

Kapitel 3

Hydrodynamik, Strahlungstransport und Magnetohydrodynamik

3.1 Die hydrodynamischen Gleichungen

3.1.1 Bedingungen für eine hydrodynamische Beschreibung

Ein System von N freien Teilchen läßt sich als ein Kontinuum beschreiben, wenn

- a) das mikroskopische Verhalten einzelner Teilchen vernachlässigbar ist:

$$\lambda \ll l \quad (3.1)$$

Hier ist λ die mittlere freie Weglänge der Teilchen und l die charakteristische makroskopische lineare Dimension des Systems.

Das Konzept des **Flüssigkeitselements** (lineare Dimension l_f) ist sinnvoll, falls

$$\lambda \ll l_f \ll l \quad (3.2)$$

In diesem Fall ist die Anzahl der Teilchen im Flüssigkeitselement groß, d.h. mittlere Größen sind sinnvoll definierbar, z.B. die Dichte ρ und die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitselements \vec{v} . Die Geschwindigkeit eines Teilchens

$$\vec{u}_p = \vec{v} + \vec{w}_p \quad (3.3)$$

setzt sich demnach aus einer statistischen Komponente \vec{w}_p und der mittleren Geschwindigkeit \vec{v} des Flüssigkeitselements zusammen.

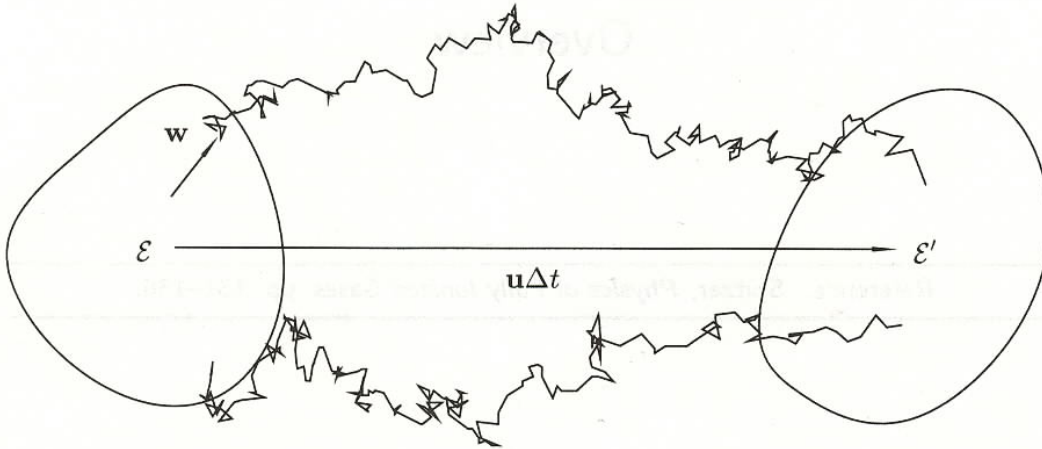


Abbildung 3.1: In einem Flüssigkeitselement ε ist die Geschwindigkeit \vec{u}_p jedes Teilchens gleich der Summe einer zufälligen Komponente \vec{w}_p und der mittleren Geschwindigkeit \vec{v} aller Teilchen. Ist die mittlere freie Weglänge λ klein gegen die Ausdehnung des Flüssigkeitselements, so bleibt das Flüssigkeitselement erhalten.

Da $\lambda \ll l$, besitzen die Teilchen des Flüssigkeitselements eine kleine zufällige Geschwindigkeitskomponente (“random walk”) zusätzlich zur mittleren Strömungsgeschwindigkeit, d.h. das Flüssigkeitselement bleibt während der Entwicklung “erhalten” bis auf einen geringen Teilchenaustausch an seinem Rand, der sich als Diffusionsprozeß beschreiben läßt (Abb. 3.1 und 3.2).

- b) Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen sättigt. Die Wechselwirkung muß also kurzreichweitig sein, da sonst kollektive Effekte berücksichtigt werden müssen. Formal heißt dies

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{E}{N} \right) = \text{const}, \quad (3.4)$$

wobei E/N die Energie pro Teilchen ist.

- **Energiedichte** und **Druck** (auf die “Wände” des Flüssigkeitselements) sind dann wie folgt definierbar:

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{V} = n \left(\frac{E}{N} \right), \quad (3.5)$$

$$p \equiv n \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right)_s - \varepsilon \quad (3.6)$$

(siehe auch 1.8), wobei $n \equiv N/V$ und V das Volumen des Flüssigkeitselements ist.

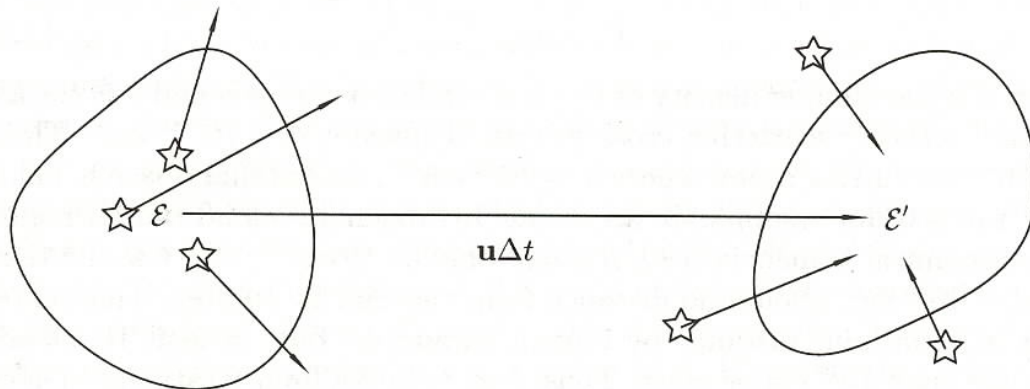


Abbildung 3.2: Ist die mittlere freie Weglänge λ groß gegen die Ausdehnung des Flüssigkeitselements (wie z.B. für die Sterne in einer Galaxie), so ist eine hydrodynamische Beschreibung nicht möglich, da sich in diesem Fall das Flüssigkeitselement auflöst.

- Beispiel für **nicht-sättigende Kräfte**: Gravitation und (falls nicht abgeschirmt) Coulombkraft (beide $\sim \frac{1}{r}$).

$$\frac{E}{N} \sim \begin{cases} N^2 & \text{Bosonen} \\ N^{4/3} & \text{Fermionen} \end{cases}$$

Die für viele astrophysikalische Systeme wichtige Gravitationskraft muß daher als äußere makroskopische Kraft in der Hydrodynamik beschrieben werden.

3.1.2 Hydrodynamische Gleichungen

Die hydrodynamischen Gleichungen stellen **Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie** in einem kontinuierlichem Medium dar. Sie lassen sich sowohl mathematisch streng herleiten als auch phänomenologisch begründen.

- Zur **strengen Herleitung** der hydrodynamischen Gleichungen geht man von einer statistischen Beschreibung eines physikalischen Systems von N Teilchen ($N \gg 1$) im Phasenraum aus.

Die zeitliche Entwicklung des Systems ist durch die **Liouville-Gleichung** für die **N -Teilchen-Verteilungsfunktion** des Systems gegeben, die (für kanonische Systeme) aus dem **Liouvilleschen Satz** folgt.

Durch sukzessive Integration der Liouville-Gleichung über die Koordinaten der N -Teilchen-Verteilungsfunktion resultieren gekoppelte Integro-Differentialgleichungen mit einer zunehmenden Ordnung von Teilchenkorrelationen (siehe z.B. G.Ecker, *Theory of Fully Ionized Plasmas*, Academic Press, New York, 1972; E. Schmutzer,

Grundlagen der Theoretischen Physik (Teil II), Kap. 10.1, 10.2, 12.1, 12.2, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989).

Falls die Wechselwirkung zwischen den Teilchen

- (i) nur auf geschwindigkeitsunabhängigen Kräften kurzer Reichweite (die nur vom Abstand zwischen den Teilchen abhängen) beruht,
- (ii) die Wirkung von äußeren Kräften während des Stoßvorgangs vernachlässigt werden kann,
- (iii) die Dichte des Systems nicht “allzu hoch” ist (nur Zweierstöße) und
- (iv) molekulares Chaos herrscht (d.h. die durch einen Stoß erzeugte lokale Ordnung wird vor dem nächsten Stoß wieder völlig verwischt),

läßt sich das System als verdünntes, neutrales Gas beschreiben. Seine Dynamik ist in diesem Fall durch die **Boltzmann–Gleichung** gegeben.

- Mehrere Verfahren existieren (z.B. Methode von Chapman und Enskog), um makroskopische Transportgleichungen für mittlere Größen aus der Boltzmann-Gleichung abzuleiten, wobei das Hauptproblem der Stoßterm ist, der die Wechselwirkung den Teilchen (Zweierstöße) beschreibt.

Basis dieser Verfahren ist die Definition makroskopischer Größen als Geschwindigkeits- bzw. Impulsmomente der Verteilungsfunktion. Dies führt zu den **Maxwell–Boltzmann–Transportgleichungen**, die ein hierarchisches System von Gleichungen darstellen (das r -te Moment hängt vom $(r+1)$ -ten Moment ab, da der Stoßterm nicht auf eine Funktion des r -ten Moments reduzierbar ist). Daher ist eine unabhängige **Schließbedingung** erforderlich.

Die hydrodynamischen Gleichungen folgen aus den Transportgleichungen für die drei niedrigsten Momente und aus einer Zustandsgleichung für das 3. Moment als Schließbedingung (siehe z.B. <http://www.mpa-garching.mpg.de/lectures/HYDRO>).

- Die **phänomenologische Herleitung** der hydrodynamischen Gleichungen basiert auf ihrer Eigenschaft als Erhaltungssätze.

Betrachten wir dazu zum Beispiel die **Massenerhaltung**, die besagt, daß Masse weder erzeugt noch vernichtet werden kann, sondern nur von einem Ort zu einem anderen Ort bewegt werden kann (diese Newtonsche Sichtweise läßt sich auf die Erhaltung der Massen-Energie im relativistischen Fall verallgemeinern; siehe Kap. 3.1.3).

Für eine **eindimensionale** Strömung (alle Strömungsvariablen hängen nur von einer räumlichen Koordinate z.B. x sowie der Zeit t ab und die Flüssigkeit bewegt sich nur in diese Richtung $\vec{v}(x, t) = (v_x, 0, 0)^T \equiv (u, 0, 0)^T$) in einem Raumgebiet $[a, b]$ folgt aus der Massenerhaltung:

Die Änderung der Gesamtmasse im Raumgebiet $[a, b]$ während des Zeitintervalls $[t_1, t_2]$ = Netto-Masse, die die Ränder von $[a, b]$ während des Zeitintervalls $[t_1, t_2]$ durchströmt.

In mathematischer Schreibweise lautet diese Aussage:

$$\int_a^b [\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)] dx = - \int_{t_1}^{t_2} [\rho(b, t)u(b, t) - \rho(a, t)u(a, t)] dt, \quad (3.7)$$

wobei $\rho(x, t)$ die Dichte, $u(x, t)$ die Geschwindigkeit und $\rho(x, t)u(x, t)$ der Massenfluß sind.

Unter der Annahme, daß die Dichte zeitlich und der Massenfluß räumlich differenzierbar sind, folgt aus dem Fundamentalsatz der Differentialrechnung

$$\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \quad (3.8)$$

und

$$\rho(b, t)u(b, t) - \rho(a, t)u(a, t) = \int_b^a \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx. \quad (3.9)$$

Ist die räumliche Integration mit der zeitlichen vertauschbar, gilt demnach

$$\int_b^a \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right] dt dx = 0. \quad (3.10)$$

Da das Integral für beliebige Werte von a, b, t_1 und t_2 verschwindet, muß der Integrand Null sein, d.h. es gilt die (eindimensionale) **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (3.11)$$

- Für **mehrdimensionale** Strömungen läßt sich durch analoge Überlegungen die **allgemeine Form der Kontinuitätsgleichung** herleiten. Sie lautet

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0} \quad (3.12)$$

bzw. unter Verwendung der Vektoridentität

$$\operatorname{div} \Psi \vec{A} = \vec{A} \operatorname{grad} \Psi + \Psi \operatorname{div} \vec{A} \quad (3.13)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (3.14)$$

wobei

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \text{ grad} \quad (3.15)$$

die sogenannte **substantielle Ableitung** ist. Sie beschreibt die totale zeitliche Änderung einer Flüssigkeitsgröße entlang der Bewegung eines Flüssigkeitselements (mitbewegte oder Lagrange'sche Zeitableitung).

