

Stefan BRAUN

**Strömungslehre für TPh
(304.524)**

Technische Universität Wien,
Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung,
Resselgasse 3/E322, 1040 Wien, Österreich
Tel.: +43 (0)1 58801 32223,
Email: stefan.braun@tuwien.ac.at,
web: <http://www.fluid.tuwien.ac.at/>

Version 1, 19. April 2011

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen	1
1 Kinematik und Dynamik von Fluiden	1
2 Transporttheorem	4
3 Grundgleichungen	5
3.1 Kontinuitätsgleichung	5
3.2 Bewegungsgleichung	5
3.3 Leistungsbilanz	6
3.4 Zusammenstellung der Grundgleichungen in differentieller Form	7
3.5 Bernoulli-Gleichung	9
<i>Anwendungsbeispiel: Krümmenströmung</i>	10
4 Kinematik der Deformation	12
5 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	14
6 Navier–Stokes Gleichungen	15
7 Wirbelsätze	19
8 Sprungbedingungen	21
8.1 Kontaktunstetigkeit	23
8.2 Stoßunstetigkeit	24
Klassifizierung von Strömungen und Anwendungen	29
9 Modellgesetze, Kennzahlen	29
10 Dimensionsanalyse	31
11 Schleichende Strömung	32
12 Stromfadentheorie (Gasdynamik)	38
12.1 Stoßverluste und Ruhegrößen	41
12.2 Stromfaden schwach veränderlichen Querschnittes	42
<i>Anwendungsbeispiel: Ausströmen aus einem Kessel</i>	46
<i>Anwendungsbeispiel: Laval-Düse</i>	46
13 Dissipative Stoßstruktur	47
14 Ebene (in)kompressible Potentialströmungen	52
14.1 Schwach gestörte Parallelströmungen	53
<i>Anwendungsbeispiel: angestelltes Parabelbogenzweieck in Überschallströmung</i> . . .	56

14.2	Inkompressible Potentialströmungen	59
14.3	Methode der Singularitätenbelegung	63
	<i>Anwendungsbeispiel: angestelltes Parabelbogenzweieck in inkompressibler, reibungs-</i> <i>freier Strömung</i>	<i>68</i>
15	Grenzschichttheorie	71
15.1	Grenzschichtkenngrößen	74
	<i>Anwendungsbeispiel: Widerstand einer parallel angeströmten dünnen Platte</i>	<i>75</i>
	Literaturverzeichnis	78

Symbol	Bezeichnung	SI-Einheit
\mathbf{x}, x_i	Ortsvektor, Komponente i ; $i = 1, 2, 3$	m
t	Zeit	s
ρ	Massendichte	kg/m ³
v	spezifisches Volumen, $v = 1/\rho$	m ³ /kg
V	Kontrollvolumen mit Berandung ∂V	m ³
\dot{V}	Volumenstrom	m ³ /s
m	Masse	kg
\dot{m}	Massenstrom	kg/s
θ	Massenstromdichte	kg/(m ² s)
\mathbf{v}, v_i	Strömungsgeschwindigkeit, Komponente i	m/s
(σ_{ji})	Spannungstensor, $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$	N/m ²
(σ'_{ji})	Reibspannungstensor, $\sigma'_{ji} = \sigma'_{ij}$	N/m ²
p	Druck	Pa = N/m ²
\mathbf{n}, n_i	Normalvektor, zeigt konventionsgemäß aus V heraus, $ \mathbf{n} = 1$	1
\mathbf{t}, t_i	Tangentialvektor, $ \mathbf{t} = 1$	1
\mathbf{g}, g_i	Erdbeschleunigung, $ \mathbf{g} = g$	m/s ²
\mathbf{K}, K_i	vom umströmten Körper auf die Strömung ausgeübte Kraft	N
\mathbf{A}	Auftriebskraft, $ \mathbf{A} = A$	N
\mathbf{W}	Widerstandskraft, $ \mathbf{W} = W$	N
L	von \mathbf{K} pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit	W
\mathbf{q}, q_i	Wärmestrom, Zählrichtung: $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} > 0$ falls \mathbf{q} aus ∂V heraus	W/m ²
e	spezifische innere Energie	J/kg
s	spezifische Entropie	J/(kg K)
h	spezifische Enthalpie	J/kg
T	absolute Temperatur	K
Φ	Dissipationsfunktion	J/(m ³ s)
Φ	Potentialfunktion, $\mathbf{v} = \nabla\Phi$, $(\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0})$	m ² /s
(D_{ij})	Deformationsratentensor, $D_{ij} = D_{ji}$	s ⁻¹
(Ω_{ij})	Rotationsratentensor, $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$	s ⁻¹
$\boldsymbol{\omega}, \omega_i$	Wirbelstärke, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$	s ⁻¹
$\dot{\sigma}$	Entropieproduktion	W/(kg K)
μ	dynamische Viskosität	Pa s
$\bar{\mu}$	Volumenviskosität	Pa s
μ_B	Kompressionszähigkeit	Pa s
ν	kinematische Zähigkeit, $\nu = \mu/\rho$	m ² /s
λ	Wärmeleitfähigkeit	W/(K m)
c	Schallgeschwindigkeit	m/s
c_p	spezifische isobare Wärmekapazität	J/(kg K)
c_v	spezifische isochore Wärmekapazität	J/(kg K)
β	thermischer Expansionskoeffizient	K ⁻¹
κ	Isentropenkoeffizient, $\kappa = c_p/c_v$	1
Γ	Zirkulation	m ² /s
ψ	Stromfunktion (ebene Strömung)	m ² /s
$F(z)$	komplexes Potential, $F = \Phi + i\psi$, $z = x + iy$	m ² /s

Tabelle 1: Wesentliche Formel-Symbole.

Symbol und Definition	Bezeichnung
$\Gamma = 1 + \frac{\rho}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho} \right)_s$	gasdynamische Fundamentalableitung
$Ec = \frac{v^2}{c_p T} = M^2 K_c$	Eckert-Zahl
$Eu = \frac{p}{\rho v^2}$	Euler-Zahl
$Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$	Froude-Zahl
$K_c = \frac{c^2}{c_p T}$	Schallgeschwindigkeitszahl
$Kn = \frac{l_f}{L}$	Knudsen-Zahl
$M = \frac{v}{c}$	Mach-Zahl
$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$	Prandtl-Zahl
$Re = \frac{vL}{\nu}$	Reynolds-Zahl
$Sr = \frac{L}{vt}$	Strouhal-Zahl
$c_p = \frac{p - p_r}{\rho v^2 / 2}$	Druckbeiwert
$c_a = \frac{A}{\rho v^2 / 2 bL}$	Auftriebsbeiwert
$c_w = \frac{W}{\rho v^2 / 2 bL}$	Widerstandsbeiwert
$\tau = \frac{d}{L}$	Dickenparameter
ε	Anstellwinkel
$\beta = \sqrt{1 - M^2}$	Prandtl-Faktor

Tabelle 2: Dimensionslose Kennzahlen, Parameter und Beiwerte.

Grundlagen

1 Kinematik und Dynamik von Fluiden

Die übliche Bezeichnung (Fluid-) ‘*Strömung*’ lässt sich mathematisch durch eine kontinuierliche Transformation des dreidimensionalen Raumes auf sich selbst ausdrücken. Jener Parameter, der die Transformation beschreibt, wird mit der Zeit t identifiziert. Es gilt $-\infty < t < \infty$, die willkürliche Wahl $t = 0$ legt den Anfangszustand fest. Betrachten wir die Bewegung eines Fluidpartikels P in einem raumfesten rechtwinkligen Koordinatensystem, Abb. 1: zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich P an der Stelle $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$, zum Zeitpunkt $t > 0$ an der Stelle $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Die Strömung kann dann durch die Transformation

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

dargestellt werden. Bleiben Fluidpartikel unterscheidbar (was angenommen wird), lässt sich (1) – unter gewissen zusätzlichen Annahmen über die Differenzierbarkeit von φ , Φ hinsichtlich aller Unabhängigen – lokal invertieren:

$$\mathbf{X} = \Phi(\mathbf{x}, t). \quad (2)$$

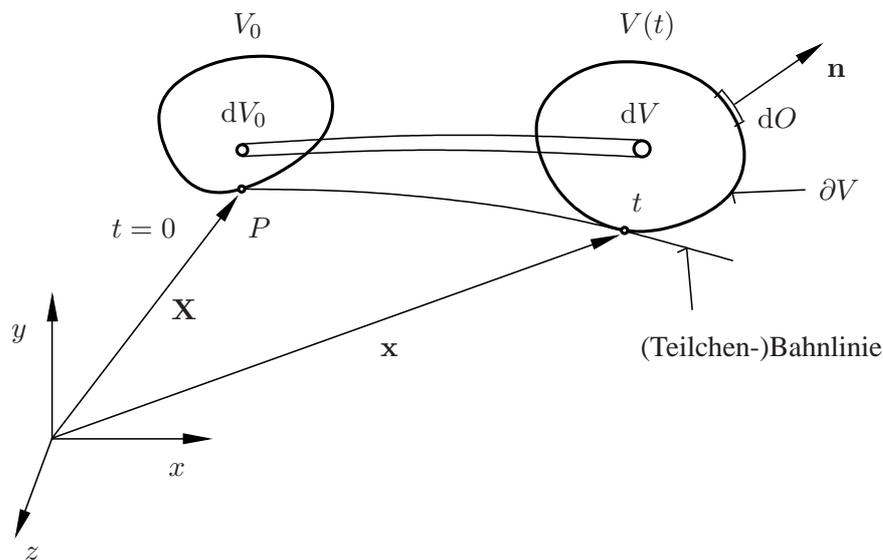


Abbildung 1: Mit der Strömung massenfest mitbewegtes Kontrollvolumen $V = V(t)$: Berandung ∂V , Oberflächenelement dO , nach außen gerichtete Flächen(einheits)normale \mathbf{n} .

