hilfe der Alfvén-Geschwindigkeit (1.506) erhalten wir eine Wellengleichung für die φ -Komponente der Geschwindigkeit im äußeren Medium

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = v_A^2 \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}, \quad \text{mit } v_A^2 = \frac{B_z^2}{4\pi\rho_{\text{ext}}}. \quad (1.526)$$

Da wir primär an der Zeitskala der magnetischen Bremsung interessiert sind, verzichten wir hier auf die Lösung der Gleichung (1.526) und betrachten den Drehimpulsstrom D , der von der sphärisch angenommenen Wolke ins umgebende Medium fließt

$$D(t) = 2\pi \int_0^{R_{\text{cl}}} u_\varphi(t, s) v_A \rho_{\text{ext}} s^2 ds. \quad (1.527)$$

Da die Wolke starr rotieren soll, d.h. $u_\varphi = \Omega(t)s$, lässt sich dieses Integral elementar berechnen

$$D(t) = 2\pi\Omega(t)v_A\rho_{\text{ext}} \int_0^{R_{\text{cl}}} s^3 ds = \frac{\pi}{2}\Omega(t)v_A\rho_{\text{ext}}R_{\text{cl}}^4. \quad (1.528)$$

Die Änderung des Gesamtdrehimpulses J der Wolke ist durch

$$\frac{dJ}{dt} = -2D(t) \quad (1.529)$$

bestimmt, wobei der Faktor 2 von den beiden Hemisphären der Wolke kommt. Bezeichnet I das Trägheitsmoment der Wolke, so gilt für eine sphärische Wolke mit Dichte ρ_{cl} und Masse M

$$J = I\Omega \quad \text{mit} \quad I = \frac{2}{5}MR_{\text{cl}}^2 = \frac{8\pi}{15}\rho_{\text{cl}}R_{\text{cl}}^5. \quad (1.530)$$

Mit Hilfe dieser Relationen wird aus (1.529)

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{15}{8} \frac{\rho_{\text{ext}}}{\rho_{\text{cl}}} \frac{v_A}{R_{\text{cl}}} \Omega(t). \quad (1.531)$$

Definieren wir eine typische Bremszeitskala durch

$$\tau_b = -\Omega / \frac{d\Omega}{dt} \quad (1.532)$$

zeigt sich aus (1.531) die Effektivität der magnetischen Bremsung

$$\tau_b = \frac{8}{15} \frac{\rho_{cl}}{\rho_{ext}} \frac{R_{cl}}{v_A}. \quad (1.533)$$

Diese Formel gestattet eine anschauliche Interpretation. Aus der Dimension der Wolke R_{cl} und der Alfvén-Geschwindigkeit v_A im externen Medium ergibt sich die Zeitskala, die noch mit dem Dichteverhältnis zwischen Wolke ρ_{cl} und externem Medium ρ_{ext} verlängert wird. Die in das externe Medium laufenden Wellen legen in der Zeit t eine Entfernung $L(t) = v_A t$ zurück. Von der rotierenden Wolke wird also ober- und unterhalb eine zylinderförmige Region in Rotation versetzt. Erst wenn das Trägheitsmoment dieser gestörten, linear mit der Zeit anwachsenden Region dem Trägheitsmoment der Wolke vergleichbar wird, $t \simeq t_b$, setzt eine effektive Abbremsung ein.