- Für eine **eindimensionale, reibungsfreie** Strömung in einem Raumgebiet $[a, b]$ folgt aus der **Impulserhaltung**:

Die Änderung des Gesamtimpulses im Raumgebiet $[a, b]$ während des Zeitintervalls $[t_1, t_2]$ = Netto-Impulsfluß über die Ränder von $[a, b]$ während des Zeitintervalls $[t_1, t_2]$ + Netto-Impulsänderung durch Druckkräfte auf die Ränder von $[a, b]$.

In mathematischer Schreibweise lautet diese Aussage:

$$\int_a^b [\rho(x, t_2)u(x, t_2) - \rho(x, t_1)u(x, t_1)] dx = - \int_{t_1}^{t_2} [\rho(b, t)u^2(b, t) - \rho(a, t)u^2(a, t)] dt - \int_{t_1}^{t_2} [p(b, t) - p(a, t)] dt. \quad (3.16)$$

Da das Integral für beliebige Werte von a, b, t_1 und t_2 verschwindet, muß der Integrand Null sein, d.h. es gilt die (eindimensionale) **Bewegungsgleichung**

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.17)$$

- Für **mehrdimensionale, viskose, selbstgravitierende** Strömungen folgt aus der Impulserhaltung die **Navier–Stokes–Gleichung** (Bewegungsgleichung der Hydrodynamik; siehe z.B. Landau & Lifschitz, Bd.6). In kartesischen Koordinaten lautet diese für die kartesische Impulskomponente ρv_i ($i = 1, 2, 3$)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} = -\rho (\text{grad } \Phi)_i}, \quad (3.18)$$

wobei Φ das (durch die Poisson–Gleichung $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ gegebene) Gravitationspotential und Π_{ik} die Komponenten des Drucktensors $\mathbf{\Pi}$ sind. Letzterer wird üblicherweise in der Form

$$\mathbf{\Pi} = p \mathbf{I} - \boldsymbol{\pi} \quad (3.19)$$

geschrieben, wobei \mathbf{I} der Einheitstensor, p der **isotrope Gasdruck** und $\boldsymbol{\pi}$ der **Viskositätstensor** sind.

- Für **reibungsfreie** Gase gilt die **Euler–Gleichung**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) + (\text{grad } p)_i = -\rho (\text{grad } \Phi)_i \quad i = 1, 2, 3}, \quad (3.20)$$

die sich auch in der (analytisch, aber nicht für numerische Zwecke) äquivalenten **nicht–konservativen** Form

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad } \Phi \quad (3.21)$$

schreiben läßt. Mit Hilfe der substantiellen Ableitung folgt daraus

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad } \Phi. \quad (3.22)$$

Im hydrostatischen Fall $D/Dt = 0$ ergibt sich daraus die bereits früher diskutierte **Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts**:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = -\text{grad } \Phi. \quad (3.23)$$

- Für **mehrdimensionale, wärmeleitende, zähe** (viskose), **selbstgravitierende** Strömungen folgt aus der Energieerhaltung die **Energiegleichung**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \text{div}[(\rho e + p)\vec{v}] + \text{div } \vec{q} - \text{div}(\boldsymbol{\pi}\vec{v}) = -\rho\vec{v} \text{ grad } \Phi}, \quad (3.24)$$

wobei die **spezifische Gesamtenergiedichte** e [erg/g] durch

$$e \equiv \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + \frac{\varepsilon}{\rho} \quad (3.25)$$

gegeben ist; die innere Energiedichte ε wurde in (3.5) definiert. Die Energiegleichung besagt, daß die zeitliche Änderung der Gesamtenergiedichte ρe [erg/cm³] durch die Divergenz des Energiestroms $(\rho e + p)\vec{v}$ (der mit der einfachen Verschiebung der Flüssigkeitsmasse während der Strömung zusammenhängt), die Divergenz der Wärmestromdichte \vec{q} und durch die Divergenz des Energiestromdichte infolge der Prozesse der inneren Reibung $\boldsymbol{\pi}\vec{v}$ gegeben ist und gegengleich dem Gradienten entlang des Massenflusses ist.

Die zwei letzten Beiträge zum Energiestrom sind im **Spezialfall einer adiabatischen Strömung** gleich Null. Die Gleichung für die spezifische Gesamtenergiedichte lautet dann

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \text{div}[(\rho e + p)\vec{v}] = -\rho\vec{v} \text{ grad } \Phi. \quad (3.26)$$

- Einen phänomenologischen Ansatz für die **Energiestromdichte durch Wärmeleitung** (direkter molekularer Energieübertrag bei Vorhandensein eines Temperaturgradienten innerhalb der Flüssigkeit, der auch in einer ruhenden Flüssigkeit stattfindet) erhält man im Falle nicht allzu großer Temperaturgradienten durch eine Taylor-Entwicklung bis zur 1. Ordnung im Temperaturgradienten (der konstante Term verschwindet, da \vec{q} zusammen mit $\text{grad } T$ verschwinden muß)

$$\boxed{\vec{q} = -\kappa \text{ grad } T,} \quad (3.27)$$

wobei $\kappa > 0$ der Wärmeleitungskoeffizient [erg/K/sec/cm²] ist.

- Die allgemeinste Form des **Viskositätstensors** lautet (siehe z.B., Landau und Lifshitz):

$$\pi_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \text{ div } \vec{v} \right) - \zeta \delta_{ik} \text{ div } \vec{v}, \quad (3.28)$$

wobei $\eta > 0$ und $\zeta > 0$ die beiden Zähigkeitskoeffizienten [g/(sec cm)] sind.

Man beachte, daß der erste Term spurfrei ist und daß im Falle einer inkompressiblen Flüssigkeit (d.h. wenn $\text{div } \vec{v} = 0$ gilt) die Viskosität nur durch den Koeffizienten η beschrieben wird.

Der Koeffizient η wird als **dynamische Zähigkeit** bezeichnet und das Verhältnis $\nu \equiv \eta/\rho$ [cm²/sec] heißt **kinematische Zähigkeit**.

- Die relative Bedeutung der Trägheits- und Reibungsterme in der Navier-Stokes-Bewegungsgleichung (3.18) wird durch den Wert der dimensionslosen **Reynoldszahl**

$$\text{Re} \equiv \frac{\rho u L}{\eta} = \frac{u L}{\nu} \quad (3.29)$$

bestimmt, wobei u die Strömungsgeschwindigkeit und L die lineare Abmessung der Flüssigkeit sind.

- Für **kleine Reynoldszahlen** $\text{Re} \ll 1$ dominieren viskose Effekte die Bewegung. Die **Strömung ist laminar** und in guter Näherung durch eine lineare Bewegungsgleichung beschreibbar.
- Für **große Reynoldszahlen** $\text{Re} \gg 1$ dominiert die Trägheit die Bewegung. Die **Strömung ist turbulent** und nichtlineare Effekte (durch den $\vec{v} \text{ grad } \vec{v}$ Term) sind entscheidend.

Für jede Strömung existiert aufgrund experimenteller Befunde eine **kritische Reynoldszahl** oberhalb der die Strömung gegenüber infinitesimalen Störungen instabil ist und turbulent wird. Die kritischen Reynoldszahlen liegen größenordnungsmäßig zwischen 1000 und 10 000.

- Für fast alle **astrophysikalischen Systeme**, die sich hydrodynamisch beschreiben lassen, sind die typischen Reynoldszahlen extrem groß:

$$\text{Re} > 10^{10}. \quad (3.30)$$

Dies liegt an den auftretenden hohen Geschwindigkeiten und den großen linearen Abmessungen der Systeme (im Vergleich zu irdischen Systemen oder Laborexperimenten).

Daher sind nahezu alle in der Astrophysik vorkommenden Strömungen stark turbulent und zu ihrer Simulation werden fast ausschließlich die (reibungsfreien) Euler-Gleichungen (3.20) verwendet.

3.1.3 Relativistische Hydrodynamik

- **Annahme:** Ideales Gas charakterisiert durch 4-Geschwindigkeit (dimensionslos!)

$$\boxed{u^\mu = \frac{dx^\mu}{c d\tau}}, \quad (3.31)$$

wobei $\mu = 0, 1, 2, 3$, (wie auch alle anderen griechischen Indizes) und $d\tau$ das Eigenzeitintervall ist. Der **Energie–Impuls–Tensor eines idealen Gases** lautet

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}}. \quad (3.32)$$

Hierbei ist $\epsilon = \rho c^2 + \varepsilon$ die **Gesamtenergiedichte** [erg/cm³], p der Druck, ρ die **Eigenruhemassendichte** bzw. die **Baryonenanzahldichte** (alle Größen gemessen im lokalen Bezugssystem der Flüssigkeit!), c die Lichtgeschwindigkeit und $g^{\mu\nu}$ die **Raumzeit–Metrik** (symmetrisches Tensorfeld 2. Stufe).

- Mit Hilfe der Relation

$$\epsilon + p = \rho c^2 + \varepsilon + p = \rho h,$$

wobei

$$h \equiv c^2 + \frac{\varepsilon + p}{\rho}$$

die **spezifische Enthalpie** [erg/g] ist, läßt sich der Energie–Impuls–Tensor auch in der Form

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}} \quad (3.33)$$

schreiben.

- Die Bewegung der Flüssigkeit ist bestimmt durch zwei **Erhaltungssätze**:

– **Teilchenzahlerhaltung**

$$\boxed{\nabla_{\mu} J^{\mu} = 0} \quad (3.34)$$

($J^{\mu} \equiv \rho u^{\mu}$ ist der Teilchenstrom)

– **Energie–Impuls–Erhaltung**

$$\boxed{\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0} \quad (3.35)$$

Man beachte, daß hier und im folgenden die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wurde bzw. wird.

- Die **kovariante Ableitung** ∇_{μ} ist wie folgt definiert:

$$\nabla_{\mu} A^{\nu} \equiv A^{\nu}{}_{,\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\nu} A^{\sigma}$$

wobei

$$A^{\nu}{}_{,\mu} \equiv \partial_{\mu} A^{\nu} \equiv \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

die gewöhnliche Ableitung bedeutet und

$$\Gamma_{\sigma\mu}^{\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} (\partial_{\sigma} g_{\lambda\mu} + \partial_{\mu} g_{\lambda\sigma} - \partial_{\lambda} g_{\sigma\mu})$$

der **metrische Zusammenhang** (kein Tensor!) ist.

- Im Spezialfall der **Minkowski–Raumzeit** (“flache” Raumzeit)

$$g^{\mu\nu} \longrightarrow \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad \text{und} \quad \Gamma_{\sigma\mu}^{\nu} = 0$$

geht die kovariante Ableitung ∇_{μ} in die gewöhnliche Ableitung ∂_{μ} über. Die Gleichungen für die Teilchenzahlerhaltung bzw. für die Energie–Impuls–Erhaltung lauten dann

$$\partial_{\mu}(\rho u^{\mu}) = 0 \quad \wedge \quad \partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.36)$$

- Mit Hilfe des **Lorentzfaktors**

$$W \equiv [1 - \vec{v}^2/c^2]^{-1/2}, \quad (3.37)$$

wobei $\vec{v} \equiv d\vec{x}/dt$ die 3-Geschwindigkeit ist, läßt sich die 4-Geschwindigkeit in der Form

$$u^\mu = W(1, \vec{v}/c)$$

schreiben.

- Definition **relativistischer Erhaltungsgrößen im Laborsystem:**

- **Ruhemassendichte** [g/cm³]

$$D \equiv \rho u^0 = \rho W \quad (3.38)$$

- **Impulsdichte**

$$S^i \equiv T^{0i}/c = \frac{h}{c^2} W^2 \rho v^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.39)$$

- und **Energiedichte** [erg/cm³]

$$\tau \equiv T^{00} - \rho u^0 c^2 = \rho h W^2 - p - \rho W c^2 \quad (3.40)$$

- Damit lauten die relativistischen hydrodynamischen Gleichungen in Erhaltungsform wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + \operatorname{div}(D\vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial S^i}{\partial t} + \operatorname{div}(S^i\vec{v}) + (\nabla p)^i &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + c^2 \operatorname{div}(\vec{S} - D\vec{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

- Im Newtonschen Grenzfall $\vec{v} \rightarrow 0$ und $h \rightarrow c^2$ gilt:

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \rho & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) &= 0 \\ \vec{S} &\rightarrow \rho\vec{v} & \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}\vec{v}) + \operatorname{grad} p &= 0 \\ \tau &\rightarrow \frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \varepsilon = \rho e & \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}[(\rho e + p)\vec{v}] &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.2 Strömungsunstetigkeiten

Bisher wurden immer stetig differenzierbare Lösungen, d.h. sogenannte **starke Lösungen** vorausgesetzt. Schreibt man die hydrodynamischen Gleichungen in integraler Form, so sind auch Lösungen möglich, die auf einer Menge vom Maße Null unstetig sind. Diese Lösungen nennt man **schwache Lösungen**.