Obwohl eine Strömung durch (1) vollständig beschrieben wird, erweist sich diese Darstellung in vielen Fällen als nicht zweckmäßig. Man ist vor allem an der Kenntnis des Strömungszustandes an bestimmten Raumpunkten in Abhängigkeit der Zeit interessiert, beispielsweise am Verhalten der Massendichte und Strömungsgeschwindigkeit

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \text{etc.} \quad (3)$$

Die Größen der Feldbeschreibung (3) einer Strömung werden im Allgemeinen durch partielle Differentialgleichungen miteinander in Beziehung gesetzt, (\mathbf{x}, t) nennt man dabei Eulersche Variablen und den Zugang *Eulersche (raumfeste) Betrachtungsweise*. Im Gegensatz dazu wird mit den Lagrangeschen Variablen (\mathbf{X}, t) die Bewegung einzelner Teilchen verfolgt, entsprechend nennt man den Zugang *Lagrangesche (massenfeste) Darstellung*. Durch (1) bzw. (2) ist jede von (\mathbf{x}, t) abhängige Größe auch als Funktion von (\mathbf{X}, t) ausdrückbar bzw. umgekehrt. Sei b eine beliebige (skalare, vektorielle oder tensorielle) Feldgröße; für die zwei möglichen Darstellungen schreibt man zur Unterscheidung für die Zeitableitung

$$\frac{\partial b}{\partial t} \equiv \frac{\partial b(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad \frac{Db}{Dt} \equiv \frac{\partial \bar{b}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (4)$$

Db/Dt wird als *substantielle (massenfeste) Zeitableitung* von b bezeichnet. Sie misst die zeitliche Änderung von b bei der Verfolgung eines Teilchens, $\partial b/\partial t$ gibt hingegen die Änderung von b wieder, die ein Beobachter an der festen Stelle \mathbf{x} wahrnimmt.

Die *Teilchengeschwindigkeit* wird durch

$$\mathbf{v} := \frac{D\mathbf{x}}{Dt} \quad (5)$$

definiert, praktisch genügt aber oft die Kenntnis der Eulerschen Form $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Der umgekehrte Weg, nämlich die Bestimmung der Partikelbewegung (1) aus dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, erfordert die Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

unter der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}$, was im Allgemeinen schwierig ist.

Die *Teilchenbeschleunigung* \mathbf{a} ist sinngemäß durch $\mathbf{a} := D\mathbf{v}/Dt$ gegeben, sie kann direkt aus dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ berechnet werden (in Indexschreibweise und Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention):

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{Dx_j}{Dt} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (7)$$

Offensichtlich gilt daher ganz allgemein die Beziehung

$$\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) b \quad (8)$$

zwischen massenfester und raumfester Zeitableitung (4) einer beliebigen Feldgröße.

Die *Dehnung eines infinitesimalen Volumens* dV während der Bewegung wird durch die Funktionaldeterminante

$$\det J(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (9)$$

charakterisiert, $J = (\partial x_i / \partial X_j) = (c_{ij})$ ist dabei die Jacobi-Matrix der Transformation (1). Für

das Folgende benötigen wir einen Ausdruck für die massenfeste Zeitableitung von $\det J$. Dazu verwenden wir den Laplaceschen Entwicklungssatz für die Berechnung der Determinante einer (quadratischen) Matrix

$$\det J = \sum_{k=1}^3 c_{ik} \alpha_{ik}, \quad \alpha_{ik} = (-1)^{i+k} \det J_{ik}, \quad (10)$$

hier im Speziellen für die Entwicklung nach der i -ten Zeile für beliebiges, aber festes $i \in \{1, 2, 3\}$ angeschrieben. Dabei bezeichnen c_{ik} die Elemente der Jacobi-Matrix J , α_{ik} die algebraischen Komplemente (Kofaktoren) der i -ten Zeile und k -ten Spalte und $\det J_{ik}$ jene Unterdeterminanten (Minoren), die sich jeweils durch Streichen der i -ten Zeile und k -ten Spalte ergeben.

Unter Verwendung der Beziehung

$$\sum_{k=1}^3 c_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij} \det J \quad (11)$$

mit dem Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (12)$$

folgt für die Ableitung der Funktionaldeterminante (vgl. Jacobi-Formel)

$$d(\det J) = \sum_i \sum_j \underbrace{\frac{\partial(\det J)}{\partial c_{ij}}}_{\alpha_{ij}} dc_{ij}, \quad (13)$$

$$\Rightarrow \frac{D(\det J)}{Dt} = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \frac{Dc_{ij}}{Dt} = \sum_i \sum_k \underbrace{\sum_j c_{kj} \alpha_{ij}}_{\delta_{ki} \det J} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \det J \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{\nabla \cdot \mathbf{v}} \quad (14)$$

mit

$$\frac{Dc_{ij}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial X_j}}_{c_{kj}}$$

Wir erhalten das Resultat

$$\frac{D(\det J)}{Dt} = \det J \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (15)$$

Für eine Strömung, die keine Volumendehnung erfährt, gilt $D(\det J)/Dt \equiv 0$, man nennt sie *inkompressibel*:

$$\text{inkompressible Strömung: } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (16)$$

2 Transporttheorem

Sei $V(t)$ ein mit der Strömung massenfest mitbewegtes Kontrollvolumen und $b(\mathbf{x}, t)$ eine beliebige Feldgröße. Dann gilt mit (1) für die Transformation von Bereichsintegralen, s. Abb. 1:

$$\int_V b(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \bar{b}(\mathbf{X}, t) \underbrace{|\det J(\mathbf{X}, t)|}_{dV} dV_0, \quad V_0 = V(0) = \text{const}. \quad (17)$$

Die massenfeste Zeitableitung dieses Ausdrucks ist unter Verwendung von (4) und (8) gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V b dV &= \int_{V_0} \left(\bar{b} \frac{\partial |\det J|}{\partial t} + |\det J| \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} \right) dV_0 = \int_{V_0} \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{b} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) |\det J| dV_0 \\ &= \int_V \left(\frac{Db}{Dt} + b \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_V \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \nabla \cdot (b \mathbf{v}) \right) dV. \end{aligned} \quad (18)$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes erhält man daraus das *Reynoldssche Transporttheorem*

$$\frac{D}{Dt} \int_V b dV = \int_V \frac{\partial b}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} b \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})}_{v_n} dO, \quad (19)$$

welches eine kinematische Beziehung unabhängig von der Bedeutung von b zum Ausdruck bringt und eine dreidimensionale Verallgemeinerung der Leibniz-Regel für das Ableiten von Parameterintegralen mit variablen Grenzen darstellt. Gemäß (19) setzt sich die massenfeste zeitliche Änderung des Volumenintegrals über b aus der zeitlichen Änderung von b integriert über das zum Zeitpunkt t festgehaltene Volumen V und dem Strom der Feldgröße bv_n durch die geschlossene Oberfläche ∂V zusammen. v_n bezeichnet die Komponente der Geschwindigkeit in Richtung der Flächennormalen \mathbf{n} .

Die entsprechende Verallgemeinerung auf ein mit $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ beliebig bewegtes Kontrollvolumen liefert

$$\frac{d}{dt} \int_V b dV = \int_V \frac{\partial b}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} b (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dO. \quad (20)$$

Für ein raumfestes Volumen für das $\mathbf{w} \equiv 0$ und $V = \text{const}$ gilt, ergibt sich damit in trivialer Weise die Gleichheit der ersten beiden Terme. Der Zusammenhang zwischen massenfest und beliebig bewegtem Kontrollvolumen ergibt sich aus der Differenz von (19) und (20) zu

$$\frac{D}{Dt} \int_V b dV = \frac{d}{dt} \int_V b dV + \oint_{\partial V} b (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dO, \quad (21)$$

dabei wird das Zusammenfallen der jeweiligen Kontrollvolumina zum Zeitpunkt t vorausgesetzt. Bei der Wahl $\mathbf{w} \equiv \mathbf{v}$ verschwindet der rechte Term, man erhält damit gerade die Definition des massenfest mitbewegten Volumens.

3 Grundgleichungen

3.1 Kontinuitätsgleichung

Wird mit $\rho(\mathbf{x}, t) > 0$ die (Massen-)Dichte bezeichnet, ist die Masse m im Volumen V gegeben durch

$$m = \int_V \rho \, dV. \quad (22)$$

Das *Prinzip der Massenerhaltung* besagt nun

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \, dV = 0. \quad (23)$$

Mit (18) erhält man

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0,$$

und, da V beliebig angenommen werden kann, unter Verwendung von (8)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (24)$$

Bemerkenswert ist folgende Relation, die mit Hilfe des Transporttheorems für eine beliebige Feldgröße b angegeben werden kann:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho b \, dV = \int_V \left(\rho \frac{Db}{Dt} + b \underbrace{\frac{D\rho}{Dt}}_{-\rho \nabla \cdot \mathbf{v}} + \rho b \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_V \rho \frac{Db}{Dt} dV. \quad (25)$$

3.2 Bewegungsgleichung

Das *Prinzip der Impulserhaltung* lautet in integraler Form

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i \, dV = \oint_{\partial V} \sigma_{ji} n_j \, dO + \int_V \rho g_i \, dV + K_i, \quad (26)$$

demnach ist die Änderung des Impulses eines massenfesten Volumens gleich der resultierenden Kraft, die auf das Volumen wirkt. Sie setzt sich zusammen aus dem an der Oberfläche ∂V wirkenden *Spannungsvektor* $\sigma_{ji} n_j$ ((σ_{ji}) ist dabei der *Spannungstensor*), einer äußeren Kraft pro Masseneinheit g_i (hier gleichbedeutend mit der Erdbeschleunigung) und jener Kraft K_i , die ein gegebenenfalls vorhandener umströmter Körper in V auf die Strömung ausübt (gleichbedeutend mit der Haltekraft). Für die lokale Betrachtung (differentielle Form) von (26) schließen wir den Bereich fester Körper aus ($\mathbf{K} \equiv 0$) und erhalten unter Verwendung des Transporttheorems (25) und des Gaußschen Satzes