1.17.6 Dissipation von Magnetfeldern

Im Fall endlicher Leitfähigkeit λ und vernachlässigbarer Geschwindigkeit vereinfacht sich die Induktionsgleichung (1.475) der MHD zu

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\lambda} \Delta \mathbf{B}. \quad (1.534)$$

Damit haben wir eine klassische Diffusionsgleichung für das Magnetfeld vor uns. Daraus lässt sich eine typische Abklingzeit τ_d abschätzen, wenn das Feld B eine bestimmte Längenskala L aufweist, d.h. wir ersetzen in (1.534)

$$\frac{B}{\tau_d} \simeq \frac{c^2}{4\pi\lambda} \frac{B}{L^2}. \quad (1.535)$$

Damit folgt für die Dissipationszeit

$$\tau_d \simeq \frac{4\pi\lambda L^2}{c^2}, \quad (1.536)$$

woraus man sieht, dass räumlich kleine Felder (L klein) schnell zerfallen, großräumige Felder dagegen langsam. Diese Tatsachen sind auch in Tabelle 1.3 zusammengefasst. Werden z.B. durch turbulente Bewegungen die Magnetfelder zerzaust und verringert sich dadurch die Längenskala von L auf L/n , so verkürzt sich die Dissipationszeit um n^2 .

Betrachtet man einen stationären Zustand von Strömungen mit einer Geschwindigkeit u und Magnetfeldern in Gleichung (1.475), so kann man aus

$$-\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \frac{c^2}{4\pi\lambda} \Delta \mathbf{B} \quad (1.537)$$

Objekt	Dimension [m]	Leitfähigkeit [s ⁻¹]	Zeitskala
Kupfer	1	10 ¹⁸	100 s
Erdkern	3.5 · 10 ⁶	2 · 10 ¹³	10 ⁴ Jahre
Sonnenfleck	3 · 10 ⁷	10 ⁹	3 Jahre
Stern	10 ⁹	10 ⁹	Jahre
Galaxie	10 ²¹	10 ¹⁰	10 ²⁸ Jahre

Tabelle 1.3: Abklingzeiten von Magnetfeldern

abschätzen, welche Geschwindigkeiten u_d über eine Skala L notwendig sind, um solche Dissipationsverluste auszugleichen

$$u_d \simeq \frac{c^2}{4\pi\lambda L}. \quad (1.538)$$

Aufgrund der hohen Leitfähigkeiten in astrophysikalischen Objekten genügen meistens bereits kleine Geschwindigkeiten, um solche Verluste auszugleichen. Am Beispiel des Erdkerns (vergl. Tabelle 1.3) erhalten wir $u_d \simeq 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$.

1.17.7 Drehimpulsverlust durch magnetisierten Wind

Betrachten wir einen Stern mit Winkelgeschwindigkeit Ω und einem bis zum Sternrand radialen Magnetfeld \mathbf{B} , das an der Oberfläche des Sterns einen Knick hat und leicht verbogen ins ISM reicht. Das Magnetfeld versucht, den Knick auszugleichen und übt so eine Kraft auf den Stern aus.

Ohne Magnetfeld nimmt die Winkelgeschwindigkeit Ω der ausströmenden Materie wie r^{-2} ab. Ist die Materie des Sternwindes bis zu einem Radius $r = L$ über das Magnetfeld an den Stern gekoppelt, wird Drehimpuls vom Stern auf die ausströmende Materie transportiert.

Der Drehimpuls des Sterns sei $J = KMR^2\Omega$ und den Massenverlust durch Sternwind definieren wir als dM/dt

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} (KMR^2\Omega) = L^2\Omega \frac{dM}{dt} \quad (1.539)$$

Materie verlässt die Oberfläche $r = R$ bis zu einem Punkt ($r = L$), an dem die Materie entkoppelt und nimmt so den Drehimpulsbetrag $L^2\Omega$ mit.

$$J_L \propto L^2\Omega. \quad (1.540)$$

Wir schätzen die Drehimpulsänderung eines Sterns ab

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [KMR^2\Omega] &= L^2\Omega \frac{dM}{dt} \\
 \frac{1}{MR^2\Omega} \frac{d}{dt} [KMR^2\Omega] &= \frac{L^2\Omega}{MR^2\Omega} \frac{dM}{dt} \\
 \frac{KR^2}{MR^2\Omega} \left[\Omega \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Omega}{dt} \right] &= \frac{L^2}{MR^2} \frac{dM}{dt} \\
 \frac{K}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} &= \left[-\frac{K}{M} + \frac{L^2}{MR^2} \right] \frac{dM}{dt} \\
 K \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} &= \left[\frac{L^2}{R^2} - K \right] \frac{\dot{M}}{M} \tag{1.541}
 \end{aligned}$$