Obwohl die differentielle Form der hydrodynamischen Gleichungen eine vollständige Beschreibung „glatter“ Strömung ermöglicht, können Strömungsdiskontinuitäten nur mit Hilfe der integralen Formulierung der hydrodynamischen Gleichungen beschrieben werden. Daher müssen die hydrodynamischen Gleichungen in differentieller Form durch sogenannte **Sprungbedingungen** ergänzt werden, die aus der integralen Form folgen.

Dazu betrachten wir o.b.d.A. die eindimensionalen hydrodynamischen Gleichungen (Bewegung in x -Richtung mit der Geschwindigkeit u) in differentieller Form und kompakter vektorieller Schreibweise:

$$\boxed{\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0} \quad \text{mit } \mathbf{U} \equiv (\rho, \rho u, \rho e)^T \quad \text{und } \mathbf{F} \equiv (\rho u, \rho u^2 + p, (\rho e + p)u)^T. \quad (3.43)$$

Weiterhin betrachten wir eine **Strömungsdiskontinuität**, die zwei konstante Zustände (1) und (2) trennt und die sich mit der Geschwindigkeit v_D auf das Gebiet (2) zubewegt. Wendet man nun die integrale Form der hydrodynamischen Gleichungen auf ein rechteckiges Raumzeit-Kontrollvolumen an, das die Strömungsdiskontinuität umschließt (Abb. 3.3), so folgen daraus die **Rankine–Hugoniot Bedingungen**

$$-v_D (\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1) = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$$

oder komponentenweise

$$\boxed{\begin{aligned} v_D [\rho] &= [\rho u] \\ v_D [\rho u] &= [\rho u^2 + p] \\ v_D [\rho e] &= [(\rho e + p)u] \end{aligned}}, \quad (3.44)$$

wobei $[A] \equiv A_2 - A_1$ gilt.

- In einem **Koordinatensystem, das sich mit der Unstetigkeitsfläche mitbewegt**, d.h. in dem $v_D = 0$ gilt, lauten die Rankine–Hugoniot Bedingungen

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ u_1(\rho_1 e_1 + p_1) &= u_2(\rho_2 e_2 + p_2) \end{aligned}} \quad (3.45)$$

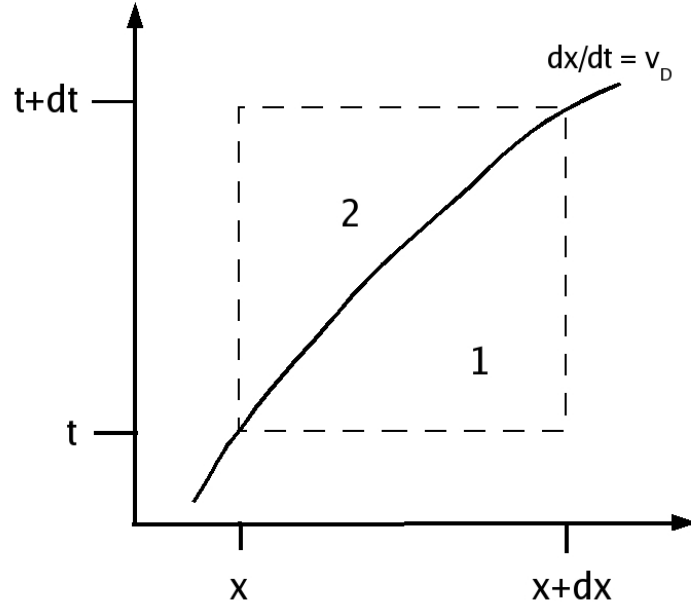


Abbildung 3.3: Raumzeit-Diagramm zur Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingungen.

Die dritte Rankine–Hugoniot Bedingung läßt sich unter Verwendung der Definition der spezifischen Gesamtenergiedichte (siehe Gl. (3.25)) und der ersten Rankine–Hugoniot Bedingung auch in der Form

$$\frac{u_1^2}{2} + \tilde{\varepsilon}_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \tilde{\varepsilon}_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \quad (3.46)$$

bzw.

$$\frac{1}{2}(u_1 - u_2)(u_1 + u_2) + \tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2 + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = 0 \quad (3.47)$$

schreiben, wobei $\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon/\rho$ [erg/g] die spezifische innere Energie ist.

- Der **Massenfluß** durch die Unstetigkeitsfläche oder Diskontinuität ist durch

$$M = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

gegeben. Da $\rho > 0$, ist im Ruhesystem der Diskontinuität ein verschwindender Massenfluß $M = 0$ gleichbedeutend mit $u_1 = u_2 = 0$. Unstetigkeiten mit dieser Eigenschaft heißen **Kontaktunstetigkeiten**.

Eine Kontaktunstetigkeit ist ein Spezialfall einer tangentialen Unstetigkeit, an der im Falle einer mehrdimensionalen Strömung die beiden tangentialen Geschwindigkeitskomponenten und alle thermodynamischen Größen außer dem Druck p unstetig sein können.

- Falls $M \neq 0$ gilt, heißen die Lösungen **Stoß** oder **Stoßwelle**. Für diese Lösungen folgt aus der zweiten Rankine–Hugoniot Bedingung für den Massenfluß

$$M = -\frac{p_1 - p_2}{u_1 - u_2} \quad (3.48)$$

oder mit dem spezifischen Volumen $\tau \equiv 1/\rho$ und

$$u_i = M\tau_i \quad , \quad i = 1, 2 \quad (3.49)$$

die Beziehung

$$\boxed{M^2 = -\frac{p_1 - p_2}{\tau_1 - \tau_2}} \quad (3.50)$$

Man beachte:

- (3.48) bzw. (3.50) sind rein mechanische Beziehungen, die unabhängig von der Zustandsgleichung gelten,
- Gleichung (3.50) besitzt zwei Lösungstypen, nämlich einmal Lösungen mit $p_2 > p_1$ und $\tau_1 > \tau_2$ (Stoß; Kompressionswelle), sowie Lösungen mit $p_2 < p_1$ und $\tau_1 < \tau_2$.
- Die Gerade

$$p - p_1 = -M^2(\tau - \tau_1) \quad (3.51)$$

repräsentiert alle Möglichkeiten, den Zustand (p_1, τ_1) mit einem Stoß zu verbinden (Abb. 3.4).

Diese Gerade mit dem Anstieg $-M^2$ heißt **Rayleigh–Linie** und wird üblicherweise mit $\mathcal{R}(p, \tau)$ bezeichnet.

- Mit Hilfe von (3.48) und (3.49) folgt aus der dritten Rankine–Hugoniot Bedingung (3.47) die Beziehung

$$-\frac{p_1 - p_2}{2M} (M\tau_1 + M\tau_2) + \tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2 + p_1\tau_1 - p_2\tau_2 = 0 \quad (3.52)$$

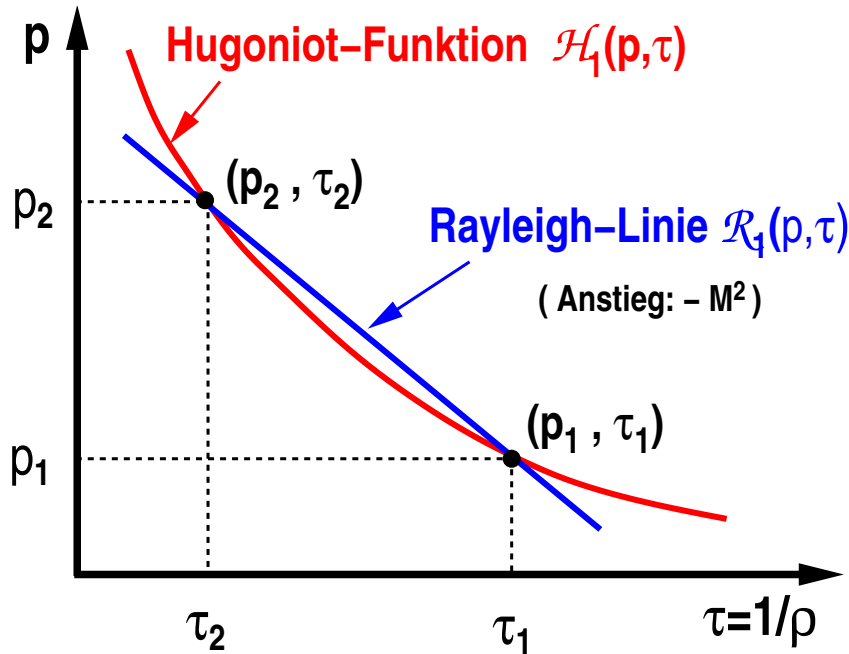


Abbildung 3.4:

und daraus die **Hugoniot-Gleichung** oder **Stoßadiabate**

$$\boxed{\frac{p_1 + p_2}{2}(\tau_1 - \tau_2) + \tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_2 = 0}, \quad (3.53)$$

die eine rein thermodynamische Beziehung darstellt.

- Da $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(p, \tau)$ führt man die **Hugoniot-Funktion** zum Zentrum (p_1, τ_1) ein

$$\mathcal{H}_1(p, \tau) \equiv \tilde{\varepsilon}(p, \tau) - \tilde{\varepsilon}(p_1, \tau_1) + \frac{p + p_1}{2}(\tau - \tau_1) \quad (3.54)$$

und kann damit die Hugoniot-Gleichung (3.53) in der Form

$$\boxed{\mathcal{H}_1(p_2, \tau_2) = 0} \quad (3.55)$$

schreiben. Die Kurve $\mathcal{H}_1(p, \tau)$ repräsentiert alle Möglichkeiten, den Zustand (p_1, τ_1) mit einem Stoß zu verbinden. Im Falle einer idealen Gaszustandsgleichung (1.19) ist $\mathcal{H}_1(p, \tau)$ eine Hyperbel (Abb. 3.4).

Der Schnittpunkt der Rayleigh-Linie $\mathcal{R}_1(p, \tau)$ und der Hugoniot-Funktion $\mathcal{H}_1(p, \tau)$ zum Zentrum (p_1, τ_1) definiert die eindeutige Lösung (p_2, τ_2) der Rankine-Hugoniot Bedingungen.

- Für einen schwachen Stoß gilt (siehe Landau & Lifschitz, Bd. 6)

$$\boxed{s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3} \quad (3.56)$$

d.h. die Entropieänderung in einer Stoßwelle geringer Intensität ist von dritter Ordnung klein im Vergleich zur Druckänderung.

- Für fast alle bekannten Zustandsgleichungen (Ausnahme: Phasenübergänge) nimmt die adiabatische Kompressibilität $(\partial\tau/\partial p)_s$ mit zunehmendem Druck ab, d.h.

$$\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial p^2} \right)_s > 0$$

und daher folgt mit $p_2 > p_1$ (Kompression) aus der Beziehung (3.56) $s_2 > s_1$, d.h. die **Entropie wächst in Stößen an**. Ursache hierfür ist die Dissipation von kinetischer Energie in Wärme (selbst in einer idealen Flüssigkeit!).

3.2.1 Stoßwellen in einem idealen Gas

Im Falle einer idealen Gaszustandsgleichung (1.19) lauten die Rankine–Hugoniot Bedingungen unter Verwendung der **Machzahl** $M_a \equiv u/c$ im Bezugssystem des Stoßes

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_{a1}^2}{(\gamma - 1)M_{a1}^2 + 2} \quad (3.57)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_{a1}^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (3.58)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_{a1}^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_{a1}^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_{a1}^2} \quad (3.59)$$

Im Grenzfall eines sehr starken Stoßes, d.h. im Grenzfall $M_{a1} \rightarrow \infty$ gilt

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = \begin{cases} \infty & \text{für } \gamma = 1 \\ 7 & \text{für } \gamma = 4/3 \\ 4 & \text{für } \gamma = 5/3 \\ 7/3 & \text{für } \gamma = 5/2 \end{cases}, \quad (3.60)$$

sowie

$$\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty (\sim M_{a1}^2) \quad \text{und} \quad \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \infty (\sim M_{a1}^2)$$

3.3 Strömungsinstabilitäten

3.3.1 Rayleigh–Taylor Instabilität

Eine **Rayleigh–Taylor Instabilität** tritt dann auf, wenn auf zwei aneinander grenzende, unterschiedlich dichte Flüssigkeiten (oder auch auf eine Flüssigkeit mit Dichtegradient) eine Kraft wirkt (z.B. Schwerkraft oder eine Beschleunigung), die von der dichteren Flüssigkeit in Richtung auf die spezifisch leichtere Flüssigkeit weist (siehe Chandrasekhar (1961), Seite 428ff). In der Astrophysik findet man Rayleigh–Taylor Instabilitäten in einer Vielzahl von Situationen, unter anderem in Supernovaexplosionen infolge der Propagation der Stoßwelle durch die Sternhülle.