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i \, dV = \int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i \right) dV,$$

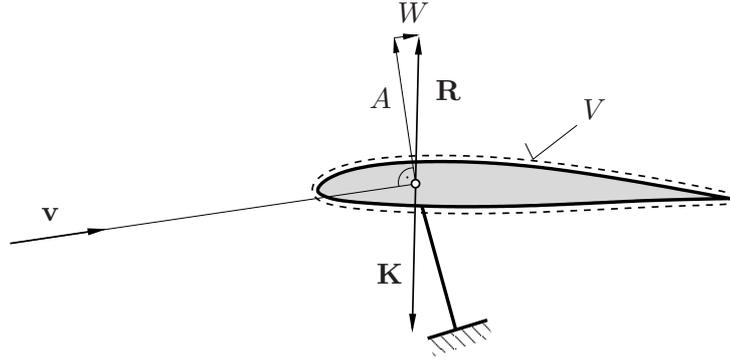


Abbildung 2: Beispiel eines raumfesten Kontrollvolumens V zur Bestimmung der Haltekraft $\mathbf{K} = -\mathbf{R}$. A ... Auftriebs-, W ... Widerstandskraft.

und, da V beliebig angenommen werden kann,

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (27)$$

Wird, wie üblich, der Spannungstensor (σ_{ji}) in einen Tensor (σ'_{ji}) der inneren Reibspannungen und einen Anteil $p \delta_{ij}$, der vom Druck p herrührt, aufgespalten,

$$\sigma_{ji} := \sigma'_{ji} - p \delta_{ij}, \quad (28)$$

dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (29)$$

3.3 Leistungsbilanz

Die Leistungsbilanz in integraler Form

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(\frac{v_i v_i}{2} + e \right) dV = \oint_{\partial V} v_i \sigma_{ji} n_j dO + \int_V v_i \rho g_i dV + L - \oint_{\partial V} q_i n_i dO, \quad (30)$$

besagt, dass die zeitliche Änderung der kinetischen und inneren Energie eines massenfesten Volumens gleich der von Oberflächen- $(\sigma_{ji} n_j dO)$ und Volumenkräften $(\rho g_i dV)$ an V verrichtete Arbeit pro Zeiteinheit sowie der von \mathbf{K} verrichteten mechanischen Leistung L und der abgeführten Leistung durch den Wärmestrom \mathbf{q} ist. Konventionsgemäß ist dabei $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} > 0$ falls \mathbf{q} aus dem Volumen V heraus zeigt.

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhält man die differentielle Form

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} + e \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ji}) + \rho v_i g_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (31)$$

Die Änderung der kinetischen Energie (mechanische Leistungsbilanz) erhält man, indem man (27) mit v_i multipliziert:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} \right) = v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho v_i g_i \quad (32)$$

Aus der Differenz mit (31) ergibt sich nach der Umformung

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -p \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}} + \sigma'_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

die kontinuumsmechanische Formulierung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik:

$$\rho \left(\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \sigma'_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \quad (33)$$

Wird mit $v = 1/\rho$ das spezifische Volumen, $h = e + p/\rho$ die spezifische Enthalpie, s die spezifische Entropie und T die absolute Temperatur eingeführt, lässt sich unter Beachtung von

$$dh = c_p dT + \frac{1 - \beta T}{\rho} dp$$

über die Gibbssche Fundamentalgleichung $de = T ds - p dv$ auch schreiben

$$de - \frac{p}{\rho^2} d\rho = de + p dv = T ds = dh - \frac{1}{\rho} dp = c_p dT - \frac{\beta T}{\rho} dp. \quad (34)$$

Mit

$$c_p := \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad \beta := -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (35)$$

wird die spezifische isobare Wärmekapazität und der thermische Expansionskoeffizient bezeichnet. Der erste Hauptsatz wird dann zu

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi - \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad \Phi := \sigma'_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (36)$$

Hier bezeichnet Φ die *Dissipationsfunktion*, die die pro Zeit- und Volumeneinheit durch innere Reibung irreversibel in Wärme dissipierte mechanische Energie darstellt.

3.4 Zusammenstellung der Grundgleichungen in differentieller Form

Voraussetzung für ihre Verwendung ist die *Differenzierbarkeit* der Feldgrößen.

$$\text{Massenbilanz: } \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (37)$$

$$\text{Impulsbilanz: } \rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
\text{Leistungsbilanz: } \rho \left(\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) &= \rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp}{Dt} \\
&= \sigma'_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i},
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\text{Massenfeste Zeitableitung: } \frac{D\cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + v_k \frac{\partial \cdot}{\partial x_k} \tag{40}$$

Um dieses aus den 5 Gleichungen (37)-(39) bestehende gekoppelte partielle Differentialgleichungssystem für die 6 Unbekannten ρ , v_i , p , T schließen – und damit lösen – zu können, benötigt man neben (i) *Rand- und Anfangsbedingungen* auch (ii) *Material- (konstitutive) Gleichungen*, welche σ'_{ij} und q_i mit den Unbekannten in Beziehung setzen, sowie (iii) eine *thermische Zustandsgleichung* $p = p(\rho, T)$ und eine *kalorische Zustandsgleichung* $e = e(\rho, T)$ oder $h = h(p, T)$.

3.5 Bernoulli-Gleichung

Sie ist einer der bekanntesten und für die 'Praxis' wichtigsten Gleichungen der Strömungsmechanik. Für deren Herleitung gehen wir von der differentiellen Form der Bewegungsgleichung (38) für *inkompressible, reibungsfreie Strömung* im Erdschwerefeld aus und integrieren entlang einer Stromlinie. Mit

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \quad (41)$$

und der Definition des Einheitsvektors \mathbf{e} in \mathbf{v} -Richtung, der Stromlinien-Bogenlänge s , der Wahl der Erdbeschleunigung in negativer $x_2 = y$ -Richtung sowie den Beziehungen

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}| = v(s, t), \quad \mathbf{e} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial s}, \quad g_i = -g \frac{\partial y}{\partial x_i}, \quad |\mathbf{g}| = g \quad (42)$$

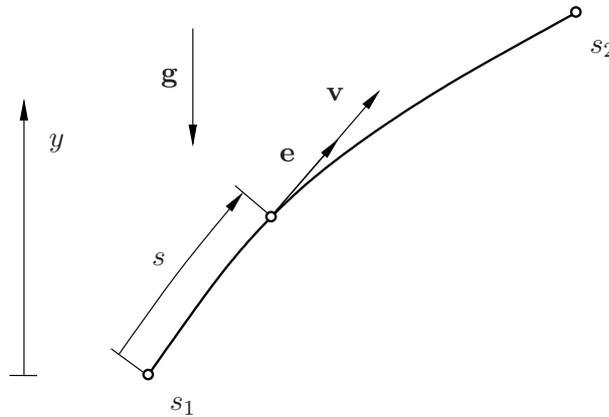


Abbildung 3: Zustandsänderung entlang einer Stromlinie.

ergibt die Projektion der Bewegungsgleichung auf die Stromlinie (Bildung des Skalarproduktes von (41) mit \mathbf{e})

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial y}{\partial s}$$

unter Verwendung von

$$e_i \frac{\partial v_i}{\partial t} = e_i \frac{\partial v e_i}{\partial t} = \underbrace{e_i e_i}_1 \frac{\partial v}{\partial t} + e_i v \frac{\partial e_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(e_i e_i = 1) = 2e_i \frac{\partial e_i}{\partial t} = 0.$$

Integration entlang der Stromlinie ergibt die *Bernoulli-Gleichung*

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g y_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g y_1, \quad (43)$$

welche eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeitsbeträgen $v(s, t)$ und Drücken $p(s, t)$ an verschiedenen Stellen *ein-und-derselben* Stromlinie in Abhängigkeit der Zeit herstellt. Eine übliche Erweiterung besteht in der Berücksichtigung von Druckverlusten (z.B. durch Reibung) in Form sog. ζ -Werte, siehe hierzu [7] und [4].

Anwendungsbeispiel: Krümmenströmung

Gegeben sei eine *reibungsfreie, stationäre inkompressible* Strömung lt. Abb. 4 mit den Querschnittsflächen A_1 und A_2 , dem Umlenkwinkel α , der Geschwindigkeit v_1 , dem Umgebungsdruck p_2 und der Fluiddichte ρ . Gesucht sind die Strahlaustrittsgeschwindigkeit v_2 , der Druck p_1 und die Haltekraft \mathbf{K} des Krümmers in der Flanschverbindung.

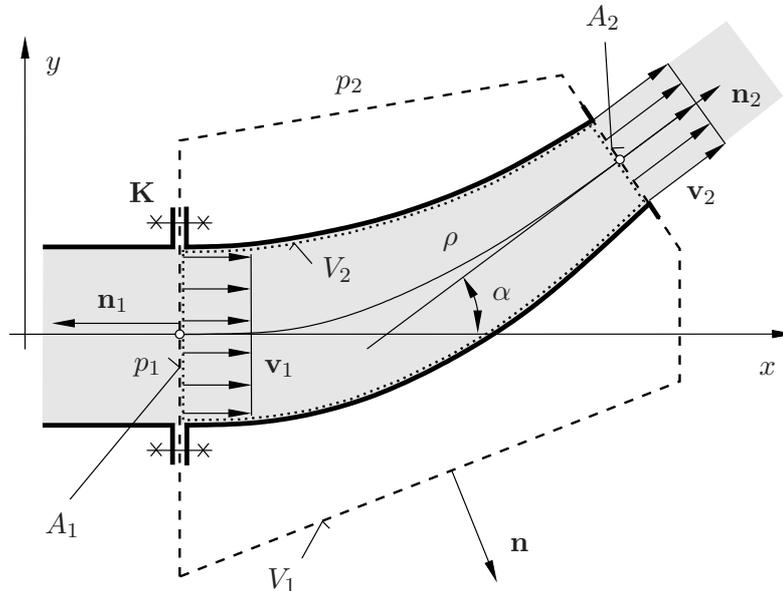


Abbildung 4: Umlenkung eines Fluidstrahles.

