

Einführung in die Astronomie II - Übungsblatt 1

March 11, 2015

Aufgabe 1: Energien (3P)

- Welche Energie (in eV) wird benötigt, um ein Elektron aus dem Balmer-Niveau zu ionisieren ($n = 2 \rightarrow \infty$)?
Beachte: Die Lyman-Kante ($n = 1 \rightarrow \infty$) liegt bei $912 \text{ \AA} = 13.6 \text{ eV}$, Ly α ($n = 2 \rightarrow 1$) bei 1216 \AA .
- Bei welcher Wellenlänge liegt die Balmer Kante ($n = 2 \rightarrow \infty$)?
- Geben Sie die Umrechnung $\text{eV} \rightarrow \text{erg} \rightarrow \text{Joule}$ an!
- Wie groß ist die **Lyman-Kontinuums-Leuchtkraft** L_{LyC} (in erg/s) eines **42000 K** heißen Sterns, wenn der **Lyman-Kontinuums-Photonenfluss** N_L (s. Tab. von Thompson (1984) im Skript, Anhang) gegeben ist und ein Photon im Mittel **22 eV** besitzt? Berechnen Sie diese Leuchtkraft auch in Einheiten von Sonnenleuchtkräften!
- Wie groß ist die gesamte über die 'Lebensdauer' des Sterns von rund **4 Myr** abgegebene Energie der **Lyman-Kontinuums-Strahlung** (in erg)?
(Annahme: Lyman-Kontinuumsstrahlung ist über die Lebensdauer konstant!)
Wie groß ist im Vergleich dazu die über die gesamte Lebensdauer der Sonne von rund **12 Gyr** abgegebene Gesamtenergie?

Aufgabe 2: Photonfluss (4P)

In der Tabelle (Anhang und im Skript) finden Sie die **Lyman-Kontinuums-Photonenflüsse** N_L von Sternen verschiedenen Spektraltyps. T_{eff} und Leuchtkraft L/L_{\odot} sind gegeben.

- Was bedeutet wohl $N_e^2 V$ (N_e : Elektronendichte, V : Volumen)?
- Ordnen Sie den Sternen ihre **Massen** zu (in M_{\odot}). Verwenden Sie dazu das Masse-Leuchtkraft-Verhältnis (aus wissenschaftlichen Publikationen oder Fachliteratur).
- Stellen Sie die folgende Beziehung für Sterne mit $M \geq 10 M_{\odot}$ graphisch dar:

$$\begin{aligned} & \log(L/L_{\odot}) \text{ vs } \log(N_L) \\ & \log(M/M_{\odot}) \text{ vs } \log(N_L) \\ & \log(L/L_{\odot}) \text{ vs } \log(N_e^2 V) \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Expansion einer HII-Region (5P)

Sei für die Expansionsgeschwindigkeit einer HII-Region folgende Bewegungsgleichung gegeben,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{S_*}{4\pi R^2 n_0} - \frac{1}{3} R n_0 \beta_2$$

wobei die Rekombinationszeitskala t_R sowie der Strömungsradius R_s wie folgt definiert seien

$$t_R = \frac{1}{n_0 \beta_2}, \quad R_s = \left(\frac{3S_*}{4\pi n_0^2 \beta_2} \right)^{1/3}.$$

Verwenden Sie dimensionslose Variablen $\lambda = R/R_s$ sowie $\tau = t/t_R$ um die Bewegungsgleichung auf folgende Form zu vereinfachen

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{1 - \lambda^3}{3\lambda^2}$$

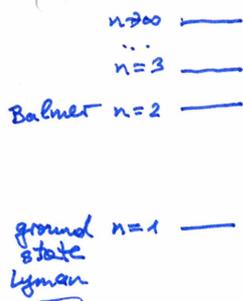
und lösen Sie sie mit der Methode 'Trennung der Variablen'. Als Anfangsbedingung gelte $\lambda(\tau = 0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Lösung $\lambda(\tau)$ geschrieben werden kann als

$$\lambda(\tau) = (1 - e^{-\tau})^{1/3}$$

und stellen Sie sie graphisch dar (λ vs τ).