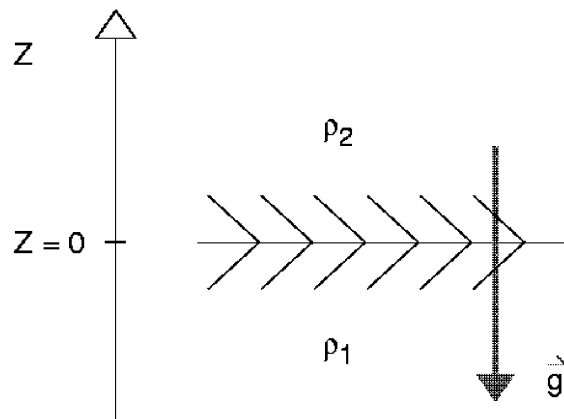


Abbildung 3.5:

Als einfachsten Fall betrachten wir zwei ruhende, homogene, inkompressible Flüssigkeiten der Dichten ρ_1 und ρ_2 , die durch eine ebene Grenzfläche ($z = 0$) voneinander getrennt sind, und die eine Beschleunigung g erfahren, die in negative z -Richtung weist (Abb. 3.5 und 3.6). Wir nehmen nun an, daß die Grenzfläche leicht gestört wird und betrachten die zeitliche Entwicklung der Störung mit Hilfe einer linearen Stabilitätsanalyse nach Fouriermoden. Dazu suchen wir Lösungen der Form

$$\xi \propto \exp(ik_x x + ik_y y + nt), \quad (3.61)$$

wobei k_x , k_y und n Konstanten sind. Setzt man diesen Störungsansatz in die hydrodynamischen Gleichungen ein und vernachlässigt alle Terme, die nichtlinear in der Störung sind, erhält man die folgende Dispersionsrelation:

$$\tau_{\text{RT}}^{-2} = n^2 = gk \left\{ \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right\}. \quad (3.62)$$

Hierbei ist $\tau_{\text{RT}} \equiv n^{-1}$ die Anwachszeitskala und $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ der Absolutwert des Wellenvektors der Störung. Demnach ist die **Anordnung der Flüssigkeiten stabil, falls**

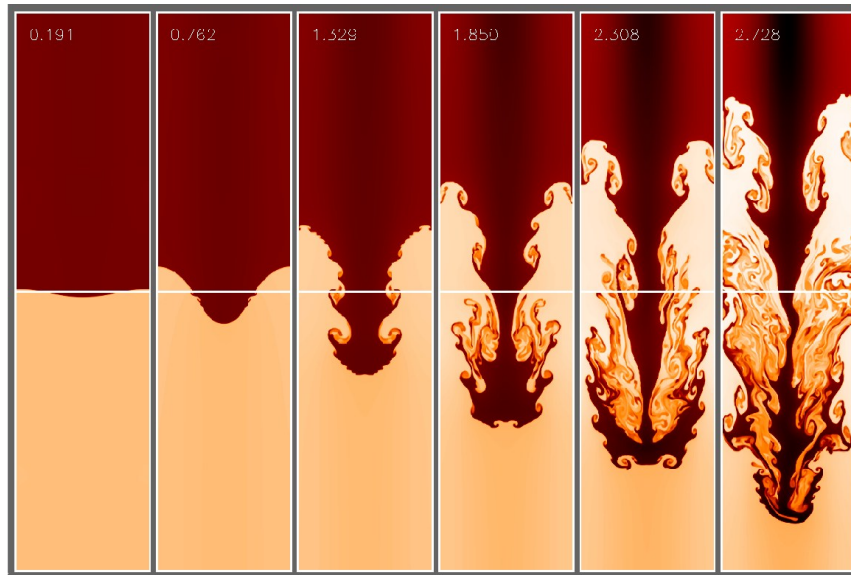


Abbildung 3.6: Computersimulation einer Rayleigh–Taylor Instabilität. Zwei homogene Flüssigkeiten konstanter Dichte ρ_1 (hellbraun) und $\rho_2 = 2\rho_1$ (dunkelbraun) sind anfänglich durch eine horizontale Grenzfläche (weisse Linie) voneinander getrennt und erfahren beide eine konstante Beschleunigung g , die senkrecht nach unten gerichtet ist. Diese Anordnung der Flüssigkeiten ist Rayleigh–Taylor instabil. Stört man die Anordnung durch ein vertikal konstantes und horizontal sinusförmiges Geschwindigkeitsfeld von kleiner Amplitude, dann ergibt eine hydrodynamische Simulation die gezeigte Entwicklung. Die dichte Flüssigkeit (dunkelbraun) dringt in das Gebiet der weniger dichten Flüssigkeit (hellbraun) ein und umgekehrt. Die pilzförmigen Köpfe an den Enden der eindringenden „Finger“, sowie die wirbelförmigen Strukturen an ihren Rändern werden durch Kelvin–Helmholtz Instabilitäten verursacht. Diese treten immer auf, wenn eine Scherströmung vorliegt, und bewirken ein „Aufrollen“ der Scherschicht.

$\rho_2 < \rho_1$, d.h. wenn sich die leichtere Flüssigkeit oberhalb der schwereren Flüssigkeit befindet, da dann $n^2 < 0$ ist. Im Falle $\rho_2 > \rho_1$ ist die Anordnung der Flüssigkeiten instabil. Gemäß der Dispersionsrelation wachsen kurzwellige Störungen am schnellsten (exponentiell) an.

Die Rayleigh–Taylor Instabilität kann man in Fallturmexperimenten experimentell untersuchen (Abb.3.7). Man verwendet dazu einen Behälter mit zwei übereinander geschichteten Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte in einem Schwerfeld. Die leichtere Flüssigkeit ρ_2 befindet sich dabei oberhalb der schwereren Flüssigkeit $\rho_1 > \rho_2$, d.h. die Anordnung ist Rayleigh–Taylor stabil. Nun beschleunigt man den Behälter nach unten, und zwar mit einer Kraft \mathbf{F}_b , die größer als die Schwerkraft \mathbf{F}_g ist. Die Flüssigkeiten spüren infolge der Beschleunigung eine nach **oben** gerichtete Trägheitskraft $-\mathbf{F}_b$. Die Nettokraft auf die Anordnung ist $-\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_g$. Sie ist wegen $|\mathbf{F}_b| > |\mathbf{F}_g|$ nach oben gerichtet und macht die

Schichtung instabil.

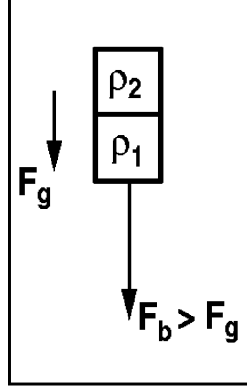


Abbildung 3.7:

Rayleigh–Taylor Instabilitäten spielen eine wichtige Rolle in Supernovaexplosionen, wo sie großskalige Mischprozesse bewirken. Da die Energie der Stoßwelle in einer Supernovaexplosion viel größer ist als die gravitative Bindungsenergie der ausgeschleuderten Materie, ist die Gravitation für die Ausbreitung der Stoßwelle dynamisch irrelevant. Ausserdem bestehen Supernovahüllen aus kompressiblem Gas, d.h. es sind Dichte- und Druckgradienten vorhanden. Die obigen Überlegungen sind daher nicht direkt auf Supernovae anwendbar. In Supernovahüllen wird die Rolle der Schwerebeschleunigung g vom negativen Druckgradienten übernommen

$$g \implies -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

und das (lokale) Instabilitätskriterium lautet: Supernovahüllen (i.a. kompressible Gase) sind Rayleigh–Taylor instabil, wenn die (lokale) Druckskalenhöhe $\mathcal{P} \equiv \partial \ln p / \partial r$ und die (lokale) Dichteskalenhöhe $\mathcal{R} \equiv \partial \ln \rho / \partial r$ die Bedingung

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{P}} < \frac{1}{\Gamma_1} \quad (3.63)$$

erfüllen, wobei Γ_1 der lokale Adiabatenindex des Gases ist (siehe 1.15). Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn Druck- und Dichtegradient ein unterschiedliches Vorzeichen besitzen. Für die Anwachsrates der Instabilität gilt

$$\sigma_{\text{RT}} = \frac{c_s}{\Gamma_1} \sqrt{\mathcal{P}^2 - \Gamma_1 \mathcal{P} \mathcal{R}},$$

wobei c_s die (lokale) Schallgeschwindigkeit ist.

Damit Rayleigh–Taylor Instabilitäten auch Konsequenzen für eine Supernovaexplosion haben, muß ihre Anwachrszeitskala $\tau_{\text{RT}} \equiv \sigma_{\text{RT}}^{-1}$ offensichtlich kürzer als die hydrodynamische Zeitskala $\tau_{\text{hyd}} \equiv r_{sh}/v_{sh}$ sein. Hierbei sind r_{sh} und v_{sh} der Radius und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stoßwelle.

3.3.2 Kelvin–Helmholtz Instabilität

Eine **Kelvin–Helmholtz Instabilität** tritt dann auf, wenn zwischen zwei aneinander grenzenden Flüssigkeiten (oder auch innerhalb einer Flüssigkeit) eine Scherströmung (d.h. ein Geschwindigkeitsgradient senkrecht zur Richtung der Strömung) vorhanden ist (siehe Chandrasekhar (1961), Seite 481ff). In der Astrophysik findet man Kelvin–Helmholtz Instabilitäten in einer Vielzahl von Situationen, unter anderem in Jets. Sie treten auch immer als Folge von Rayleigh–Taylor Instabilitäten auf, wenn sich die auf- und absteigenden Blasen oder Finger relativ zur Umgebung bewegen (Abb. 3.6).

Als einfachsten Fall betrachten wir zwei homogene, inkompressible Flüssigkeiten der Dichten ρ_1 und $\rho_2 < \rho_1$, die durch eine ebene Grenzfläche ($z = 0$) voneinander getrennt sind, und die sich parallel zu der Grenzfläche mit konstanten Geschwindigkeiten u_1 und u_2 in x -Richtung bewegen. Die beiden Flüssigkeiten erfahren außerdem eine Beschleunigung g , die in negative z -Richtung weist (siehe Chandrasekhar, 1961, Seite 481ff; Abb. 3.8).

Wir nehmen nun an, daß die Grenzfläche leicht gestört wird und betrachten die zeitliche Entwicklung der Störung mit Hilfe einer linearen Stabilitätsanalyse nach Fouriermoden ganz analog wie im Fall der Rayleigh–Taylor Instabilität. Setzt man den Störungsansatz (3.61) in die hydrodynamischen Gleichungen ein und vernachlässigt alle Terme, die nicht-linear in der Störung sind, erhält man die Dispersionsrelation

$$\tau_{\text{KH}}^{-1} = n = -ik_x(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \pm [gk(\alpha_2 - \alpha_1) + k_x^2 \alpha_1 \alpha_2 (u_1 - u_2)^2]^{1/2}, \quad (3.64)$$

wobei

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (\alpha_2 < \alpha_1)$$

und τ die Anwachszeitskala und $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ der Absolutwert des Wellenvektors der Störung sind.

- Im Falle $k_x = 0$ gilt:

$$n = \pm \sqrt{gk(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

oder

$$n^2 = gk \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$$

d.h. das Auftreten von RT-Instabilitäten **transversal** zur Strömungsrichtung bleibt unbeeinflußt von der Scherströmung.