Für *raumfest* gewählte Kontrollvolumina $V = (V_1, V_2)$ folgt aus dem Transporttheorem (21) für stationäre Strömung

$$\frac{D}{Dt} \int_V b dV = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V b dV}_0 \text{ (stationär)} + \oint_{\partial V} b (\mathbf{v} - \underbrace{\mathbf{w}}_{\mathbf{0} \text{ (raumfest)}}) \cdot \mathbf{n} dO.$$

Zur Bestimmung von v_2 verwenden wir die Massenbilanz

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0 = \oint_{\partial V} \rho \underbrace{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}_{v_n} dO. \quad (44)$$

Mit

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{v}_2 = v_2 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

ergibt sich nur an der Ein- und Austrittsfläche des Krümmers ein nichtverschwindendes v_n :

$$v_{n1} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -v_1, \quad v_{n2} = v_2.$$

Die Auswertung des Oberflächenintegrals in (44) ergibt

$$\rho(-v_1)A_1 + \rho v_2 A_2 = 0.$$

Offensichtlich ist für jeden Krümmerschnitt der *Massenstrom* $\dot{m} := \rho v A = \text{const}$ und, da $\rho = \text{const}$, auch der *Volumenstrom* $\dot{V} := v A = \text{const}$. Wir erhalten

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}.$$

Zur Bestimmung von p_1 wenden wir die Bernoulli-Gleichung (43) für stationäre Strömung auf eine Stromlinie zwischen Ein- und Austrittsquerschnitt an und vernachlässigen die hydrostatische Höhendifferenz $y_2 - y_1$ (im Freistrahls herrscht Umgebungsdruck p_2):

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const} : \quad p_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = p_2 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right).$$

Die Haltekraft \mathbf{K} ermitteln wir unter Vernachlässigung der Gewichtskraft von Krümmer und Fluid aus der Impulsbilanz (26) für V_1

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_1} \rho v_i dV = \oint_{\partial V_1} \rho v_i v_n dO = \oint_{\partial V_1} \underbrace{\sigma_{ji} n_j}_{-p n_i} dO + \underbrace{\int_{V_1} \rho g_i dV}_{\text{vernachl.}} + K_i.$$

Mit

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_1} \rho \mathbf{v} v_n dO &= \rho \mathbf{v}_1 (-v_1) A_1 + \rho \mathbf{v}_2 v_2 A_2 = -\rho v_1^2 A_1 \mathbf{e}_x + \rho v_1^2 \frac{A_1^2}{A_2} (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y), \\ \oint_{\partial V_1} p \mathbf{n} dO &= p_1 \mathbf{n}_1 A_1 + p_2 \int_{\partial V_1 - A_1} \mathbf{n} dO = p_1 \mathbf{n}_1 A_1 + p_2 \underbrace{\oint_{\partial V_1} \mathbf{n} dO}_{\mathbf{0}} - p_2 \mathbf{n}_1 A_1 = \\ &= (p_1 - p_2) A_1 \mathbf{n}_1 = -\frac{\rho v_1^2}{2} \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) A_1 \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

erhält man

$$\mathbf{K} = -\frac{\rho v_1^2}{2} A_1 \left[\left(1 + \frac{A_1^2}{A_2^2} \right) \mathbf{e}_x - 2 \frac{A_1}{A_2} (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) \right].$$

Für das Kontrollvolumen V_2 entlang der Krümmerrinnenwand wird *keine* Haltekraft freigeschnitten, es ergibt sich für die resultierende Kraft \mathbf{R} , welche vom Fluid auf die Krümmerrinnenwand ausgeübt wird

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_2} \rho \mathbf{v} v_n dO &= \text{wie oben}, \\ \oint_{\partial V_2} p \mathbf{n} dO &= \underbrace{\int_{\text{Mantelfl.}} p \mathbf{n} dO}_{\mathbf{R}} + p_1 \mathbf{n}_1 A_1 + p_2 \mathbf{n}_2 A_2, \\ \mathbf{R} &= \rho v_1^2 A_1 \mathbf{e}_x - \rho v_1^2 \frac{A_1^2}{A_2} (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) + p_1 A_1 \mathbf{e}_x - p_2 A_2 (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) \\ &= -\mathbf{K} + p_2 [A_1 \mathbf{e}_x - A_2 (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y)]. \end{aligned}$$

4 Kinematik der Deformation

Wir zerlegen den *Geschwindigkeitsgradienten* $(\partial v_j / \partial x_i)$ in einen *symmetrischen* und *antisymmetrischen* (schiefsymmetrischen) Tensor (D_{ij}) und (Ω_{ij}) :

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = D_{ij} + \Omega_{ij}, \quad (45)$$

$$D_{ij} = D_{ji} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right),$$

und fragen nach deren jeweiliger Bedeutung. Sei dx ein Bogenelement der Teilchenbahn (1), dann ist

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (dx_i) &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j, \\ \frac{D}{Dt} (dx^2) &= \frac{D}{Dt} (dx_i dx_i) = 2 dx_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = dx_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j + \underbrace{dx_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx_i}_{\text{Indizes vert.}} \\ &= dx_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx_j = 2 dx_i D_{ij} dx_j. \end{aligned} \quad (46)$$

Demnach ist (D_{ij}) ein Maß für die Dehnung von dx^2 bei der Fluidbewegung und wird daher *Deformationsraten-* oder *Verformungsgeschwindigkeitstensor* genannt. Eine *starre* Bewegung ist durch $dx = const$ gekennzeichnet; eine notwendige und hinreichende Bedingung für momentan und lokal starre Bewegung ist folglich $(D_{ij}) = 0$. Falls $(D_{ij}) \equiv 0$ überall im Fluid gilt, handelt es sich im Allgemeinen um eine aus Rotation (Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi} = const$, Radiusvektor \mathbf{r}) und Translation ($\mathbf{v}_0 = const$) zusammengesetzte Starrkörperbewegung

$$\mathbf{v} = \dot{\phi} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_0. \quad (47)$$

Folgende Aussagen sind gleichwertig: (i) (D_{ij}) ist symmetrisch, (ii) (D_{ij}) ist diagonalähnlich (diagonalisierbar), d.h. es existiert eine orthogonale Matrix O ($O^T = O^{-1}$), mit der gilt

$$\Lambda = O^T D O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

dabei sind die Eigenwerte $\lambda_i(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ von D die Hauptdehnungen und die zugehörigen Eigenvektoren die Hauptachsen der Dehnung.

Die lokale Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$ einer allgemeinen Fluidbewegung erweist sich als dualer Vektor zu (Ω_{ij}) ,

$$\dot{\phi}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk}, \quad (48)$$

dabei bezeichnet ε_{ijk} den Levi–Civita Permutations-Tensor

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine gerade ... ,} \\ -1, & \text{eine ungerade ... ,} \\ 0, & \text{keine Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist.} \end{cases} \quad (49)$$

Überschiebung von (48) mit ε_{ilm} ergibt

$$\varepsilon_{ilm} \dot{\phi}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} = \frac{1}{2} (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) \Omega_{jk} = \frac{1}{2} (\Omega_{lm} - \underbrace{\Omega_{ml}}_{-\Omega_{lm}}) = \Omega_{lm}.$$

Die Verwendung der Definition von Ω_{jk} in (48) führt auf

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{4} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ikj} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})_i = \frac{\omega_i}{2}, \end{aligned}$$

hier wird mit $\omega(\mathbf{x}, t)$ die *Wirbelstärke*

$$\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{v} \quad (50)$$

eingeführt. Gilt $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ (d.h. auch $(\Omega_{jk}) = 0$) lokal oder auch in einem bestimmten Bereich, dann ist dort die Fluidbewegung eine reine Dehnung, sie wird *drehungsfrei* bezeichnet. In diesem Fall läßt sich das Strömungsfeld durch ein *Geschwindigkeitspotential* $\Phi(\mathbf{x}, t)$ beschreiben,

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} : \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi, \quad (51)$$

da $\nabla \times \nabla \Phi = \mathbf{0}$ gilt. Ist $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$, dann heißt die Strömung *drehungsbehaftet*, sinngemäß wird (Ω_{ij}) *Rotationsratentensor* genannt.

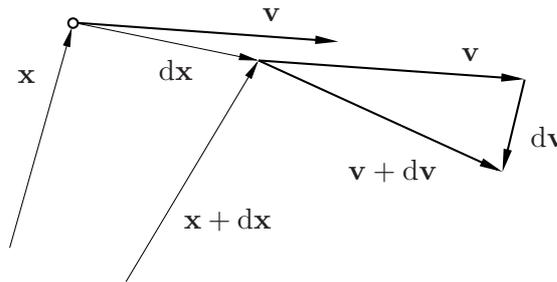


Abbildung 5: Instantane, lokale Betrachtung einer allgemeinen Fluidbewegung.