TABLE I					
Sp	T	log (L/L _⊙)	log R	Lyman Continuum log N _H ^{2V}	log N _L
*	5500	-0.17	10.80	41.00	28.42
G2	5800	0.00	10.84	41.90	29.32
G0	5980	0.10	10.86	42.44	29.85
*	6000	0.11	10.86	42.49	29.90
F8	6210	0.22	10.88	43.14	30.55
F7	6370	0.28	10.89	43.50	30.91
*	6500	0.34	10.91	43.85	31.26
F6	6580	0.38	10.92	44.06	31.47
F5	6810	0.48	10.94	44.59	32.00
F3/*	7000	0.54	10.96	45.01	32.43
F2	7240	0.66	10.97	45.39	32.80
*	7500	0.77	11.00	45.80	33.21
F0	7520	0.78	11.00	45.86	33.27
*	8000	0.94	11.03	46.78	34.19
A5/*	8500	1.11	11.05	47.81	35.22
A4	8630	1.14	11.07	48.23	36.63
A3	8840	1.23	11.09	48.79	36.20
*	9000	1.27	11.09	49.11	36.53
A2	9070	1.29	11.09	49.27	36.69
A1	9320	1.35	11.10	49.77	37.19
*	9400	1.37	11.10	49.93	37.34
A0	9600	1.47	11.12	50.24	37.65
B9.5/*	10000	1.55	11.14	50.65	38.26
*	10500	1.69	11.17	51.39	38.81
B9	10700	1.74	11.17	51.62	39.04
*	11000	1.79	11.18	51.85	39.26
*	11500	1.88	11.18	52.26	39.67
B8/*	12000	1.97	11.19	52.62	40.03
*	12500	2.04	11.20	52.98	40.39
*	13000	2.13	11.20	53.29	40.71
B7	13600	2.22	11.21	53.60	41.02
*	14000	2.30	11.22	53.88	41.30
B6	14600	2.42	11.24	54.23	41.65
*	15000	2.50	11.26	54.47	41.89
B5	15600	2.61	11.28	54.80	42.22
*	16000	2.68	11.30	55.01	42.42
*	17000	2.85	11.33	55.52	42.93
B3	17900	3.01	11.36	55.95	43.36
*	18000	3.03	11.37	56.00	43.41
*	20000	3.37	11.46	56.83	44.24
B2	20500	3.45	11.46	57.04	44.45
*	22500	3.69	11.51	57.66	45.08
B1	22600	3.70	11.51	57.69	45.11
*	25000	3.92	11.53	58.36	45.78
B0.5	26200	4.03	11.54	58.70	46.12
*	30000	4.33	11.58	59.62	47.03
B0	30900	4.40	11.59	59.82	47.23
O9.5	33000	4.53	11.61	60.34	47.75
O9	34500	4.65	11.62	60.57	47.98
*	35000	4.70	11.63	60.68	48.09
O8.5	35500	4.73	11.63	60.73	48.14
O8	36500	4.81	11.65	60.85	48.26
O7.5	37500	4.92	11.68	61.02	48.43
O7	38500	5.07	11.70	61.15	48.56
O6.5/*	40000	5.17	11.75	61.41	48.83
O6P	42000	5.40	11.82	61.67	49.08
O5.5P	44500	5.63	11.87	61.95	49.36
O5P	47000	5.83	11.94	62.21	49.62
O4P	50000	6.11	12.02	62.52	49.93

1. Energien, Lyman-Kontinuum:



$n=1 \Rightarrow E_{ion,1} = 13.6 \text{ eV}$
 $\lambda_1 = 912 \text{ \AA}$
 $n_1=1, n_2=2 \Rightarrow \lambda_{12} = 1216 \text{ \AA} \text{ (Ly}\alpha\text{)}$
 $n=2 \Rightarrow E_{ion,2} = ?$

$$\Delta E = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = \frac{hc}{\lambda} = \frac{13.6 \text{ eV}}{R_H} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 13.6 \text{ eV} \cdot \frac{3}{4}$$

$$E_{ion,1} = R_H \frac{1}{1^2} = \frac{hc}{\lambda_1} = 13.6 \text{ eV} = \frac{hc}{912 \text{ \AA}}$$

$$\lambda_1 = \frac{hc}{R_H}$$

$$912 \text{ \AA} \cdot 13.6 \text{ eV} = hc$$

$$E_{ion,n} = R_H \frac{1}{n^2}$$

$$\Delta E = 13.6 \text{ eV} \cdot \frac{3}{4} = \frac{hc}{\lambda_{12}} = \frac{hc}{1216 \text{ \AA}}$$

$$13.6 \text{ eV} \cdot \frac{3}{4} = \frac{912 \text{ \AA} \cdot 13.6 \text{ eV}}{\lambda_{12}}$$