- Im Falle $k_x \neq 0$ ist die **Strömung instabil**, falls

$$gk(\alpha_2 - \alpha_1) + k_x^2 \alpha_1 \alpha_2 (u_1 - u_2)^2 > 0,$$

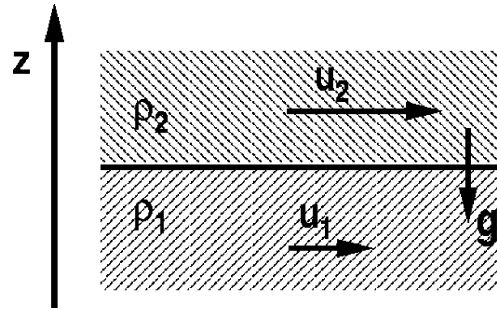


Abbildung 3.8:

bzw. wegen $k_x = k \cos \theta$ falls

$$k > -\frac{g(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 \alpha_2 (u_1 - u_2)^2 \cos^2 \theta},$$

wobei θ der Winkel zwischen dem Wellenvektor der Störung \vec{k} und der x -Richtung (d.h. der Strömungsrichtung) ist. Falls weiterhin $k_y = 0$ (oder allgemein, falls $\vec{k} \parallel \vec{v}$) gilt und damit $\theta = 0$, folgt

$$k > k_{min} \equiv \frac{g(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2 (u_1 - u_2)^2},$$

d.h. Störungen mit hinreichend großen Wellenzahlen ($k > k_{min}$) bzw. hinreichend kleine Wellenlängen ($\lambda < \lambda_{min} \equiv 2\pi/k_{min}$) sind auch für beliebig kleine Geschwindigkeitsunterschiede ($u_1 - u_2$) instabil.

- Variiert sowohl die Dichte als auch die Geschwindigkeit stetig in z -Richtung, folgt aus einer analogen Stabilitätsuntersuchung, daß die **kontinuierliche Scherströmung instabil** ist, wenn die dimensionslose **Richardsonzahl**

$$\text{Ri} \equiv -\frac{g}{\rho} \frac{(d\rho/dz)}{(du/dz)^2} \quad (3.65)$$

kleiner als $1/4$ ist. Offensichtlich stellt die Richardsonzahl ein Maß für die relative Stärke von Auftriebskräften und Scherkräften in einer Strömung dar. Für reale Strömungen ist dabei zu beachten, daß dieses Ergebnis aus einer *linearen* Stabilitätsanalyse erhalten wurde. Tatsächliche Instabilitätsobergrenzen können daher auch bei etwas größeren Richardsonzahlen liegen.

3.3.3 Konvektive Instabilität

Sterne sind geschichtete selbstgravitierende Gaskugeln (siehe Kap. 2), d.h. Dichte, Temperatur und Komposition sind Funktionen des Radius. Während des überwiegenden Teils ihrer thermonuklearen Entwicklung sind Sterne im mechanischen Gleichgewicht (2.2). Nun kann man sich die Frage stellen, unter welchen Bedingungen dieses mechanische Gleichgewicht für einen gegebenen Temperatur- (und/oder Kompositions-) Gradienten stabil ist.

Man kann zeigen (siehe weiter unten), daß das Gleichgewicht nur dann stabil ist, wenn der Temperaturgradient nicht allzu groß ist. Ist dieses Kriterium nicht erfüllt, d.h. ist der Temperaturgradient zu groß, treten Gasströmungen innerhalb des Sterns auf, die das Gas so vermischen, daß der Temperaturgradient reduziert wird. Eine solche Gasströmung heißt (thermische) **Konvektion**.

- **Kriterium für das Auftreten von Konvektion:**

Wir betrachten ein Gas (ohne Kompositionsgradienten) in einem äußeren Gravitationsfeld, das in negative z -Richtung weist. Ein Massenelement mit dem spezifischen Volumen $V(P, S)$ bewege sich adiabatisch (d.h. ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung) entgegen der Schwerkraft von der Höhe z nach der Höhe $z + \xi$, wo der Druck P' herrscht und das Massenelement ein spezifisches Volumen $V(P', S)$ besitzt.

Die Bewegung des Massenelements ist stabil, d.h. es wird zu seiner Ausgangsposition z zurückgetrieben, falls das Massenelement bei der Höhe $z + \xi$ schwerer ist als das dortige Gas, das das spezifische Volumen $V(P', S')$ hat, wobei S' die Entropie ist.

Stabilität erfordert demnach $V(P', S') - V(P', S) > 0$. Unter Verwendung von $S' - S \equiv \xi(dS/dz)$ und der Relation $(\partial V/\partial S)_P = (T/C_P)(\partial V/\partial T)_P > 0$ folgt damit die **Stabilitätsbedingung**

$$\frac{dS}{dz} > 0,$$

d.h. in einer konvektiv stabilen Schichtung muß die Entropie mit der Höhe zunehmen.

- Das entsprechende Kriterium für (chemische homogene) Sterne lautet: **Sterne sind konvektiv stabil, falls die Entropie mit dem Radius zunimmt**, d.h. falls

$$\frac{dS}{dr} > 0. \quad (3.66)$$

Für ein ideales Gas gilt $S \propto \ln[P^{1-\gamma}T^\gamma]$ (1.22) und demnach $(\partial S/\partial T)_P = \gamma T^{-1}$ und $(\partial S/\partial P)_T = (1 - \gamma) P^{-1}$. Aus (3.66) folgt damit

$$\frac{dS}{dr} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{dr} + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dr} = \gamma \frac{d \ln T}{dr} - (\gamma - 1) \frac{d \ln P}{dr} > 0 \quad (3.67)$$

und mit $\nabla_{\text{ad}} \equiv (\gamma - 1)/\gamma$ (siehe Kap. 1.1) das berühmte **Schwarzschild-Kriterium**

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} < \nabla_{\text{ad}}, \quad (3.68)$$

d.h. der räumliche Temperaturgradient im Stern ($d \ln T/d \ln P$) (Radius ausgedrückt durch den Druck!) muß für eine konvektiv stabile Schichtung kleiner sein als die Temperaturänderung eines Massenelements bei adiabatischer Kompression ∇_{ad} (siehe Kippenhahn & Weigert).

- Ist der **Stern chemisch inhomogen**, gibt es einen zusätzlichen Beitrag $\Delta\rho/\rho = (\partial \ln \rho / \partial \ln \mu)(\Delta\mu/\mu)$, wobei μ die mittlere Masse pro Teilchen ist.

Das Stabilitätskriterium heisst in diesem Fall **Ledoux-Kriterium** und lautet

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} < \nabla_{\text{ad}} + (\Phi/\delta)\nabla_{\mu} \quad (3.69)$$

mit $\delta \equiv -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_{P,\mu}$, mit $\Phi \equiv (\partial \ln \rho / \partial \ln \mu)_{T,P}$ und $\nabla_{\mu} \equiv (\partial \ln \mu / \partial \ln P)_{\text{ext}}$.

Demnach wirkt ein Kompositionsgradient ($d\mu/dr$) < 0 stabilisierend gegen das Auftreten von Konvektion. Die tatsächlichen Stabilitätsverhältnisse liegen aber in diesem Fall komplizierter als im Falle homogener Komposition.

- Falls Konvektion auftritt, bewirkt sie einen effizienten Transport von Energie (und Komposition) im Gas. Sie spielt daher eine entscheidende Rolle in vielen Bereichen der Hydrodynamik und insbesondere in der Sternentwicklung und in der Physik der Akkretionsscheiben.

Trotz ihrer Wichtigkeit gibt es aber bis heute noch keine fundamentale Theorie zur Beschreibung der Konvektion. Daher beruhen bis heute viele Erkenntnisse der Astrophysik auf der einfachen phänomenologischen **Mischungswegtheorie** (siehe z.B. Kippenhahn & Weigert).

Die Mischungswegtheorie nimmt an, daß ein relativ zu seiner Umgebung heißeres Flüssigkeitselement eine Strecke l (infolge Konvektion) aufsteigt, bevor es seine überschüssige Energie an die Umgebung angibt. Die Strecke l heißt **Mischungsweglänge**.

Sie wird üblicherweise in der Form $l = \alpha H_p$ geschrieben, wobei $H_p \equiv -(\partial \ln P / \partial r)^{-1}$ die (lokale) Druckskalenhöhe und α ein freier Parameter ist. Für $0.5 \lesssim \alpha \lesssim 3$ ergibt die Mischungswegtheorie eine recht gute Übereinstimmung mit Beobachtungsdaten aus dem Bereich der Sternstruktur und Sternentwicklung. Der Parameter kann aber für verschiedene Fragestellungen erst aus den Daten bestimmt werden (problemabhängiger, „freier“ Parameter).

3.4 Strahlungstransport

In diesem Unterkapitel werden einige grundlegende Tatsachen der Eigenschaften und des Transports von Strahlung in Gasen diskutiert. Eine ausführlichere und weitergehende Darstellung findet man z.B. in den Lehrbüchern von Chandrasekhar (1960), Mihalas (1978), Rybicki & Lightman (1979) und in dem Übersichtsartikel von Mihalas (1998).

Zunächst definieren wir einige charakteristische Größen zur Beschreibung von Strahlungsfeldern.

- Die **spezifische Intensität** $I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu)$ ist so definiert, daß

$$\delta \mathcal{E} = I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) dA \cos \vartheta d\Omega d\nu dt \quad (3.70)$$

die Strahlungsenergie im Frequenzbereich $(\nu, \nu + d\nu)$ ist, die im Zeitintervall dt durch ein Flächenelement dA , dessen Normale $d\vec{A}$ um einen Winkel ϑ von der Propagationsrichtung der Strahlung \vec{n} abweicht, in einen Raumwinkel $d\Omega$ gelangt (Abb. 3.9). Die physikalische Einheit der spezifischen Intensität ist

$$[I] = \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}.$$

In eindimensionalen ebenen oder sphärisch symmetrischen Medien ist I unabhängig vom Azimutwinkel ϕ um die Flächennormale, d.h. die spezifische Intensität hängt nur von einer Raumkoordinate (z oder r) und dem Polarwinkel θ zwischen der Flächennormale und der Photonenpropagationsrichtung \vec{n} ab. Daher kann man in diesem Fall $I = I(z, t; \mu, \nu)$ bzw. $I = I(r, t; \mu, \nu)$ schreiben, wobei $\mu \equiv \cos \theta$.

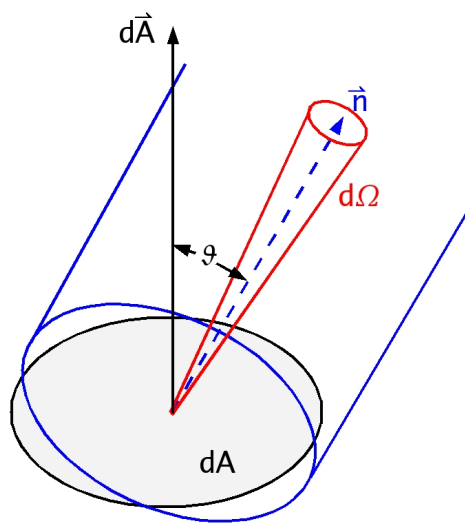


Abbildung 3.9: Definition der Strahlungsintensität

- I beschreibt ein Strahlungsfeld in makroskopischer Sichtweise. Im mikroskopischen Photonenbild definiert man die **Photonenanzahldichte** Ψ , wobei $\Psi(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) d\nu d\Omega$ die Anzahl der Photonen pro Volumen bei (\vec{x}, t) im Frequenzbereich $(\nu, \nu + d\nu)$ ist, die mit der Geschwindigkeit c in einen Raumwinkel $d\Omega$ um \vec{n} propagieren.

Die Zahl der Photonen, die die Fläche $d\vec{A}$ im Zeitraum dt passieren ist $\Psi \vec{n} \cdot d\vec{A} (cdt) d\nu d\Omega$. Da jedes Photon die Energie $h\nu$ besitzt, gilt

$$\delta\mathcal{E} = c h\nu \Psi(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) dA \cos\vartheta d\Omega d\nu dt \quad (3.71)$$

und damit

$$I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) = c h\nu \Psi(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu). \quad (3.72)$$

- Die **Photonenverteilungsfunktion** ist so definiert, daß $f_R(\vec{x}, t; \vec{n}, p) d^3p$ die Anzahl der Photonen pro Volumen, am Raumzeitpunkt (\vec{x}, t) , im Impulsintervall $(\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p}) = (h\nu/c) (\vec{n}, \vec{n} + d\vec{n})$ ist.