Betrachten wir eine allgemeine Fluidbewegung in der Umgebung eines festen Raumpunktes \mathbf{x} zum festen Zeitpunkt t , Abb. 5; es gilt die Entwicklung

$$\begin{aligned} v_j(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) &\sim v_j(\mathbf{x}, t) + dv_j(\mathbf{x}, t) + O(dx^2) = v_j(\mathbf{x}, t) + dx_i \left. \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}, t} + O(dx^2) \\ &= v_j(\mathbf{x}, t) + dx_i D_{ij}|_{\mathbf{x}, t} + dx_i \Omega_{ij}|_{\mathbf{x}, t} + O(dx^2). \end{aligned} \quad (52)$$

Mit

$$dx_i \Omega_{ij} = \varepsilon_{kij} dx_i \dot{\phi}_k = -\varepsilon_{jik} dx_i \dot{\phi}_k = -(\mathbf{dx} \times \dot{\boldsymbol{\phi}})_j = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \times \mathbf{dx} \right)_j$$

wird

$$v_j(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, t) \sim \underbrace{v_j(\mathbf{x}, t)}_{(i)} + \underbrace{dx_i D_{ij}|_{\mathbf{x}, t}}_{(ii)} + \underbrace{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \times \mathbf{dx} \right)_j}_{(iii)} \Big|_{\mathbf{x}, t} + O(dx^2). \quad (53)$$

Demnach setzt sich – lokal und instantan betrachtet – die allgemeine, kontinuierliche Bewegung eines Fluides aus einer *Translation* (i), einer *Dehnung* (ii) bezüglich der Hauptachsen von (D_{ij}) und einer *Starrkörperrotation* (iii) dieser Achsen mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega}/2$ zusammen. Aus dieser nach Euler, Cauchy und Stokes benannten Zerlegung wird klar, dass viskose Spannungen in einem Strömungsfeld, ausgedrückt durch den Reibspannungstensor (σ'_{ij}) , *ausschließlich* von $(D_{ij}) \neq 0$ verursacht werden können.

5 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Die zeitliche Änderung der Entropie bei der Verfolgung eines Fluidpartikels wird durch die Leistungsbilanz (36) beschrieben,

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\Phi - \nabla \cdot \mathbf{q}}{T}, \quad \Phi = \sigma'_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

dabei ist $(\Phi - \nabla \cdot \mathbf{q})/T$ die Änderung der Entropie des Teilchens durch Dissipation von mechanischer Energie und Wärmeleitung. Wird obige Gleichung über ein mit der Strömung massenfest mitbewegtes Volumen integriert, ergibt sich unter Verwendung des Transporttheorems (25) und des Gaußschen Integralsatzes

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{Ds}{Dt} dV &= \frac{D}{Dt} \int_V \rho s dV = \int_V \left(\frac{\Phi}{T} - \underbrace{\frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T}}_{\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2}} \right) dV \\ &= \int_V \left(\frac{\Phi}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} \right) dV - \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dO. \end{aligned} \quad (54)$$

Betrachten wir weiters den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik $dS = \rho s dV \geq d'Q/T$ in der Formulierung von Clausius–Duhem: für ein massenfestes Kontrollvolumen gilt die Ungleichung

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho s dV \geq - \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dO. \quad (55)$$

Danach kann die Entropie in einem System V mit adiabatischen Zustandsänderungen (dabei ist das System thermisch isoliert, d.h. es erfolgt kein Wärmeaustausch mit der Umgebung $d'Q = 0$ bzw. $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ durch die Systemgrenze ∂V) nur zunehmen (bei irreversiblen Prozessen) bzw. höchstens gleich bleiben (bei reversiblen Vorgängen). Der Vergleich von (54) und (55) liefert

die Entropieproduktion $\dot{\sigma}$

$$\rho \dot{\sigma} := \frac{\Phi}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} \geq 0. \quad (56)$$

Hinreichend für die Erfüllung dieser Beziehung sind offensichtlich

$$\Phi \geq 0, \quad \mathbf{q} \cdot \nabla T \leq 0, \quad (57)$$

welche die Erfahrung widerspiegeln, dass (i) durch innere Reibung mechanische Energie irreversibel in thermische Energie dissipiert wird und (ii) der Wärmestromvektor \mathbf{q} immer in die Richtung vom höheren zum niedrigeren Temperaturniveau zeigt.

Nach einem Grundpostulat der Thermodynamik irreversibler Prozesse bestehen *lineare* Zusammenhänge (phänomenologische Gesetze) zwischen den (verallgemeinerten) Kräften und Flüssen. Anders ausgedrückt: ein aus dem thermodynamischen Gleichgewicht (schwach!) ausgelenktes System fällt mit einer dem Abstand zum Gleichgewicht proportionalen Rate in den Gleichgewichtszustand zurück.

Im vorliegenden Fall gilt entsprechend

$$\text{Fluss} \begin{Bmatrix} (\sigma'_{ij}) \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \text{lineare Funktion der Kraft} \begin{Bmatrix} (D_{ij}) \\ \nabla T \end{Bmatrix}, \quad (58)$$

die Zusammenhänge werden Cauchy–Poissonsches Viskositäts- und Fouriersches Wärmeleitungsgesetz genannt.

6 Navier–Stokes Gleichungen

Die Aufstellung der Gleichungen erfolgt hier über einen *rein kontinuumsmechanischen* Zugang, völlig unabhängig von der molekularen Natur des Fluides. Ein alternativer Ausgangspunkt wäre die Boltzmann-Gleichung (Chapman–Enskog-Entwicklung).

Ziel ist zunächst das Auffinden konstitutiver Gleichungen für den Spannungstensor (σ_{ij}) und den Wärmestrom \mathbf{q} .

Ein *perfektes Fluid* ist gekennzeichnet durch

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}, \quad \sigma'_{ij} \equiv 0. \quad (59)$$

Für ein viskoses, *Stokessches Fluid* fordern wir die Gültigkeit von (Stokessche Postulate):

- (i) (σ_{ij}) ist eine stetige Funktion von (D_{ij}), unabhängig von anderen kinematischen Größen,
- (ii) (σ_{ij}) hängt nicht explizit von der räumlichen Position \mathbf{x} ab (räumliche Homogenität),
- (iii) es existiert keine ausgezeichnete Richtung im Raum (Isotropie),
- (iv) falls (D_{ij}) = 0, dann gelte $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$.

Die mathematische Übersetzung von (i) und (ii) ist

$$\sigma = f(D),$$

(iii) drückt sich durch

$$O\sigma O^{-1} = f(ODO^{-1})$$

für alle orthogonalen Transformationsmatrizen O aus. Der Vollständigkeit halber sollte erwähnt werden, dass σ im Allgemeinen auch vom thermodynamischen Zustand p und T abhängt.

Es lässt sich zeigen (Satz von Rivlin–Ericksen, hier ohne Beweis), dass (i)–(iv) auf die nichtlineare (quadratische) Relation

$$\sigma_{ij} = \alpha \delta_{ij} + \beta D_{ij} + \gamma D_{ik}D_{kj} \quad (60)$$

führt, wobei die drei unabhängigen Größen $\alpha = \alpha(I_1, I_2, I_3)$, $\beta = \dots$ etc. skalare Funktionen der Hauptinvarianten I_1 , I_2 und I_3 von D sind. Die Hauptinvarianten sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$p_D(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - D) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

für die Eigenwerte λ_1 , λ_2 und λ_3 von D . Es gilt

$$I_1 = \text{sp } D = D_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{sp } D)^2 - \text{sp } D^2] = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3,$$

$$I_3 = \det D = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Erheben wir die zusätzliche Forderung (58) einer *linearen* Abhängigkeit $\sigma = f(D)$, erhalten wir (o.B.) die Materialgleichung für ein *Newtonsches Fluid*

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = (-p + \bar{\mu} \nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}, \quad (61)$$

welches als Cauchy–Poissonsches Gesetz bezeichnet wird. Die verbleibenden zwei unabhängigen Materialparameter werden *Volumenviskosität* (zweite *Zähigkeit*) $\bar{\mu}(p, T)$ und *dynamische Viskosität* (*Scherviskosität*) $\mu(p, T)$ genannt und sind, wie vorher angedeutet, Funktionen des thermodynamischen Zustandes. Bei inkompressibler Strömung $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ reduziert sich die Abhängigkeit auf $\mu = \mu(T)$.

Die Auswertung der Spur des Spannungstensors

$$\text{sp } \sigma = \sigma_{ii} = (-p + \bar{\mu} \nabla \cdot \mathbf{v}) \underbrace{\delta_{ii}}_3 + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{v} = -3p + (3\bar{\mu} + 2\mu) \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (62)$$

legt die Definition eines *mittleren Druckes* \bar{p} nahe,

$$\bar{p} = -\frac{\sigma_{ii}}{3} = p - \mu_B \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \mu_B = \bar{\mu} + \frac{2}{3} \mu, \quad (63)$$

die Größe μ_B nennt man *Kompressionszähigkeit*. Bei kompressibler Strömung ist p der *thermodynamische* Druck im Gegensatz zu den Verhältnissen bei inkompressibler Strömung: dort ist p *keine* thermodynamische Variable sondern muß für viskose Fluide erst – unter Berücksichtigung des Stokesschen Postulates (iv) – definiert werden: man wählt der Einfachheit halber in (60) $\alpha \equiv -p = \sigma_{ii}/3$.

Gleichheit von \bar{p} und p erhält man bei (i) inkompressibler Strömung $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ oder der (ii)

Stokesschen Hypothese $\mu_B = 0$, welche sich nur für einatomige Gase als gültig erweist. Für mehratomige Gase gilt im Allgemeinen $\mu_B > 0$.

Für Newtonsche Fluide, auf die wir uns im weiteren beschränken wollen, ist der Reibspannungstensor wegen (61) und (28) durch

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji} = \bar{\mu} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (64)$$

gegeben. Die Kombination der Impulsbilanz (29) mit (64) ergibt die *Navier–Stokesschen Bewegungsgleichungen* für kompressible Strömung

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\mu} \nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu D_{ij}) + \rho g_i. \quad (65)$$

Für ein perfektes Fluid (59) erhält man die *Euler-Gleichungen*

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i, \quad (66)$$

und für die oft anzutreffende Spezialisierung auf ein inkompressibles Newtonsches Fluid mit konstanten Stoffwerten $\rho, \mu = \text{const}$ die Navier–Stokesschen Gleichungen in der Form

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i. \quad (67)$$

Dabei wurde die *kinematische Zähigkeit* $\nu = \mu/\rho$ eingeführt.