$$\frac{4 \cdot 912 \text{ \AA}}{3} = \lambda_{12} \approx 1216 \text{ \AA} \text{ zur Kontrolle}$$

$$E_{ion,2} = R_H \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} R_H \approx 3.4 \text{ eV}$$

$$\frac{hc}{3.4 \text{ eV}} \approx \lambda_2 \approx 3648 \text{ \AA} \approx 3650 \text{ \AA}$$

$$\text{eV} := 1.602176565 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{erg} := 0.1 \mu\text{J} = 0.1 \cdot 10^{-6} \text{ eV} / (1.602176565 \cdot 10^{-19}) \approx 6.2415 \cdot 10^{11} \text{ eV}$$

$$E_{ion,1} \approx 2.18 \cdot 10^{-11} \text{ erg} \approx 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$E_{ion,2} \approx 5.45 \cdot 10^{-12} \text{ erg} \approx 5.45 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\Delta E \approx 1.63 \cdot 10^{-11} \text{ erg} \approx 1.63 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$\langle E_{\gamma} \rangle := 22 \text{ eV}$$

$$T_{\text{eff}} := 4200 \text{ K} \Rightarrow L_{\text{Ly}\alpha} = ? \text{ erg/s} = ? L_{\odot}$$

N_e : Elektronendichte
 N_L : Photonenanzahlfluss
 in #/s.

Referenz Sonne:

$$G2V \quad T_{\text{eff}} := 5800 \text{ K}$$

$\log(L/L_{\odot})$	$\log(R/R_{\odot})$	$\log(N_e^2 V^{1/2})$	$\log(N_L \cdot \bar{s})$	$N_L \cdot \bar{s}$
5.40	11.82	61.67	49.08	$1.20 \cdot 10^{43}$
0	10.84	41.00	28.42	$2.63 \cdot 10^{28}$

$$L_{\text{Ly}\alpha} = N_L \cdot \langle E_{\gamma} \rangle \approx 10^{\log(N_L \cdot \bar{s})} \cdot 22 \text{ eV} \approx 4.24 \cdot 10^{38} \text{ erg/s} \approx 1.03 \cdot 10^5 L_{\odot}$$

$$E_{\text{Ly}} = L_{\text{Ly}\alpha} \cdot t \text{ with } t := 4 \text{ Myr} \approx 4 \cdot 10^6 \cdot 86400 \cdot 365.25 \approx 1.26 \cdot 10^{14} \text{ s}$$

Vgl $E_{\text{Ly}}^{\odot} = ?$ bei $t^{\odot} := 12 \text{ Ga}$

$$E_{\text{Ly}}^{\odot} \approx 5.35 \cdot 10^{52} \text{ erg}$$

$$E_{\text{Ly}}^{\odot} = L^{\odot} t^{\odot} \approx 1.46 \cdot 10^{51} \text{ erg with } L^{\odot} := 3.9 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$$

[1]:

2. Photonenfluss:

- Was bedeutet $N_e^2 V$?
- Berechne M/M_\odot durch Masse-Leuchtkraftverhältnis ~~literatur~~ (Literatur)
- Graphen für

$$\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) \text{ vs } \log(N_e)$$

$$\log\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \text{ vs } \log(N_e)$$

$$\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) \text{ vs } \log(N_e^2 V)$$