Damit gilt wegen $d^3p = p^2 dp d\Omega = (h/c)^3 \nu^2 d\nu d\Omega$

$$(h^3 \nu^2 / c^3) f_R d\nu d\Omega = \Psi d\nu d\Omega, \quad (3.73)$$

woraus

$$\Psi = \frac{h^3 \nu^2}{c^3} f_R \quad (3.74)$$

und

$$I = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} f_R. \quad (3.75)$$

folgen. Man kann zeigen, daß die Photonenvverteilungsfunktion f_R eine relativistische Invariante unter Lorentztransformationen ist.

- Die **mittlere Intensität** ist der Mittelwert der spezifischen Intensität über den ganzen Raumwinkel, d.h.

$$J_\nu \equiv J(\vec{x}, t; \nu) = \frac{1}{4\pi} \int I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) d\Omega \quad (3.76)$$

In eindimensionalen ebenen oder sphärisch symmetrischen Medien ist das Integral über den Winkel ϕ trivial (da I nicht von ϕ abhängt). In diesem Fall folgt mit $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi = -d\mu d\phi$

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) d\mu. \quad (3.77)$$

Demnach gilt: **Die mittlere Intensität ist das nullte Winkelmoment der spezifischen Intensität** * .

- Die **monochromatische Strahlungsenergiedichte** (oder kurz monochromatische Strahlungsdichte) bei der Frequenz ν ist die Anzahldichte der Photonen multipliziert mit ihrer Energie $h\nu$ und integriert über den ganzen Raumwinkel, d.h.

$$\epsilon_\nu^r \equiv \epsilon^r(\vec{x}, t; \nu) = h\nu \int \Psi(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) d\Omega, \quad (3.78)$$

woraus mit (3.72)

$$\epsilon_\nu^r = \frac{1}{c} \int I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad (3.79)$$

folgt. Die **totale Strahlungsenergiedichte** ist dann durch $\epsilon^r = \int_0^\infty \epsilon_\nu^r d\nu = 4\pi/c \int_0^\infty J_\nu d\nu \equiv (4\pi/c)J$ gegeben.

- Der **monochromatische Strahlungsstrom** (monochromatische Strahlungsenergieflußdichte) $\vec{F}_\nu \equiv \vec{F}(\vec{x}, t; \nu)$ ist so definiert, daß $\vec{F} d\vec{A}$ die Strahlungsenergie ist, die pro Frequenzintervall und Zeiteinheit durch die Fläche $d\vec{A}$ strömt, d.h.

$$\vec{F}_\nu \equiv \vec{F}(\vec{x}, t; \nu) = \int I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) \vec{n} d\Omega. \quad (3.80)$$

\vec{F}_ν hat die Einheit $[F_\nu] = \text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$. Der Gesamtstrahlungsstrom ist durch $\vec{F} = \int_0^\infty \vec{F}_\nu d\nu$ gegeben.

In eindimensionalen ebenen oder sphärisch symmetrischen Medien impliziert die azimuthale Symmetrie von I , daß \vec{F} nur eine nichtverschwindende Komponente besitzt. Diese Komponente

$$F_\nu \equiv F(z, t; \nu) = 2\pi \int_{-1}^1 I(z, t; \mu, \nu) \mu d\mu. \quad (3.81)$$

wird oft als der „Strahlungsstrom“ bezeichnet, als ob der Vektor \vec{F} ein Skalar wäre. Gemäß Eddington ist es nützlich, die Größe

$$H_\nu \equiv \frac{1}{4\pi} F_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(z, t; \mu, \nu) \mu d\mu \quad (3.82)$$

zu definieren, die das **erste Winkelmoment der spezifischen Intensität** ist.

*Das n-te Winkelmoment der spezifischen Intensität ist definiert als $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) \mu^n d\mu$

- Der **monochromatische Strahlungsdrucktensor** ist gemäß

$$\mathcal{P}_\nu \equiv \mathcal{P}(\vec{x}, t; \nu) = \frac{1}{c} \int I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) \vec{n} \vec{n} d\Omega \quad (3.83)$$

definiert. \mathcal{P} ist symmetrisch ($P^{ij} \equiv P^{ji}$) und hat die Einheit $[\mathcal{P}] = \text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$.

Für **eindimensionale Medien** gilt

$$\mathcal{P}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\epsilon_\nu^r - P_\nu) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\epsilon_\nu^r - P_\nu) & 0 \\ 0 & 0 & P_\nu \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

$$(3.85)$$

$$= \begin{pmatrix} P_\nu & 0 & 0 \\ 0 & P_\nu & 0 \\ 0 & 0 & P_\nu \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3P_\nu - \epsilon_\nu^r & 0 & 0 \\ 0 & 3P_\nu - \epsilon_\nu^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

wobei P_ν der Skalar

$$P_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) \mu^2 d\mu = \left(\frac{4\pi}{c} \right) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu \equiv \frac{4\pi}{c} K_\nu \quad (3.87)$$

ist. Die Größe K_ν ist das **zweite Winkelmoment der spezifischen Intensität**.

Man nennt den Skalar P_ν oft den „Strahlungsdruck“, als ob der Tensor \mathcal{P}_ν ein Skalar wäre. Das rührt daher, daß in eindimensionaler Symmetrie und isotropen Strahlungsfeldern wegen $\int I n_i^2 d\Omega \equiv \frac{1}{3} \int I d\Omega$ ($i = 1, 2, 3$) die Beziehung $P_\nu = \epsilon_\nu^r/3$ gilt und daher die zweite Matrix in (3.86) verschwindet. Damit ist der Strahlungsdrucktensor in diesem Spezialfall durch eine einzige Zahl, P_ν , bestimmt.

- Zur Charakterisierung der Asymmetrie von Strahlungsfeldern in eindimensionalen Medien verwendet man den **variablen Eddingtonfaktor** f_ν , der gemäß

$$f_\nu \equiv P_\nu / \epsilon_\nu^r = \frac{\int_{-1}^1 I_\nu(\mu) \mu^2 d\mu}{\int_{-1}^1 I_\nu(\mu) d\mu} \quad (3.88)$$

definiert ist und der eine Schließbedingung zwischen P_ν und E_ν in den Strahlungsmomentengleichungen ermöglicht (siehe weiter unten).

In der Hydrodynamik kann man immer eine Schließbedingung spezifizieren (z.B. $P/E = 1/3$ für ein relativistisches Fermigas), da die mittlere freie Weglänge der Teilchen immer sehr viel kleiner als die charakteristische Länge des Systems ist.

Im Falle von Strahlung erhält man dagegen die **Schließbedingung erst durch Berechnung von f_ν aus der Lösung der Strahlungstransportgleichung**, da die

mittlere freie Weglänge der Photonen vergleichbar oder auch größer als die charakteristische Länge des Systems sein kann.

In mehrdimensionale Medien verwendet man den **Eddington-Tensor**

$$\mathcal{F}_\nu \equiv \mathcal{P}_\nu / \epsilon_\nu^r \quad (3.89)$$

- Ist das Strahlungsfeld im **thermischen Gleichgewicht** (Hohlraumstrahlung) [†], so ist die spezifische Intensität durch die Planck-Funktion (1.51) gegeben:

$$I_\nu^* \equiv B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (3.90)$$

Man beachte, daß I_ν^* isotrop ist und damit $F_\nu^* \equiv 0$ im Hohlraum gilt. Die monochromatische Energiedichte ist in diesem Fall durch

$$J_\nu^* = I_\nu^* \implies \epsilon_\nu^* = \frac{4\pi}{c} B_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (3.91)$$

und die totale Energiedichte durch Stefans Gesetz

$$\epsilon^*(T) = \int_0^\infty \epsilon_\nu^* d\nu = aT^4 \quad (3.92)$$

gegeben, wobei a die Strahlungskonstante (1.57) ist.

- Der **Druck eines strömenden und strahlenden, idealen nicht-relativistischen Boltzmannngases** setzt sich aus dem Druck der thermischen Strahlung $P^* = \epsilon^*/3$ (1.56) und dem Gasdruck (1.19) zusammen, d.h. es gilt

$$P = P_g + P^* = nk_B T + \frac{a}{3} T^4 \quad (3.93)$$

Führt man das **Verhältnis von Strahlungsdruck und Gasdruck** $\alpha \equiv P^*/P_g$ und den **Anteil des Gasdrucks am Gesamtdruck** $\beta \equiv P_g/P$ ein, läßt sich der Adiabatenindex Γ_1 (1.15) in der Form

$$\Gamma_1 \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_s = \frac{5 + 40\alpha + 32\alpha^2}{(3 + 24\alpha)(1 + \alpha)} = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{24 - 21\beta} \quad (3.94)$$

schreiben.

- Die Wechselwirkung von Strahlung und Materie wird durch Absorption, Emission und Streuung von Strahlung bestimmt.

[†]Ein oberer Index, *, bezeichnet im folgenden Größen im thermischen Gleichgewicht

- Die **Absorption** von Strahlung wird durch die **Opazität** bzw. durch den **Extinktionskoeffizienten** χ charakterisiert, der gemäß

$$\delta\mathcal{E} = \chi(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) dl dA d\Omega d\nu dt \quad (3.95)$$

definiert ist, wobei $\delta\mathcal{E}$ der Energiebeitrag ist, um den das Strahlungsfeld im Frequenzintervall $d\nu$ während der Zeit dt durch ein Materieelement der Dicke dl reduziert wird. Das Materieelement hat dabei eine Querschnittsfläche dA senkrecht zur Propagationsrichtung \vec{n} der Strahlung in den Raumwinkel $d\Omega$.

Die Opazität χ ist durch die Summe $\sum_i n_i \alpha_i$ gegeben, wobei n_i die Anzahldichte der Teilchensorte i ist, die Strahlung der Frequenz ν mit dem Wirkungsquerschnitt α_i absorbieren oder streuen. Die Einheit von χ ist $[\chi] = \text{cm}^{-1}$ und $\lambda_\nu \equiv 1/\chi_\nu$ ist die **mittlere freie Weglänge von Photonen** der Frequenz ν .

Für ruhende, homogene Materie ist χ isotrop. Für sich bewegende Materie gilt dies zwar auch in dem mit der Materie mitbewegten Koordinatensystem, aber nicht im Laborsystem. In letzterem ist χ anisotrop (starke Frequenz-Winkel-Kopplung durch Dopplereffekt), was Berechnungen erheblich kompliziert.

- Die **Emission** von Strahlung wird ganz analog durch den **Emissionskoeffizienten** η charakterisiert, der gemäß

$$\delta\mathcal{E} = \eta(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) dl dA d\Omega d\nu dt \quad (3.96)$$

definiert ist.

- **Streuung:** Es ist manchmal nützlich, zwischen „wahrer“ Absorption (d.h. thermische Absorptions- und Emissions-Prozessen) und Streuung zu unterscheiden. Thermische Prozesse koppeln Strahlung und Materie lokal, wobei Photonen erzeugt oder vernichtet werden und die thermische Energie der Materie erhöht bzw. erniedrigt wird.

In Streuprozessen wird dagegen die Richtung und/oder die Frequenz eines Photons verändert. Die Emissionsrate hängt in diesem Fall von den vorhandenen Photonen ab, aber nicht vom thermischen Zustand der Materie.

Demnach ist es sinnvoll den Extinktionskoeffizienten gemäß

$$\chi_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$$

aufzuspalten, wobei κ_ν und σ_ν die Absorptions- und Streukoeffizienten sind.

- Die **optische Tiefe** eines Mediums definiert man durch

$$\tau_\nu(\vec{x}, \vec{x}') \equiv \int_0^l \chi(\vec{x} + s\vec{n}; \vec{n}, \nu) ds, \quad (3.97)$$

wobei $\vec{x}' = \vec{x} + l\vec{n}$ ist. Demnach ist die optische Tiefe gleich der Anzahl der mittleren freien Weglängen der Photonen längs eines Strahls.

- Die **Strahlungstransportgleichung** folgt phänomenologisch aus der Tatsache, daß die durch ein Flüssigkeitselement (der Länge ds) hindurchströmende Strahlungsenergie sich nur infolge von Absorptions- und Emissionsprozessen im Flüssigkeitselement ändern kann. Unter gewissen Näherungen[†] lautet die Strahlungstransportgleichung

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) = \eta(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) - \chi(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu). \quad (3.98)$$

Man beachte: Enthält η einen Streuterm, so hängt die rechte Seite der Gleichung von $J = \int I(\mu) d\mu$ ab, d.h. die Strahlungstransportgleichung wird zur Integrodifferentialgleichung.