Wegen der nichtlinearen Konvektionsterme $v_j \partial v_i / \partial x_j$ lassen sich die Navier–Stokesschen Gleichungen nur für wenige, spezielle Fälle analytisch lösen. Meist ist man auf numerische und/oder störungstheoretische Lösungsmethoden angewiesen. Die Nichtlinearität macht die Analyse des Lösungsverhaltens insbesondere auch mathematisch interessant, beispielsweise ist bis heute nicht geklärt, ob glatte, beschränkte Anfangsdaten im unberandeten \mathbb{R}^3 für jeden späteren Zeitpunkt beschränktes Lösungsverhalten nach sich ziehen oder ob die durch (67) beschriebene Evolution Singularitäten der Feldgrößen nach endlicher Zeit zulässt (finite time blow-up, siehe: Millennium Problems of the Clay Mathematics Institute, <http://www.claymath.org/millennium/>).

Wendet man den Rotationsoperator $\varepsilon_{rsi} \partial / \partial x_s$ auf Gleichung (67) an und berücksichtigt die Vektoridentitäten

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad \nabla \times \nabla p = 0,$$

dann erhält man mit der Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ die *Wirbeltransportgleichung*

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (68)$$

In dieser Gleichung scheint nur mehr das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} auf, der Druck wurde eliminiert. Der erste Term auf der rechten Gleichungsseite beschreibt die Wirbelstreckung, welche für ebene Strömung wegen $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla = 0$ verschwindet (die Wirbeltransportgleichung hat dann die Form einer Konvektions-Diffusionsgleichung), der zweite Term ist die Wirbeldissipation.

Das *Fouriersche Wärmeleitungsgesetz*

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (69)$$

stellt einen linearen phänomenologischen Zusammenhang zwischen Wärmestrom und Temperaturgradienten her, aus (57) folgt für die *Wärmeleitfähigkeit* $\lambda(p, T) \geq 0$. Zusammen mit dem Reibspannungstensor (64) erhält man mit (39) die Leistungsbilanz für Newtonsche Fluide

$$\rho \left(\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \Phi + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (70)$$

wobei die Dissipationsfunktion (36) mit (45), (57) unter Beachtung der Symmetrien von σ'_{ij} , D_{ij} und Ω_{ij} durch

$$\Phi = \sigma'_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sigma'_{ij} D_{ij} = \bar{\mu} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu D_{ij} D_{ij} \geq 0 \quad (71)$$

gegeben ist, woraus man weiters auf (o.B.)

$$\mu \geq 0, \quad \bar{\mu} + \frac{2}{3} \mu = \mu_B \geq 0 \quad (72)$$

schließen kann. Bemerkenswert ist die quadratische Abhängigkeit der Dissipationsfunktion vom Geschwindigkeitsgradienten (welche im Materialgesetz (60) vernachlässigt wurde), d.h. Strömungsverluste sind in vielen Fällen klein und damit in führender Ordnung oft vernachlässigbar.

An festen, undurchlässigen Berandungen eines Strömungsfeldes wird üblicherweise die *Haftbedingung*

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_w = \mathbf{0} \quad (73)$$

vorgeschrieben, \mathbf{v}_w bezeichnet dabei die Geschwindigkeit der Berandung. Die Haftbedingung läßt sich nicht streng ableiten, sie gilt erfahrungsgemäß bei mittleren Drücken und relativ geringen Tangentialflächenspannungen. Bei niedrigen Drücken ist das Vorschreiben einer *Gleitbedingung*

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_w) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{v} - \mathbf{v}_w) \cdot \mathbf{t} \neq 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (74)$$

angemessener (z.B. Wiedereintritt von Flugkörpern in die Erdatmosphäre). Sei mit $F(\mathbf{x}, t) = 0$ die freie Oberfläche eines Fluids beschrieben (z.B. zum Studium der Wellenbewegung auf einer Wasseroberfläche). Dann ist die Normalgeschwindigkeit dieser Oberfläche durch

$$-\frac{\partial F / \partial t}{|\nabla F|}$$

gegeben. Andererseits gilt für die Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit dort

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla F}{|\nabla F|},$$

was auf die *kinematische Verträglichkeitsbedingung*

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0 \quad (75)$$

führt. Sie bringt zum Ausdruck, dass die freie Oberfläche immer aus den selben Fluidteilchen besteht. Weiters sind an ausgezeichneten Stellen des Strömungsfeldes im Allgemeinen *dynamische Verträglichkeitsbedingungen* zu erfüllen, siehe Kap. 8.

7 Wirbelsätze

Eine *Wirbellinie* ist eine Kurve, die in jedem Punkt tangential zu $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ ist. Ein *Wirbelfaden* ist eine Röhre, die aus Wirbellinien gebildet wird. Gemäß Abb. 6 gilt unter Verwendung des Satzes von Schwarz (Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge)

$$\begin{aligned} \oint_O \omega_i n_i dO &= \int_V \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dV = \int_V \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j}}_{-\varepsilon_{jik} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_i} = 0} dV = 0 \\ &= \int_{A_1} \omega_i n_i dO + \int_{A_2} \omega_i n_i dO + \int_M \underbrace{\omega_i n_i}_{0} dO, \end{aligned}$$

für eine beliebige Querschnittsfläche A des Wirbelfadens daher

$$\int_A \omega_i n_i dO = \text{const.} \quad (76)$$

Nach diesem 1. *Wirbelsatz von Helmholtz* ist der Fluß der Wirbelstärke entlang eines Wirbelfadens konstant, was zur Folge hat, dass der Wirbelfaden entweder geschlossen sein muß (z.B. Rauchring) oder an einer Grenzfläche enden muß (z.B. Tornado).

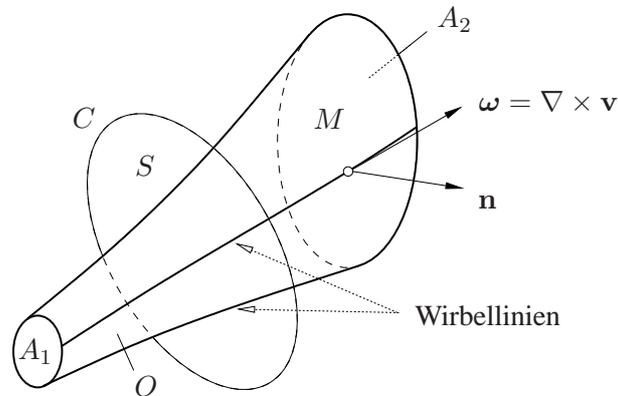


Abbildung 6: Bezeichnungen am Wirbelfaden: Querschnittsflächen A_1 , A_2 , Mantelfläche M , Gesamtoberfläche $O = A_1 + A_2 + M$.

Die *Zirkulation* einer geschlossenen Kurve C ist durch

$$\Gamma := \oint_C v_i dx_i = \int_S (\nabla \times \mathbf{v})_i n_i dO = \int_S \omega_i n_i dO \quad (77)$$

definiert und kann über den Stokeschen Integralsatz in den Fluß der Wirbelstärke durch die von C begrenzte Fläche S ausgedrückt werden, Abb. 6. Folglich nimmt die Zirkulation für jede beliebige geschlossene Kurve, die einen Wirbelfaden umschließt, den selben Wert an, $\Gamma = \text{const}$ (2. *Helmholtzscher Wirbelsatz*). Liegt die Kurve C auf der Manteloberfläche M , ist $\Gamma = 0$ ($\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{n}$).

Für die massenfeste Zeitableitung der Zirkulation einer massenfesten Kurve $C(t)$ mit der Anfangsbedingung $C(t=0) = C_0$ gilt unter Beachtung von (1) und der Verwendung der Impulsbilanz (29) für ein perfektes Fluid ($\sigma'_{ij} = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \oint_C v_i dx_i = \oint_{C_0} \frac{D}{Dt} \left(\bar{v}_i \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \right) = \oint_{C_0} \left(\bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial X_j} dX_j + \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{D\bar{v}_i}{Dt} dX_j \right) \\ &= \underbrace{\oint_C d\left(\frac{v_i v_i}{2}\right)}_0 + \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dx_i = - \underbrace{\oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i}_{dp/\rho} + \underbrace{\oint_C g_i dx_i}_0 \text{ (kons. Kraftfeld)} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Entropiedefinition (34), $T ds = dh - dp/\rho$, ergibt sich der *Thomsonsche Satz* (Kelvinsches Zirkulations-Theorem)

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C T ds - \underbrace{\oint_C dh}_0 \text{ (thermodyn. Potential)} \quad (78)$$

Demnach bleibt die Zirkulation einer massenfesten Kurve in einer reibungslosen, isentropen Strömung konstant (Erhaltung der Zirkulation, z.B. Anfahrwirbel eines Tragflügels).

Zur Bestimmung eines Zusammenhanges zwischen Wirbelstärke ω und Entropiegradient gehen wir von der Leistungsbilanz (31) für ein perfektes Fluid ohne Wärmeleitung und Schwerkrafteinfluß, $\sigma'_{ij} = 0$, $g_i = 0$, $q_i = 0$, aus und verwenden die Massenbilanz (24):

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} + e \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (-v_i p \delta_{ij}) = -v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} - p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -\frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Unter Verwendung von $h = e + p/\rho$ erhält man daraus

$$\underbrace{\left[\frac{De}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} \right) \right]}_{Dh/Dt} = \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v_i v_i}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (79)$$

für stationäre Strömungen gilt daher

$$\frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v_i v_i}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad h + \frac{v_i v_i}{2} = C = const \quad (80)$$

entlang einer Stromlinie (vergl. Energiesatz für Stromfaden (160)). Falls für alle Stromlinien die spezifische Ruheenthalpie den gleichen Wert $C = h_0$ hat, spricht man von *isoenergetischer* Strömung. Mit der Umformung

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}}_{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_j v_j}{2} \right)} + v_j \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{2\Omega_{ji} = \varepsilon_{kji} (\nabla \times \mathbf{v})_k}$$

wird unter Verwendung der Impulsbilanz (29) und der Entropiedefinition $T ds = dh - dp/\rho$

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_j v_j}{2} \right) - \varepsilon_{ijk} v_j \omega_k = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = T \frac{\partial s}{\partial x_i} - \frac{\partial h}{\partial x_i},$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h + \frac{v_j v_j}{2} \right) - (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})_i = T \frac{\partial s}{\partial x_i}.$$

Für eine stationäre, isoenergetische Strömung erhält man daraus den *Croccoschen Wirbelsatz*

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = T \nabla s. \quad (81)$$

Die Folgerungen sind: (i) jede anisentrope, isoenergetische, stationäre Strömung ist drehungsbehaftet, (ii) jede drehungsfreie, isoenergetische, stationäre Strömung ist isentrop, (iii) ebene, isentrope, isoenergetische, stationäre Strömung ist drehungsfrei ($\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}$, d.h. falls $\nabla s = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega} = 0$); dreidimensionale Strömung mit $\nabla s = 0$ ist drehungsbehaftet, falls $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}$ (Beltrami-Strömung, z.B. Rohrströmung mit axialem Wirbel).