Die typische Längenskala dieser Entkopplung liegt bei $L \simeq 50R$ und es gilt daher $L^2/R^2 \gg K$. Die letzte Gleichung vereinfacht sich

$$K \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \simeq \frac{L^2}{R^2} \frac{\dot{M}}{M} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \simeq \frac{L^2}{KR^2} \frac{\Delta M}{M} \tag{1.542}$$

bzw. mit charakteristischen Werten

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \simeq 10^5 \frac{\Delta M}{M} . \tag{1.543}$$

Demnach reicht bereits ein geringer Massenverlust aus, um einen Stern effektiv abzubremesen. Nimmt man die Sonne als Beispiel, so hat sie im Laufe ihres bisherigen Lebens von $\delta t = 4.5 \cdot 10^9$ Jahre etwa $M \simeq 10^{-4} M_\odot$ verloren, also

$$\delta t \dot{M} \simeq 10^{-4} M_\odot, \quad \dot{J} = L^2 \Omega \dot{M}, \quad J = KR^2 \Omega M$$

Die typische Bremszeit der Sonne lässt sich daraus abschätzen,

$$\frac{J}{\dot{J}} \simeq 1.4 \cdot 10^9 \text{ Jahre} . \tag{1.544}$$

1.17.8 MHD eines Sternwindes

Im vorigen Abschnitt wurde noch nichts darüber ausgesagt, wie diese Entkopplung des stellaren Magnetfeldes mit der Materie aussieht, bzw. ist die Größe L bisweilen noch unbestimmt. Um diese Wechselwirkung genauer zu studieren, betrachten wir die Gleichungen der MHD für einen stationären Fall mit $\partial_t \rho = 0, \partial_t \mathbf{u} = 0$, also axiale Symmetrie und beschränken uns auf die Äquatorebene, wie in Abbildung 1.40 skizziert. Außerdem sei wieder unendliche Leitfähigkeit ($\lambda \rightarrow \infty$) gegeben (siehe auch (1.476))

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B} . \tag{1.545}$$

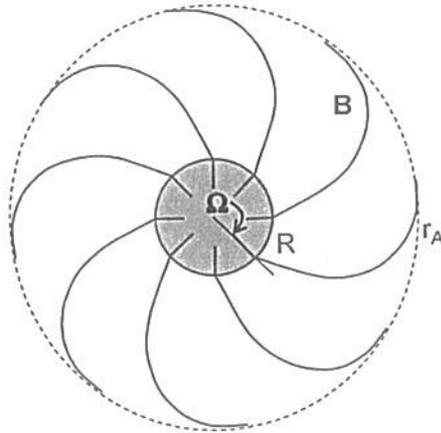


Abbildung 1.40: Konfiguration des magnetisierten Winds. Der Stern rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω , das innere radiale Magnetfeld hat an der Oberfläche einen Knick und koppelt bis r_A an das ISM.

In Kugelkoordinaten gilt in der Äquatorebene $\theta = \pi/2$, $\partial/\partial\theta = 0$ und $\partial/\partial\varphi = 0$, so dass sich die letzten Gleichungen vereinfachen und damit

$$\begin{aligned} c\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r(u_r B_\varphi - u_\varphi B_r)] = 0 \\ r(u_r B_\varphi - u_\varphi B_r) &= \text{const.} \end{aligned} \quad (1.546)$$

An der Sternoberfläche soll die Ausströmgeschwindigkeit u_r klein sein, da der Wind in der Atmosphäre bei kleinen Geschwindigkeiten beginnt. Außerdem soll der Knick im \mathbf{B} -Feld nicht zu groß sein, d.h. auch B_φ soll klein sein.