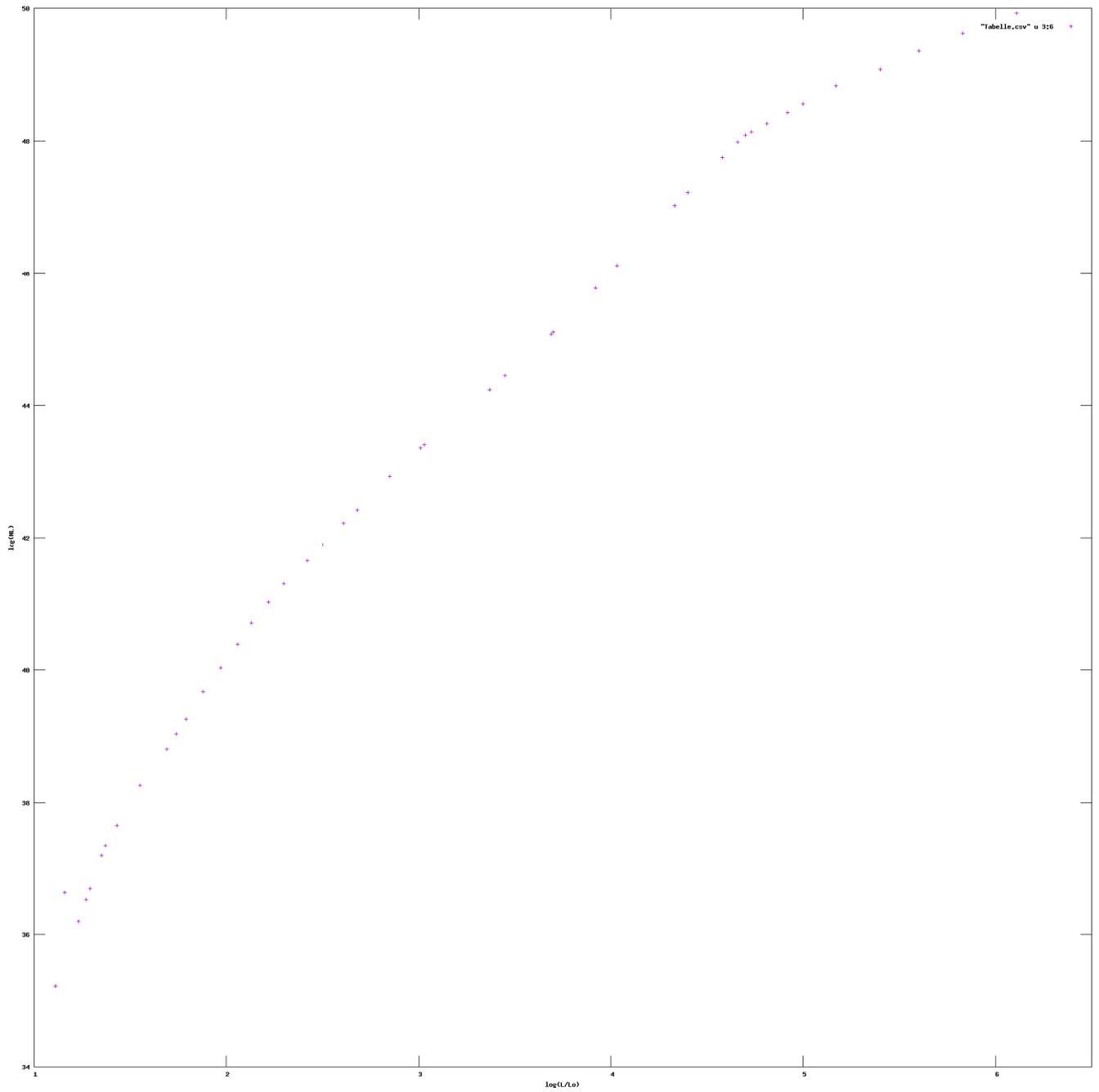
Rekombinationsrate (irgendeines n_H mit irgendeinem)