8 Sprungbedingungen

Da die Differenzierbarkeit der Feldgrößen hier voraussetzungsgemäß nicht gegeben ist, verwenden wir die Erhaltungssätze in integraler Form. Mit Hilfe des Transporththeorems (21) für ein mit der Geschwindigkeit \mathbf{w} beliebig bewegtes Kontrollvolumen

$$\frac{d}{dt} \int_V b dV = \frac{D}{Dt} \int_V b dV - \oint_{\partial V} b (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dO$$

und der allgemeinen Form eines Erhaltungssatzes

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV = \int_V \rho \Psi dV + \oint_{\partial V} \Sigma dO - \oint_{\partial V} \theta \phi dO \quad (82)$$

ergeben sich mit der Definition der Massenstromdichte

$$\theta := \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \quad (83)$$

die Zuordnungen

	Dichte $\rho\phi$	Kraft $\rho\Psi$	Fluss Σ
Massenbilanz (23)	ρ	0	0
Impulsbilanz (26)	ρv_i	ρg_i	$\sigma_{ij} n_j$
Leistungsbilanz (30)	$\rho \left(e + \frac{v_i v_i}{2} \right)$	$\rho v_i g_i$	$v_i \sigma_{ij} n_j - q_i n_i$
2. Hauptsatz (55)	ρs	0	$-\frac{q_i n_i}{T}$

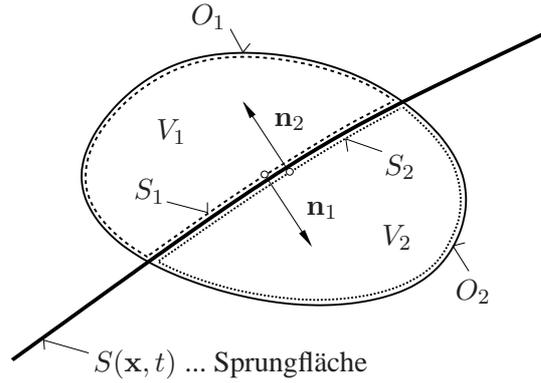


Abbildung 7: Bezeichnungen für die Ableitung der Sprungbedingungen.

Nach Abb. 7 gilt für das mit der Sprungfläche $S(\mathbf{x}, t)$ und der Geschwindigkeit $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = -\partial S/\partial t/|\nabla S|$ mitbewegte Kontrollvolumen V

$$V = V_1 + V_2, \quad \partial V = O_1 + O_2, \quad (84)$$

und für die Einzelvolumina nach (82)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_1} \rho \phi \, dV &= \int_{V_1} \rho \Psi \, dV + \oint_{O_1+S_1} \Sigma \, dO - \oint_{O_1+S_1} \theta \phi \, dO, \\ \frac{d}{dt} \int_{V_2} \rho \phi \, dV &= \int_{V_2} \rho \Psi \, dV + \oint_{O_2+S_2} \Sigma \, dO - \oint_{O_2+S_2} \theta \phi \, dO. \end{aligned}$$

Die Summe obiger Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \phi \, dV &= \int_V \rho \Psi \, dV + \oint_{\partial V} \Sigma \, dO - \oint_{\partial V} \theta \phi \, dO \\ &+ \int_{S_1} \Sigma \, dO + \int_{S_2} \Sigma \, dO - \int_{S_1} \theta \phi \, dO - \int_{S_2} \theta \phi \, dO, \end{aligned}$$

wegen $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 \equiv \mathbf{n}$ weiters

$$\int_{S_1} (\Sigma_1 - \Sigma_2) \, dO - \int_{S_1} (\theta_1 \phi_1 - \theta_2 \phi_2) \, dO = 0.$$

Mit der Definition des *Sprunges* einer beliebigen Feldgröße

$$\{b\} := b_2 - b_1 \quad (85)$$

kann man

$$\int_{S_1} \{\Sigma\} \, dO = \int_{S_1} \{\theta \phi\} \, dO$$

schreiben. Da diese Beziehung für jedes beliebige Teilstück der Sprungfläche S gilt, ergibt sich

$$\{\Sigma\} = \{\theta\phi\}. \quad (86)$$

Diese *dynamische Verträglichkeitsbedingung* (Sprungbeziehung, Kotchinesches Theorem) wird dazu benötigt, die Lösungen der Differentialgleichungen in den Teilgebieten 1 und 2 vor und nach der Sprungfläche zu einer mit den physikalischen Grundprinzipien verträglichen Gesamtlösung zusammensetzen zu können.

Die Auswertung von (86) für die Massenbilanz liefert Stetigkeit der Massenstromdichte θ über die Sprungstelle

$$\{\theta\} = 0. \quad (87)$$

Für die Impulsbilanz erhält man unter Berücksichtigung der Stetigkeit von θ und \mathbf{n} sowie der Aufspaltung $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$

$$\{\sigma_{ij}\}n_j = -\{p\}n_i + \{\sigma'_{ij}\}n_j = \{\theta v_i\} = \theta\{v_i\}, \quad (88)$$

für die Leistungsbilanz ergibt sich

$$\{v_i\sigma_{ij}n_j - q_in_i\} = -\{v_ip\}n_i + \{v_i\sigma'_{ij}\}n_j - \{q_i\}n_i = \theta\left\{e + \frac{v_iv_i}{2}\right\}. \quad (89)$$

Die Auswertung für den 2. Hauptsatz führt auf

$$\theta\{s\} \geq -\left\{\frac{q_i}{T}\right\}n_i. \quad (90)$$

Im Folgenden werden zwei wichtige Beispiele von Unstetigkeitsflächen besprochen.

8.1 Kontaktunstetigkeit

Andere Bezeichnungen sind Mediengrenze, Gleitfläche, Entropie-Unstetigkeitsfläche, Wirbelfläche, Tangentiale Unstetigkeit. Das wesentliche Merkmal ist verschwindender Massenstrom durch die Grenzfläche und unterschiedliche Dichte auf beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche

$$\theta \equiv 0, \quad \{\rho\} \neq 0. \quad (91)$$

Aus der Definition der Massenstromdichte (83) und der Stetigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche $\{w_i\} = 0$ folgt die Stetigkeit der Normalkomponente der Geschwindigkeit

$$\{v_i\}n_i = 0, \quad (92)$$

mit der Impulsbilanz weiters die Stetigkeit des Spannungsvektors

$$\{\sigma_{ij}\}n_j = 0, \quad (93)$$

mit der Leistungsbilanz

$$\sigma_{ij}n_j\{v_i\} = \{q_i\}n_i, \quad (94)$$

und aus dem 2. Hauptsatz

$$\left\{\frac{q_i}{T}\right\}n_i \geq 0 \quad (95)$$

für beliebige $\{s\}$. Ist die Kontaktunstetigkeit eine feste Wand, an der Haftbedingung $\mathbf{v} = \mathbf{v}_w \equiv \mathbf{w}$ gilt, folgt damit aus (94) die Stetigkeit der Normalkomponente des Wärmestromvektors

$$\{q_i\} n_i = 0, \quad (96)$$

mit (95) und (100) ergibt sich

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n} (T_1 - T_2) \geq T_1 T_2 > 0, \quad (97)$$

die bekannte Tatsache, dass der Wärmestromvektor vom höheren zum niedrigeren Temperaturniveau zeigt. Für eine adiabate (wärmeisolierte) Wand verschwindet die Normalkomponente des Wärmestromvektors

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (98)$$

8.2 Stoßunstetigkeit

Hier ist

$$\theta \neq 0, \quad \{\rho\} \neq 0. \quad (99)$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$\{ab\} = \{a\}\{b\} + \{b\}\{a\}, \quad \{b\} := \frac{b_1 + b_2}{2} \quad (100)$$

erhält man aus (83), (87)

$$\{\theta\} = 0 = \{\rho\}\{v_i - w_i\}n_i + \{\rho\}\{v_i - w_i\}n_i, \quad (101)$$

und wegen $\{w_i\} = 0$

$$\frac{\{\rho\}}{\{\rho\}} = -\frac{\{v_i\}n_i}{\{v_i - w_i\}n_i},$$

d.h. nichtverschwindenden Geschwindigkeitssprung $\{v_i\} \neq 0$. Aus der Definition von θ folgt

$$\left\{\frac{\theta}{\rho}\right\} = \{v_i\}n_i = \theta \left\{\frac{1}{\rho}\right\},$$

und aus der Impulsbilanz durch Multiplikation mit n_i

$$\{\sigma_{ij}\}n_j n_i = \theta \{v_i\}n_i = \theta^2 \left\{\frac{1}{\rho}\right\}.$$

An der Sprungstelle werden Geschwindigkeits- und, wie wir sehen werden, auch Temperaturgradient unendlich, dort erwartet man daher nicht zu vernachlässigende Dissipation und Wärmeleitung. Für das Folgende betrachten wir trotzdem die Strömung eines *reibungsfreien* Fluids *ohne Wärmeleitung*, d.h. $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, $q_i = 0$, und verschieben die Untersuchung der dissipativen Stoßstruktur auf später, siehe Kap. 13.