$$u_r B_\varphi \ll u_\varphi B_r$$

Im Folgenden bezeichnet der Index 0 die Größen an der Sternoberfläche $r = R$.

$$u_\varphi = \Omega R, \quad r u_r B_\varphi - r u_\varphi B_r \cong -\Omega R^2 B_{r,0} \quad (1.547)$$

Verwendet man die folgende Vektoridentität

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (1.548)$$

und betrachten wir die φ -Komponente der stationären Bewegungsgleichung (1.477)

$$\nabla P + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (1.549)$$

so bleibt davon

$$\rho u_r \frac{d}{dr} (r v_\varphi) = \frac{1}{4\pi} B_r \frac{d}{dr} (r B_\varphi). \quad (1.550)$$

Die stationäre Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ liefert für dieses Problem die radiale Komponente

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho u_r) &= 0 \\ r^2 \rho u_r &= I = \text{const.} \end{aligned} \quad (1.551)$$

und durch die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes gilt

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 B_r)}{dr} = 0 \quad \text{oder} \quad r^2 B_r = \text{const.} \quad (1.552)$$

Wir fassen diese Konstanten in (1.550) zusammen und integrieren

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (r u_\varphi) &= \frac{B_r r^2}{4\pi v_r \rho r^2} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) \\ r u_\varphi &= C r B_\varphi + D \\ \rho r u_r u_\varphi &= C r B_\varphi \rho u_r + D \rho u_r \\ &= \frac{B_r}{4\pi \rho u_r} r B_\varphi \rho u_r + D \rho u_r \\ \rho r u_r u_\varphi - \frac{r}{4\pi} B_r B_\varphi &= D \rho u_r \end{aligned} \quad (1.553)$$

Betrachten die Sternoberfläche $r = R$, dort gilt

$$\rho R v_{r,0} u_{\varphi,0} - \frac{R}{4\pi} B_{r,0} B_{\varphi,0} = D \rho u_{r,0}. \quad (1.554)$$

Der Ausdruck (1.554) beschreibt den *Drehimpulsverlust durch Abströmen* (erster Term links) und die *magnetischen Zugspannungen* (zweiter Term) an der Oberfläche, die sich als Knick an der Sternoberfläche etablieren (siehe Abb. 1.40)

$$\frac{1}{4\pi} B_{r,0} B_{\varphi,0} = \frac{1}{4\pi} B_{r,0} [[B_{\varphi,0}]], \quad (1.555)$$

wobei $[[B_\varphi]]$ den Sprung der φ -Komponente am Sternrand bezeichnet. Die φ -Komponente des Magnetfeldes ist innen null, hat jedoch außen einen endlichen Wert; das heißt die Tangentialkomponente von \mathbf{B} ist unstetig und bewirkt ein Drehmoment auf den Stern.

Die Gleichung (1.554) bestimmt also den Gesamtdrehimpulsverlust pro Masse, den wir bereits in (1.540) über die typische Längenskala L approximiert haben

$$D = L^2 \Omega = L^2 \frac{u_{\varphi,0}}{R}. \quad (1.556)$$

Es bleibt die Größe L zu bestimmen.

Dazu definieren wir die (dimensionslose) *magnetische Machzahl* M_A .

$$M_A^2 = \frac{u_r^2}{v_A^2} = \frac{u_r^2}{\frac{B_r^2}{4\pi\rho}} \quad (1.557)$$

$$= \frac{4\pi\rho u_r^2 r^4}{B_r^2 r^4} = \frac{4\pi I^2}{(B_r r^2)^2} \frac{1}{\rho} = \text{const.} \frac{1}{\rho}$$