In (geradlinigen) kartesischen Koordinaten gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z} = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} + n_z \frac{\partial}{\partial z} = \vec{n} \cdot \nabla \quad (3.99)$$

und demnach

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{n} \cdot \nabla \right) I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) = \eta(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) - \chi(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu) I(\vec{x}, t; \vec{n}, \nu), \quad (3.100)$$

wobei im 1D planaren Fall $\vec{n} \cdot \nabla = \mu \partial / \partial z$ ist.

Unter der Annahme von **sphärischer Symmetrie** lautet die **Strahlungstransportgleichung in Kugelkoordinaten**

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} = \eta - \chi I. \quad (3.101)$$

- Zur Beschreibung eines Strahlungsfeldes werden oft (die beiden niedrigsten) **Winkelmomente der Strahlungstransportgleichung** verwendet, die wie folgt definiert sind (in kartesischen Koordinaten; unabhängige Variablen der Strahlungsgrößen auf der rechten Seite sind nicht angeschrieben).

- **Nulltes Moment:** Multiplikation der Strahlungstransportgleichung (3.100) mit $d\Omega/4\pi$ und anschließende Integration über den Raumwinkel ergibt

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J(\vec{x}, t; \nu)}{\partial t} + \nabla \vec{H}(\vec{x}, t; \nu) = \frac{1}{4\pi} \int (\eta - \chi I) d\Omega \quad (3.102)$$

bzw.

$$\frac{\partial \epsilon_\nu^r}{\partial t} + \nabla \vec{F}_\nu = \int (\eta - \chi I) d\Omega. \quad (3.103)$$

[†]Pomraning „Equations of Radiation Hydrodynamics“, S. 47-49

Diese **monochromatische Strahlungsenergiegleichung** wird durch Integration über alle Frequenzen zur **Strahlungsenergiegleichung**

$$\frac{\partial \epsilon^r}{\partial t} + \nabla \vec{F} = \int_0^\infty d\nu \int (\eta - \chi I) d\Omega, \quad (3.104)$$

die besagt: Die zeitliche Änderung der Strahlungsenergiedichte in einem festen Volumen ist gleich der Emissionsrate des Mediums minus der Energieabsorptionsrate des Mediums minus des Nettoflusses an Strahlungsenergie durch die Oberfläche des Volumens.

In sphärischer Symmetrie und in sphärischen Koordinaten gilt

$$\frac{\partial \epsilon^r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 F}{\partial r} = \frac{\partial \epsilon^r}{\partial t} + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial L}{\partial r} = 2\pi \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 (\eta - \chi I) d\mu, \quad (3.105)$$

wobei

$$L(r, t) \equiv 4\pi r^2 F(r, t) \quad (3.106)$$

die **Leuchtkraft** ist.

Im Grenzfall eines **statischen** Mediums ist $\partial/\partial t = 0$. Zum Erreichen eines **stationären Zustands** muß das Medium außerdem genauso viel Energie emittieren wie es absorbiert, d.h. es muß $\int_0^\infty (\eta - \chi I) d\nu = 0$ gelten. Daraus folgt die Bedingung $\nabla \vec{F} \equiv 0$ für das **Strahlungsgleichgewicht**.

- **Erstes Moment:** Multiplikation der Strahlungstransportgleichung (3.100) mit $\vec{n} d\Omega/4\pi$ und anschließende Integration über den Raumwinkel ergibt

$$\frac{1}{c} \frac{\partial H_\nu^i}{\partial t} + \frac{\partial K_\nu^{ij}}{\partial x^j} = \frac{1}{4\pi} \int (\eta - \chi I) n^i d\Omega \quad (3.107)$$

bzw. nach Integration über alle Frequenzen die **Strahlungsimpulsleichung**

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{P} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int (\eta - \chi I) \vec{n} d\Omega, \quad (3.108)$$

wobei \vec{F}/c^2 die Strahlungsimpulsdichte (Strahlungsenergieflußdichte (3.80) dividiert durch c^2) und \mathcal{P} die Strahlungsimpulsflußdichte sind.

Man beachte, daß

$$\vec{f} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \int \chi I \vec{n} d\Omega \quad (3.109)$$

die Kraft pro Volumen ist, die die Strahlung auf das Medium ausübt.

- **Schließbedingung:** Strahlungshydrodynamische Simulationen erfordern die gleichzeitige Berechnung der totalen Energie- und Impulsdichte der Strömung (Medium plus Strahlungsfeld). Die Strahlungsanteile sind durch die Momentengleichungen für die Strahlungsenergie (3.104) und den Strahlungsimpuls (3.108)

gegeben. Zur Lösung des Gleichungssystems benötigt man allerdings noch den Eddingtonfaktor (3.88), um den Strahlungsdruck P_ν durch die Strahlungsenergie E_ν auszudrücken. Dies erfordert im allgemeinen die Lösung der vollen winkel- und frequenzabhängigen Transportgleichung.

In der Hydrodynamik ist dieser Aufwand nicht notwendig, da man dort annehmen kann, daß die mikroskopische Geschwindigkeitsverteilung wegen $\lambda \ll l$ (3.1) isotrop ist, woraus die Schließbedingung (Zustandsgleichung) folgt (siehe z.B. Kap. 1.2). In der Strahlungshydrodynamik ist dies nur im Rahmen der Diffusionsnäherung möglich.

- Das Verhalten strahlender Flüssigkeitsströmungen läßt sich durch zwei dimensionslose Zahlen charakterisieren:

– **Energieverhältnisse:**

$$R_E \equiv \frac{\text{Energiedichte des Mediums}}{\text{Strahlungsenergiedichte}} = \frac{\frac{3}{2}nk_B T}{aT^4} = \frac{0.028n}{T^3} \quad (3.110)$$

Im Zentrum der Sonne mit $\rho \sim 100 \text{ g/cm}^3$ und $T \sim 10^7 \text{ K}$ ist $R_E \approx 500$, d.h. der Strahlungsenergiebeitrag ist unwichtig. Im Zentrum eines O-Sterns mit $\rho \sim 3 \text{ g/cm}^3$ und $T \sim 4 \times 10^7 \text{ K}$ ist $R_E \approx 1$, sodaß die Strahlungsenergie wichtig ist.

Generell gilt $R_E < 1$ (strahlungsdominiert), falls $T_{\text{keV}} \gtrsim 2\rho_{\text{cgs}}^{1/3}$.

– **Energietransportverhältnisse:** Die Wichtigkeit des Energietransports durch Strahlung wird durch die **Boltzmannzahl**

$$Bo = \frac{\rho C_p T v}{c/4 a T^4} \sim \frac{\text{materieller Enthalpiefluß}}{\text{Strahlungsfluß}} \quad (3.111)$$

charakterisiert, wobei $Bo \sim (v/c) R_E$.

- **Diffusionsnäherung:** (siehe z.B. Shapiro & Teukolsky, Anhang I)

Die Strahlungstransportgleichung vereinfacht sich erheblich, wenn das Strahlungsfeld nahezu isotrop ist. Multipliziert man die frequenzabhängige Strahlungstransportgleichung (3.100) (o.B.d.A. gehen wir von geradlinigen Koordinaten aus) skalar mit \vec{n} und integriert sie dann über den Raumwinkel, so erhält man

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}_\nu}{\partial t} + \int \vec{n} (\vec{n} \cdot \nabla I) d\Omega = -\chi_\nu \vec{F}_\nu, \quad (3.112)$$

da der Emissionsterm wegen der angenommenen Isotropie des Strahlungsfelds keinen Beitrag liefert.

Die Zeitableitung in (3.112) ist identisch Null bzw. kann vernachlässigt werden, wenn das Strahlungsfeld stationär ist bzw. wenn es zeitlich so langsam variiert, daß zeitliche

Änderungen des Strahlungsfeld durch die zeitlichen Variationen der Dichte und der Temperatur des Mediums bestimmt sind (Vernachlässigung von Strahlungspulsen).

Ist das Strahlungsfeld strikt isotrop, so gilt $\vec{F}_\nu = 0$ (3.80). Für nahezu isotrope Strahlungsfelder entwickelt man das Oberflächenintegral in (3.112) und betrachtet nur den führenden, isotropen Teil von I_ν . Für die i -te Komponente erhält man unter Berücksichtigung von (3.79)

$$\int n_i n_k \partial_k I d\Omega = (\partial_k I) \int n_i n_k d\Omega \quad (3.113)$$

$$= (\partial_k I) \frac{4\pi}{3} \delta_{ik} \quad (3.114)$$

$$= \frac{c}{3} \partial_i \epsilon_\nu^r. \quad (3.115)$$

Damit folgt aus (3.112) im quasi-stationären Grenzfall

$$F_\nu = -\frac{c}{3\chi_\nu} \nabla \epsilon_\nu^r. \quad (3.116)$$

In vielen Fällen (z.B. lokales thermisches Gleichgewicht **LTE**[‡]) nehmen die Koeffizienten η_ν und χ_ν die gleichen Werte an, die sie auch in striktem thermodynamischen Gleichgewicht hätten.

Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt $I_\nu^* = B_\nu(T) = \text{konst.}$, d.h. die linke Seite der Strahlungstransportgleichung (3.100) ist identisch null, woraus $\eta_\nu = \chi_\nu I_\nu^* = \chi_\nu B_\nu(T)$ folgt.

Im quasi-stationären Grenzfall lautet demnach die Gleichung für das nullte Winkelmoment der Strahlungstransportgleichung

$$\nabla \cdot \vec{F}_\nu = c\chi_\nu(\epsilon_\nu^* - \epsilon_\nu^r). \quad (3.117)$$

Gleichungen (3.116) und (3.117) beschreiben den Strahlungstransport in der **Diffusionsnäherung**. Diese Näherung ist immer dann gültig, wenn das Strahlungsfeld auf Längenskalen vergleichbar oder kleiner als die mittlere freie Weglänge der Photonen ($\lambda_\nu \equiv 1/\chi_\nu$) isotrop ist.

Wichtig: Die Anwendbarkeit der Diffusionsnäherung erfordert kein LTE, denn LTE ist zwar eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Diffusionsnäherung.

[‡] Der thermodynamische Zustand des Mediums ist vollständig durch zwei Parameter, z.B. Dichte und Temperatur, bestimmt. Dabei hängt der Zustand an einem Ort nur vom Wert dieser Parameter an eben diesem Ort ab.

Im LTE gilt $\epsilon_\nu^r = \epsilon_\nu^*$, sodaß aus (3.116) nach Integration über alle Frequenzen

$$\vec{F} = -\frac{c}{3} \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \nabla \epsilon_\nu^* d\nu \quad (3.118)$$

folgt. Definiert man die (frequenzgemittelte) **Rosseland Opazität** gemäß

$$\frac{1}{\chi_R} \equiv \frac{\int_0^\infty (1/\chi_\nu) (d\epsilon_\nu^*/dT) d\nu}{\int_0^\infty (d\epsilon_\nu^*/dT) d\nu} \quad (3.119)$$

(formal das harmonische Mittel von χ_ν mit der Gewichtsfunktion $d\epsilon_\nu^*/dT = (4\pi/c) dB_\nu/dT$), so läßt sich (3.118) wegen (3.92) in der Form

$$\vec{F} = -\frac{c}{3\chi_R} \nabla \epsilon^* = -\frac{c}{3\chi_R} \nabla (aT^4) \quad (3.120)$$

schreiben. In sphärisch-symmetrischen Sternen gilt demnach in der Diffusionsnäherung für die Leuchtkraft (3.106) am Radius r

$$L(r) = 4\pi r^2 F(r) = -\frac{16\pi r^2}{3} \frac{acT^3}{\chi_R} \frac{dT}{dr}, \quad (3.121)$$

d.h. der Strahlungsfluß wird durch den lokalen Temperaturgradienten bestimmt.

3.5 Magneto hydrodynamik

Befindet sich ein leitendes flüssiges (oder gasförmiges) Medium in einem Magnetfeld, so werden in ihm bei seinen hydrodynamischen Bewegungen elektrische Felder induziert und es entstehen elektrische Ströme. Im Magnetfeld wirken auf Ströme aber Kräfte. Gleichzeitig verändern diese Ströme das Magnetfeld. Es bestehen also komplizierte Wechselwirkungen zwischen den magnetischen und den hydrodynamischen Erscheinungen, die auf der Grundlage des kombinierten Systems der Feldgleichungen und der Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit untersucht werden müssen.