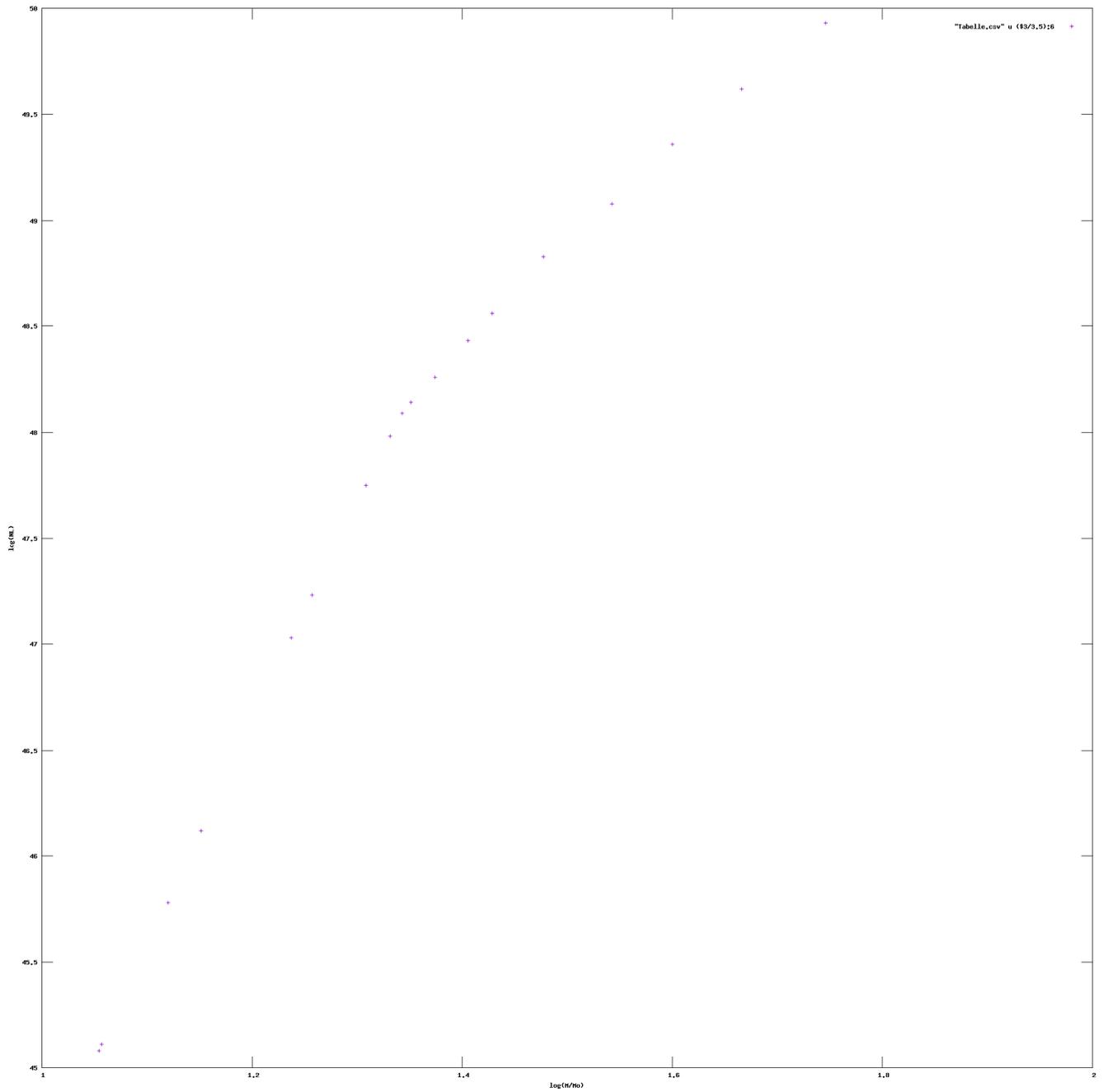
Ionisierung:



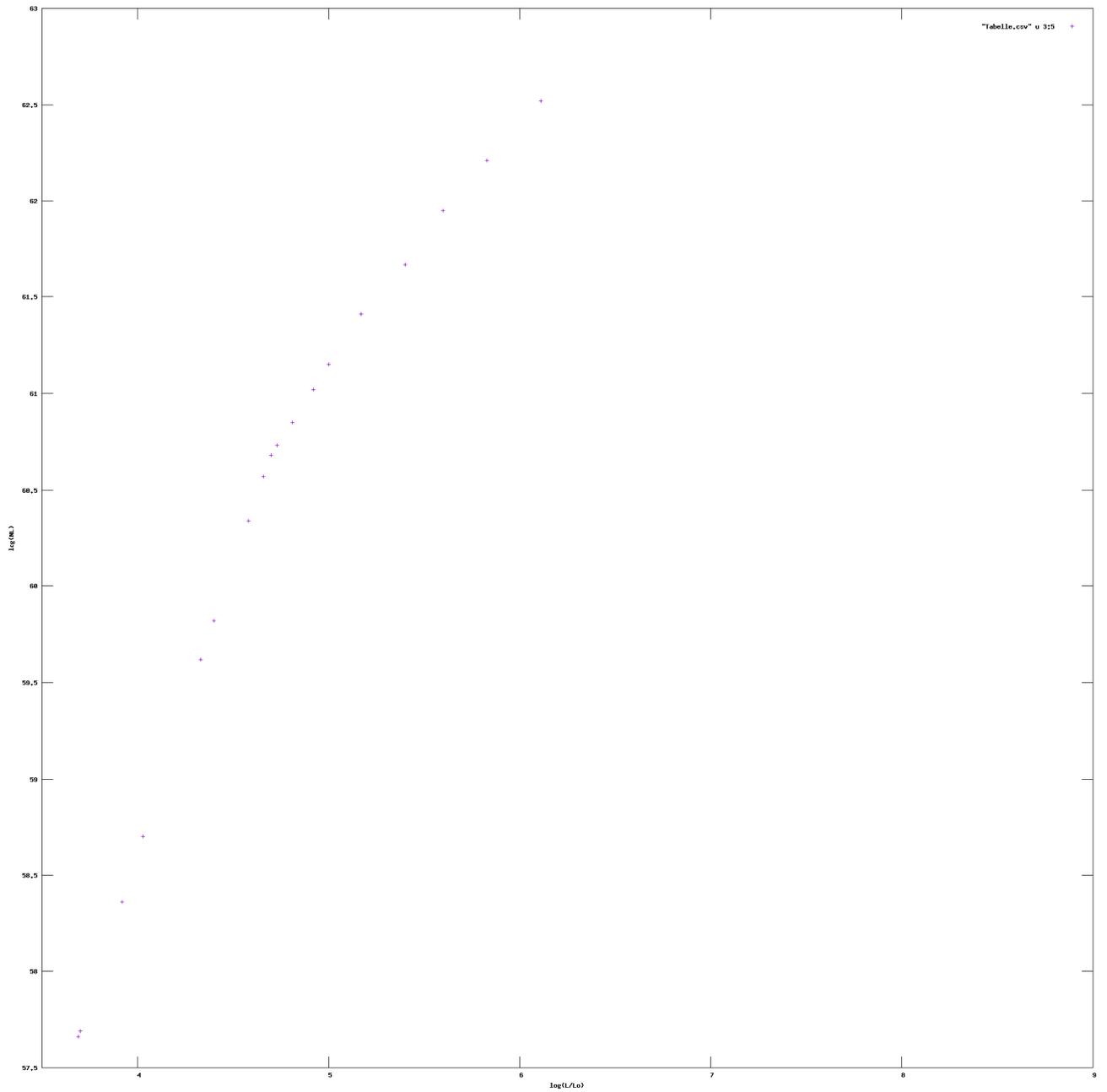
1. Ü. Astronomie II



1. Ü. Astronomie II



1. Ü. Astronomie II



$$(\ln |1-\lambda^3|)' = \frac{1}{1-\lambda^3} \cdot (-3\lambda^2)$$

$$\text{Sol } \lambda \frac{3\lambda^2}{1-\lambda^3} = -\ln |1-\lambda^3| + D$$

$$-\ln |1-\lambda^3| + D = \int$$

$$\ln |1-\lambda^3| - D = -\int$$

$$\ln |1-\lambda^3| = D - \int$$

$$|1-\lambda^3| = e^{D-\int}$$

$$1-\lambda^3 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \lambda^3$$

$$1 \geq \lambda$$

$$1-\lambda^3 = e^{D-\int}$$

$$1-e^{D-\int} = \lambda^3$$

$$(1-e^{D-\int})^{1/3} = \lambda$$

$$(1-e^{D-0}) = 0 \stackrel{!}{=} \lambda(0)$$

$$e^D = 1$$

$$\boxed{(1-e^{-\int})^{1/3} = \lambda(\tau)}$$

$$1-\lambda^3 < 0 \Rightarrow 1 < \lambda^3$$

$$1 < \lambda$$

$$\lambda^3 - 1 = e^{D-\int}$$

$$\lambda^3 = e^{D-\int} + 1$$

$$\lambda = (e^{D-\int} + 1)^{1/3}$$

$$\lambda(0) = 0 = (e^D + 1)^{1/3}$$

$$0 = e^D + 1$$

$$-1 = e^D$$

↯

z.z. $\lambda(\tau) = (1-e^{-\tau})^{1/3}$ ist Lösung von $\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{1-\lambda^3}{3\lambda^2}$

$$3\lambda^2 \frac{d\lambda}{d\tau} = 1-\lambda^3$$

$$\lambda^2 = (1-e^{-\tau})^{2/3}$$

$$1-\lambda^3 = e^{-\tau}$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{1}{3} (1-e^{-\tau})^{-2/3} (-e^{-\tau})(-1) = \frac{1}{3} (1-e^{-\tau})^{-2/3} e^{-\tau}$$

$$3\lambda^2 \frac{d\lambda}{d\tau} = 3 (1-e^{-\tau})^{2/3} \frac{1}{3} (1-e^{-\tau})^{-2/3} e^{-\tau}$$

$$1-\lambda^3 = e^{-\tau}$$

daher $3\lambda^2 \frac{d\lambda}{d\tau} = 1-\lambda^3$ gezeigt.

1. Ü. Astronomie II