$$M_A \propto \rho^{-1/2} \quad (1.558)$$

Die magnetische Machzahl nimmt nach außen hin wie $\rho^{-1/2}$ zu, wobei (1.551) und (1.552) zur Anwendung kommen. Um u_φ zu bestimmen, bedienen wir uns der Relationen (1.547), (1.551) und (1.553) und eliminieren B_φ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} r u_r B_\varphi &= r u_\varphi B_r - \Omega r^2 B_r \\ I B_\varphi &= r^2 \rho (u_\varphi - \Omega r) B_r \\ \rho u_r u_\varphi r - \frac{r}{4\pi} B_r B_\varphi &= \rho u_r D \\ B_\varphi &= -\frac{4\pi(\rho u_r D - \rho u_r u_\varphi r)}{r B_r} \end{aligned}$$

setzen B_φ in die erste Gleichung ein

$$\begin{aligned} -4\pi r^2 \rho u_r \left(\frac{\rho u_r D - \rho u_r u_\varphi r}{r B_r} \right) &= r^2 \rho (u_\varphi - \Omega r) B_r \\ -4\pi \rho u_r^2 D + 4\pi \rho u_r^2 u_\varphi r &= (u_\varphi - \Omega r) B_r^2 r \\ u_\varphi (4\pi \rho u_r^2 r - r B_r^2) &= 4\pi \rho u_r^2 D - \Omega r^2 B_r^2 \\ u_\varphi \left(\frac{4\pi \rho u_r^2}{B_r^2} r - r \right) &= \frac{4\pi \rho u_r^2 D}{B_r^2} - \Omega r^2 \end{aligned}$$

und verwenden wieder $v_A^2 = B_r^2/(4\pi\rho)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} u_\varphi \left(\frac{u_r^2}{v_A^2} - 1 \right) r &= \frac{u_r^2}{v_A^2} D - \Omega r^2 \\ u_\varphi (M_A^2 - 1) &= M_A^2 \frac{D}{r} - \Omega r \\ u_\varphi &= u_\varphi(u_r, u_A, r, \Omega) = \frac{M_A^2 \frac{D}{r} - \Omega r}{M_A^2 - 1} \quad (1.559) \end{aligned}$$

Der Ausdruck (1.559) wird für $u_r = \pm v_A$ singulär, so dass eine Regularitätsbedingung von

$$M_A^2 \frac{D}{r} = r\Omega \quad \text{und} \quad D = r^2 \Omega|_{u_r=v_A} = r_A^2 \Omega. \quad (1.560)$$

folgt. Bei $r = r_A$ ist die radiale Ausströmgeschwindigkeit gleich der lokalen Alfvén-geschwindigkeit (v_A und u_r sind Funktionen von r), d.h. an dieser Stelle ist $u_r = v_A$ und

$$D = r_A^2 \Omega = L^2 \Omega \quad \text{oder} \quad L = r_A. \quad (1.561)$$

Die Größe L , der Abstand vom Stern, wo Magnetfeld und Materie entkoppeln, ist also der Radius, an dem die lokale Alfvéngeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit des Sternenwindes übereinstimmt. r_A ist der maximale Radius, an dem das ruhende ISM noch an den Stern (über den Wind) gekoppelt ist (Abb. 1.40). Die radiale Komponente des \mathbf{B} -Feldes verschwindet dort, was einen weiteren Drehimpulstransport auf das externe Medium verunmöglicht.