- Das Verhalten elektromagnetischer Felder wird durch die **Maxwellschen Gleichungen** beschrieben. Für ein *elektrisch neutrales* Medium ($\varepsilon_0 = 1, \mu_0 = 1$, einkomponentige elektrisch leitende Flüssigkeit: $\rho_Q = 0$) lauten sie im Ruhesystem des Mediums:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \quad (3.122)$$

Wegen ihrer Lorentz-Invarianz gelten die Maxwellschen Gleichungen in dieser Form auch in einem Koordinatensystem, das sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Bezeichnet man etwa mit \vec{E}' das elektrische Feld im Ruhesystem des Mediums und mit \vec{E} das elektrische Feld in einem System relativ zu dem sich das Medium mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, so hat (3.122) in beiden Systemen die gleiche Form. Die in der Induktionsgleichung auftretende **elektrische Stromdichte** \vec{J} folgt aus dem Ohmschen Gesetz für das mit \vec{v} bewegte Flüssigkeitselement im nicht-relativistischen Fall gemäß

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right), \quad (3.123)$$

wobei σ die (isotrope) **elektrische Leitfähigkeit** des Mediums ist. Denn im Ruhesystem des Mediums gilt nach Ohm $\vec{J}' = \sigma \vec{E}'$. Für ein Medium, das sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} ($|\vec{v}| \ll c$) bewegt, gilt $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}/c \times \vec{B}$ und für $\rho_Q = 0$ ist $\vec{J}' = \vec{J}$.

- Die beiden **grundlegenden Näherungen** der nicht-relativistischen Magneto hydrodynamik (MHD) sind:
 - (i) Alle Geschwindigkeiten sind klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit: $|\vec{v}| \ll c$ (quasi-stationäre Näherung);
 - (ii) die Ladungsdichte und das elektrische Feld im Ruhesystem der Flüssigkeit sind Null (Einflussigkeitsmodell). Das Medium ist daher elektrisch neutral.

Mit diesen Annahmen kann man zeigen, daß das elektrische Feld im Laborsystem verglichen mit dem magnetischen Feld klein von erster Ordnung in v/c ist,

$$|\vec{E}| = \mathcal{O}\left(\frac{v}{c} |\vec{B}|\right),$$

und daß der Verschiebungsstrom verglichen mit dem Ladungsstrom klein von zweiter Ordnung ist (analoges gilt für Korrekturen, die von $\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho_Q$ herrühren würden):

$$\frac{1}{c} \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2} |\vec{J}|\right).$$

Das bedeutet insgesamt: Die (elektromagnetischen Anteile der) Gleichungen der Magnetohydrodynamik folgen aus den Maxwell'schen Gleichungen, wenn alle Größen vernachlässigt werden, die klein von zweiter Ordnung in v/c sind [Landau & Lifschitz, 1985].

- Ist σ sehr groß (effektiv unendlich), so strömt die Flüssigkeit bzw. das Gas unter dem Einfluß der elektromagnetischen Felder gemäß der Bedingung:

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (3.124)$$

(ideale Magnetohydrodynamik).

- Mit den obigen Annahmen ergibt sich mit Gl. (3.123) und der Vektoridentität $\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$ die folgende Näherung für die **Induktionsgleichung**

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) + \nu_m \nabla^2 \vec{B}.} \quad (3.125)$$

Die Induktionsgleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung von Magnetfeldern in einer Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld \vec{v} in *MHD-Näherung*, vorausgesetzt, die Bedingung $\text{div} \vec{B} = 0$ ist schon zu Beginn erfüllt. Der zweite Term auf der rechten Seite beschreibt die resistive Felddiffusion mit dem **Diffusionskoeffizienten**

$$\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}. \quad (3.126)$$

- Für eine ruhende Flüssigkeit verschwindet in Gleichung (3.125) der erste Term auf der rechten Seite und die Induktionsgleichung geht in eine Diffusionsgleichung über, die besagt, daß ein vorhandenes Anfangsmagnetfeld innerhalb einer Zeitskala $\tau \equiv 4\pi\sigma L/c^2$ zerfällt, wobei L eine charakteristische Längenskala ist. Für den geschmolzenen Kern der Erde ist $\tau \sim 10^4$ Jahre und für das typischen Sonnenmagnetfeld gilt $\tau \sim 10^{10}$ Jahre.

- Für Zeiten klein im Vergleich zur Diffusionszeit τ oder, in anderen Worten, wenn die elektrische Leitfähigkeit σ so groß ist, daß man den 2. Term in der Induktionsgleichung vernachlässigen kann, besagt Gl. (3.125), daß das Magnetfeld „eingefroren“ ist: Die Kraftlinien werden mit der Flüssigkeit advektiert (siehe z.B. Landau & Lifschitz, Bd.8). Außerdem gilt dann auch Gl. (3.124).
- Falls die Strömung von Wirbeln durchsetzt bzw. turbulent ist, werden die Feldlinien schnell aufgewickelt und Gebiete mit hoher magnetischer Energiedichte entstehen. In diesen Gebieten wechselt das Feld innerhalb sehr kleiner Volumina die Richtung. Physikalisch führt dies zum Kurzschluß („reconnection“) der Feldlinien und zur Auslöschung des Feldes, wobei Magnetfeldenergie in thermische Energie umgesetzt wird. Diese turbulente Felddiffusion bewirkt, daß Wirbelzentren sehr schnell feldfrei und je nach Feldstärke mehr oder weniger stark aufgeheizt werden.
- Gleichung (3.125) kann in die Form einer Kontinuitätsgleichung für die Flußdichte \vec{B} umgeschrieben werden (Erhaltungsform – wichtig für numerische Simulationen),

$$\frac{\partial B^i}{\partial t} = -\nabla_k [F^{ik} - G^{ik}], \quad (3.127)$$

mit den anti-symmetrischen[§] Transport- und Diffusionsflusstensoren

$$F^{ik} = B^i v^k - B^k v^i, \quad (3.128)$$

$$G^{ik} = \nu_m (\nabla^k B^i - \nabla^i B^k). \quad (3.129)$$

- Die **Quellfreiheit** des magnetischen Feldes $\text{div} \vec{B} = 0$ wird durch die Gleichungen (3.125) bzw. (3.127) zu einer reinen Anfangsbedingung reduziert, da für einen beliebiges Vektorfeld $\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$ bzw. für einen beliebigen antisymmetrischen Tensor $\nabla_i \nabla_k A^{ik} = 0$ gilt und somit ein ursprünglich quellfreies Feld diese Eigenschaft beibehält.
- Die restlichen elektromagnetischen Größen sind in der MHD keine unabhängigen Variablen, sondern Funktionen des Magnetfeldes:

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \vec{B}, \quad (3.130)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{c} \left(\vec{B} \times \vec{v} + \nu_m \text{rot} \vec{B} \right). \quad (3.131)$$

[§]Für anti-symmetrische Tensoren gilt: $T^{ik} = -T^{ki}$ und $T^{ii} = 0$.

- Durch das Auftreten elektromagnetischer Größen müssen sowohl die Energie- (3.24) als auch die Impuls-Gleichungen (3.18) abgeändert werden. Zu Energie- und Impulsdichte sind die jeweiligen Feldanteile zu addieren. Die zugehörigen Flüsse müssen um den Poyntingfluss bzw. den Maxwellschen Spannungstensor erweitert werden.

Die **Energiedichte des Feldes** [erg/cm³], die nach Division durch ρ zu (3.25) hinzuaddiert werden muß, ergibt sich wegen $\mathcal{O}(E^2) = \mathcal{O}(v^2/c^2 B^2) \approx 0$ zu

$$\rho E_{\text{mag}} = \frac{B^2}{8\pi} \quad (3.132)$$

und der **magnetische Energiefluß** zu

$$\vec{q}_{\text{mag}} = \frac{1}{4\pi} \vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\nu_m}{4\pi} \vec{B} \times \text{rot} \vec{B}, \quad (3.133)$$

bzw. zu

$$q_{\text{mag}}^k = -\frac{1}{4\pi} \left(B^i v_i B^k - \frac{B^2}{2} v^k \right) + \frac{\nu_m}{4\pi} \left(B^i \nabla_i B^k - \nabla^k \frac{B^2}{2} \right). \quad (3.134)$$

Weiterhin läßt sich zeigen, daß der Feldimpuls klein von zweiter Ordnung im Vergleich zum mechanischen Impuls ist und daher vernachlässigt werden darf. Im Maxwellschen Spannungstensor T^{ik} werden die elektrischen Terme vernachlässigt:

$$-T^{ik} \approx \Pi_{\text{mag}}^{ik} = -\frac{1}{4\pi} \left(B^i B^k - \frac{B^2}{2} \delta^{ik} \right). \quad (3.135)$$

Dieser **magnetische Drucktensor** Π_{mag}^{ik} muß zum Drucktensor Π^{ik} (3.19) in den Navier–Stokes–Gleichungen (3.18) hinzuaddiert werden. Den *isotropen Anteil* des magnetischen Drucktensors (2. Term in (3.135)) kann man auch mit dem isotropen Gasdruck aus (3.19) zu einem isotropen Gesamtdruck $p_{\text{tot}} \equiv p + p_{\text{mag}}$ mit $p_{\text{mag}} \equiv B^2/8\pi$ zusammenfassen.

- In der gewöhnlichen Hydrodynamik wird die **Reynolds–Zahl** (3.29) verwendet, um die relative Stärke der Viskositäts- und Trägheitsterme in den Bewegungsgleichungen zu charakterisieren. Neben dieser Zahl kann man in der MHD auch noch eine **magnetische Reynolds–Zahl**

$$\text{Re}_m \equiv \frac{uL}{\nu_m} \quad (3.136)$$

eingeführen (mit ν_m aus Gl. 3.126), die die relative Stärke des Leitfähigkeitsterms charakterisiert (L und $u = l/\tau$ sind wiederum für die gegebene Bewegung charakteristische Längen- und Geschwindigkeitsskalen). Der Leitfähigkeitsterm kann im allgemeinen vernachlässigt werden, wenn $\text{Re}_m \gg 1$.

- Durch Entwicklung der Eulerschen Gleichungen nach kleinen Störungen und nach anschließender Linearisierung erhält man Wellengleichungen für die Dichte ρ , den Druck p und das Geschwindigkeitspotential Ψ (dabei ist $\vec{v} = \text{grad}\Psi$). Die Phasengeschwindigkeit der so definierten **Schallwellen** ist

$$c_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}, \quad (3.137)$$

wobei die Ableitung bei konstanter Entropie zu bilden ist. Wie aufgrund der verschwindenden Scherkräfte für ideale Flüssigkeiten zu erwarten ist, sind Schallwellen longitudinale Wellen, d.h. der Wellenvektor ist parallel zur Geschwindigkeit $\vec{k} \parallel \vec{v}$.

Auf analoge Weise ist es möglich, die MHD-Gleichungen zu linearisieren. Die Projektion der (vektoriellen) Dispersionsrelation senkrecht zur Ebene, die durch den Wellenvektor \vec{k} und das ungestörte Feld \vec{B} aufgespannt ist, liefert die sogenannten **Alfvén-Wellen**. Deren Phasengeschwindigkeit ist

$$c_A = \frac{B_{\parallel}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (3.138)$$

wobei B_{\parallel} die Projektion von \vec{B} auf \vec{k} bezeichnet: $B_{\parallel} = (\vec{k}\vec{B})\vec{k}/|\vec{k}|^2$. Die Projektion der Dispersionsrelation in die $\vec{k}\vec{B}$ -Ebene und ihre weitere Zerlegung parallel und senkrecht zu \vec{k} liefert die **schnellen und langsamen magneto-sonischen Wellen**. Deren Phasengeschwindigkeiten sind

$$c_{S,L}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{B^2}{4\pi\rho} + c_0^2 \pm \left[\left(\frac{B^2}{4\pi\rho} + c_0^2 \right)^2 - \frac{B_{\parallel}^2 c_0^2}{\pi\rho} \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.139)$$

Alfvén-Wellen sind grundsätzlich transversale Wellen, während die magneto-sonischen Wellen im allgemeinen Fall – beliebiger Winkel zwischen \vec{k} und \vec{B} – sowohl transversale als auch longitudinale Anteile besitzen. Für die Phasengeschwindigkeiten lassen sich jedoch einige Beziehungen ableiten, die allgemein gelten:

$$c_L < c_A < c_S \quad \text{und} \quad c_L < c_0 < c_S. \quad (3.140)$$

Im Grenzfall kleiner Felder verschwinden c_L und c_A , und c_S geht in die gewöhnliche Schallgeschwindigkeit c_0 über.