Literatur

- Binney, J., Tremaine, S.: 1987, *Galactic Dynamics*, Princeton Univ. Press, Princeton
- Bonnor, W.B.: 1957, *Jeans' formula for gravitational instability*, Mon. Not. R.A.S., **117** 104-117
- Barstow et al.: 2005, *Hubble Space Telescope spectroscopy of the Balmer lines in Sirius B*, Mon. Not. R.A.S., **362** 1134-1142
- Chandrasekhar, S.: 1939, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover Publ., New York
- Chandrasekhar, S., Fermi, E.: 1953, *Problems of gravitational instability in the presence of a magnetic field*, Astrophys. J. **118**, 116 - 141
- Dorfi, E.A.: 1993, *Interstellar Medium and Supernova Remnants*, in: *Galactic High-Energy Astrophysics*, (Eds.) J. van Paradijs, H.M. Maitzen, Lecture Notes in Physics **418**, 43 - 128
- Davies, R.L., Efstathiou, G., Fall, S.M., Illingworth, G., Schechter P.L.: 1983, *The kinematic properties of faint Elliptical Galaxies*, Astrophys. J. **266**, 41 - 57
- Dyson, J.E., Williams, D.A.: 1980, *The physics of the interstellar medium*, Manchester University Press, Manchester
- Ebert, R.: 1955, *Über die Verdichtung von HI-Gebieten*, Zeitschrift f. Astrophysik, **37**, 217 - 232
- Field, G.B.: 1965, *Thermal Instability*, Astrophys. J. **142**, 531 - 567
- Hollenbach, D.J., Thronson, H.A.Jr., (Eds.): 1987, *Interstellar Processes*, Astrophysics and Space Science Library, D. Reidel, Dordrecht
- King, I.: 1962, *The structure of star clusters. I. An empirical density law*, Astron. J. **67**, 471
- Kippenhahn, R., Möllenhoff, C.: 1978, *Elementare Plasmaphysik*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim
- Kippenhahn, R., Weigert, A.: 1994, *Stellar Structure and Evolution*, 3rd Edition, Springer-Verlag, Berlin,
- Lamers, H.J.G.M., Cassinelli, J.P.: 1999, *Introduction to Stellar Winds*, Cambridge University Press, Cambridge
- Landau, L.D., Lifschitz, E.M.: 1966, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 4, Quantenmechanik*, Akademie-Verlag, Berlin

- McCray, R.: 1987, *Supernovae and the interstellar medium*, in: *Physical Processes in Interstellar Clouds*, Eds. G.E. Morfill and M. Scholer, Proc. NATO ASI, D. Reidel Publishing, Dordrecht p. 95 - 104
- McKee, C., Ostriker, J.: 1977, *A theory of the interstellar medium: Three components regulated by supernova explosions in a inhomogeneous substrate*, *Astrophys. J.* **218**, 148 - 169
- Mestel, L.: 1965, *Problems in star formation. I.*, *Quartl. J.R.A.S.* **6**, 161
- Mihalas, D.: 1978, *Stellar Atmospheres*, 2nd Edition, Freeman, San Fransisco
- Mouschovias, T.: 1976, *Nonhomologous contraction and equilibria of self-gravitating, magnetic interstellar clouds embedded in an intercloud medium, II. Results*, *Astrophys. J.* **207**, 141 - 158
- Murnaghan, F. D.: 1944, *The Compressibility of Media under Extreme Pressures*, Proc. National Academy of Sciences of the USA **30**, (9), 244
- Parker, E.N.: 1966, *The dynamical state of the interstellar gas and field*, *Astrophys. J.* **145**, 811
- Peebles, P.J.E.: 1993, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton
- Rybicki, G.B., Lightman, A.P.: 1979, *Radiative Processes in Astrophysics*, Wiley, New York
- Sedov, L.I.: 1959, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Infosearch Ltd., London
- Shapiro, S.L., Teukolsky, S.A.: 1983, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, Wiley, New York
- Shipman, H.L, Provencal, J.L, Høg, E., Thejll, P.: 1997, *Astrophys. J.* **488**, L43-46
- Shu, F.H.: 1991, *The Physics of Astrophysics*, Vol. I,II, University Science Books, Mill Valley
- Spitzer, L.Jr.: 1978, *Physical Processes in the Interstellar Medium*, Wiley, New York
- Weaver, R., McCray R., Castor, J.: 1977, *Interstellar Bubbles. II. Structure and Evolution*, *Astrophys. J.* **218**, 377-385, Erratum in *Astrophys. J.* **220**, 742