Mit $v = 1/\rho$ erhält man $\theta^2 \{1/\rho\} = \theta^2 \{v\} = -\{p\}$ oder

$$\theta^2 = -\frac{\{p\}}{\{v\}} = \tan \alpha > 0, \quad (102)$$

die Gleichung der *dynamischen (Stoß-) Adiabaten*, siehe Abb. 8.

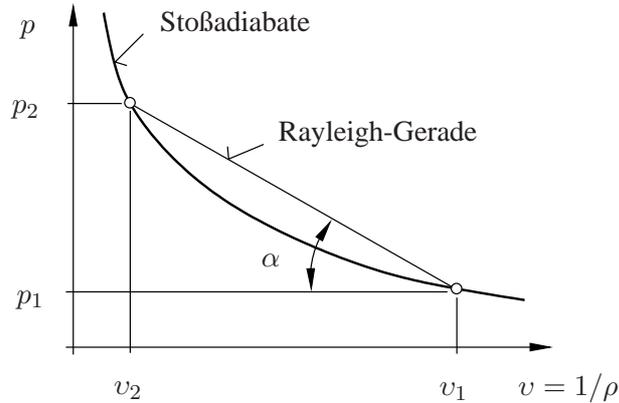


Abbildung 8: Stoßadiabate; die *Rayleigh-Gerade* verbindet Zustände vor und nach dem Stoß.

Danach ist

$$\left. \begin{array}{l} v_2 < v_1 \\ v_2 > v_1 \end{array} \right\} \iff \begin{cases} p_2 > p_1 & \dots \text{ Verdichtungsstoß} \\ p_2 < p_1 & \dots \text{ Verdünnungsstoß.} \end{cases} \quad (103)$$

Die Spezialisierung der Leistungsbilanz (89) ergibt

$$\theta\{e\} + \theta\left\{\frac{v_i v_i}{2}\right\} = -\{v_i p\} n_i, \quad \rightarrow \quad \theta\{e\} + \theta\{v_i\}\{v_i\} = -\{v_i\} \underbrace{\{p\} n_i}_{\theta\{1/\rho\} \text{ (Def. } \theta)} - \{p\} \underbrace{\{v_i\} n_i}_{-\theta\{v_i\} \text{ (IB)}}$$

d.h.

$$\{e\} = -\{p\} \left\{\frac{1}{\rho}\right\} = -\{p\} \{v\}, \quad (104)$$

alternativ mit $e = h - p/\rho$ auch

$$\{h\} = \left\{\frac{1}{\rho}\right\} \{p\} = \{v\} \{p\}. \quad (105)$$

Aus der Spezialisierung der Impulsbilanz $-\{p\} n_i = \theta\{v_i\}$ ergibt sich durch Multiplikation mit dem Tangentialvektor auf der Stoßfläche \mathbf{t}

$$-\{p\} \underbrace{n_i t_i}_0 = \theta\{v_i\} t_i \quad \Rightarrow \quad \{v_i\} t_i = 0 \quad (106)$$

die Stetigkeit der Tangentialkomponenten der Geschwindigkeiten.

Gleichungen (101), (102), (104), (105) und (106) sind die *Rankine–Hugoniotschen Stoßbeziehungen* für ein allgemeines Fluid. Das Auswahlkriterium für *zulässige* Stöße wird durch den 2. Hauptsatz (90) bereitgestellt,

$$\{s\} \geq 0, \quad (107)$$

wonach die Entropie über einen Stoß hinweg nur zunehmen kann. Die Entropiezunahme wird durch Reibungs- und Wärmeleitungseffekte an der Sprungstelle bewirkt, bei komplexeren Problemen (Realgasverhalten) kann zusätzlich der Nachweis über die Existenz des damit verbundenen stetigen Stoßprofils – neben der Erfüllung der Stoßbeziehungen und des 2. Hauptsatzes

– erforderlich sein.

Betrachten wir den *Grenzfall verschwindender Stoßstärke* $\{p\}, \{v\} \rightarrow 0$, nach (102) wird

$$\lim_{\{p\} \rightarrow 0} \theta^2 = \lim_{\{p\} \rightarrow 0} \left(\rho(v_i - w_i)n_i \right)^2 \equiv \rho^2 c^2 := - \lim_{\{p\} \rightarrow 0} \frac{\{p\}}{\{v\}} = - \frac{\partial p}{\partial v} = - \frac{\partial p}{\partial \rho} \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial v}}_{-\rho^2} = \rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}.$$

In diesem Limit verschwinden auch Dissipation und Wärmeleitung im ‘Stoßprofil’, nach dem 1. Hauptsatz (36) ist die Zustandsänderung *isentrop*, $Ds/Dt = 0$, $s = \text{const.}$ Damit definiert man die *Schallgeschwindigkeit* c durch

$$c := \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}, \quad (108)$$

sie ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Stoßes verschwindender Stärke (= Schallwelle) *relativ* zum strömenden Fluid. Mit Hilfe der Rechenregeln für partielle Ableitungen erhält man die praktische Form

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\partial(p, s)}{\partial(\rho, s)} = \underbrace{\frac{\partial(s, p)}{\partial(T, p)}}_{c_p/T} \frac{\partial(T, p)}{\partial(T, \rho)} \underbrace{\frac{\partial(T, \rho)}{\partial(s, \rho)}}_{T/c_v} = \kappa \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T, \quad (109)$$

wobei mit

$$c_p := T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p, \quad c_v := T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v, \quad \kappa := \frac{c_p}{c_v} \geq 1 \quad (110)$$

die *spezifischen Wärmekapazitäten* bei konstantem p (*isobar*) bzw. v (*isochor*) und κ der *Isentropenkoeffizient* eingeführt werden.

Beispielsweise ist für ein *ideales Gas* mit der thermischen Zustandsgleichung $p = p(\rho, T)$

$$p = \rho R T \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}, \quad (111)$$

bei einer Temperatur von $T = 293 \text{ K}$ ergibt sich für Luft mit $\kappa \approx 1.4$, $c_p \approx 1005 \text{ J}/(\text{kg K})$ und der spezifischen Gaskonstanten $R \approx 287 \text{ J}/(\text{kg K})$ ein Wert von $c \approx 343 \text{ m/s}$.

In vielen praktischen Anwendungen hat man es mit *schwachen* Stoßunstetigkeiten zu tun. Dabei bietet sich eine Reihenentwicklung der Stoßbeziehungen für kleine Sprünge der Feldgrößen an. Ausgehend von der kanonischen Form der Zustandsgleichung für die spezifische innere Energie ergibt sich unter Beachtung von

$$e = e(s, v) \quad \Rightarrow \quad de = \underbrace{\left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)_v}_T ds + \underbrace{\left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_s}_{-p} dv = T ds - p dv \quad (112)$$

die Taylor-Reihenentwicklung an der Stoßseite 1 für $\{s\}/s_1, \{v\}/v_1 \ll 1$ zu

$$\begin{aligned} \{e\} &\sim \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_{v,1} \{s\} + O(\{s\}^2, \{s\}\{v\}) \\ &+ \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_{s,1} \{v\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 e}{\partial v^2}\right)_{s,1} \{v\}^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 e}{\partial v^3}\right)_{s,1} \{v\}^3 + O(\{v\}^4). \end{aligned}$$

Für eine *Isentrope (reversible Adiabate)* im p, v -Diagramm $p = p(v, s = \text{const})$ erhält man entsprechend

$$\{p\} \sim \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s,1} \{v\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{s,1} \{v\}^2 + O(\{v\}^3).$$

Unter Verwendung der Identität $\{p\} = \{p\}/2 + p_1$ ergibt sich mit obigen Entwicklungen aus der Stoßbeziehung (104)

$$\begin{aligned} \{e\} &= -\{p\}\{v\} \\ &\sim T_1 \{s\} - p_1 \{v\} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s,1} \{v\}^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{s,1} \{v\}^3 + O(\{v\}^4) \\ &\sim -p_1 \{v\} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{s,1} \{v\}^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{s,1} \{v\}^3 + O(\{v\}^4), \end{aligned}$$

woraus

$$T_1 \{s\} \sim -\frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{s,1} \{v\}^3 + O(\{v\}^4)$$

folgt. Mit der Definition der *gasdynamischen Fundamentalableitung* Γ

$$\Gamma := \frac{v^3}{2c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s = 1 + \frac{\rho}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_s, \quad (113)$$

welche ein Maß für die *Krümmung* der Isentropen im p, v -Diagramm ist, erhält man mit (107) für den Entropiesprung eines schwachen Stoßes die *Bethesche Beziehung*

$$\frac{T_1 \{s\}}{c_1^2} \sim -\frac{\Gamma_1}{6} \frac{\{v\}^3}{v_1^3} + O(\{v\}^4) \geq 0. \quad (114)$$

Demnach ergibt sich das Auswahlkriterium

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma > 0 \\ \Gamma < 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \{v\} < 0 \quad \dots \text{ Verdichtungsstoß} \\ \{v\} > 0 \quad \dots \text{ Verdünnungsstoß.} \end{array} \right. \quad (115)$$

Für ein ideales Gas (111) mit der Isentropengleichung $p/\rho^\kappa = \text{const}$ ergibt sich

$$\Gamma = \frac{\kappa + 1}{2} \geq 1 \quad (\text{ideales Gas}), \quad (116)$$

d.h. *ausschließlich Verdichtungsstöße*. Flüssigkeiten zeigen positive Werte von $\Gamma \approx 3 \dots 10$. Auf der Suche nach negativen Γ -Fluiden ist man z.B. bei komplexen Fluorkohlenstoffverbindungen

hoher spezifischer Wärmekapazitäten in der Nähe des kritischen Punktes fündig geworden, man bezeichnet sie allgemein als Bethe–Zel’dovich–Thomson (BZT) oder retrograde Fluide, Abb. 9. Eine ausführliche Behandlung dieser Thematik sowie von Stoßwellen im Allgemeinen findet man in [3].

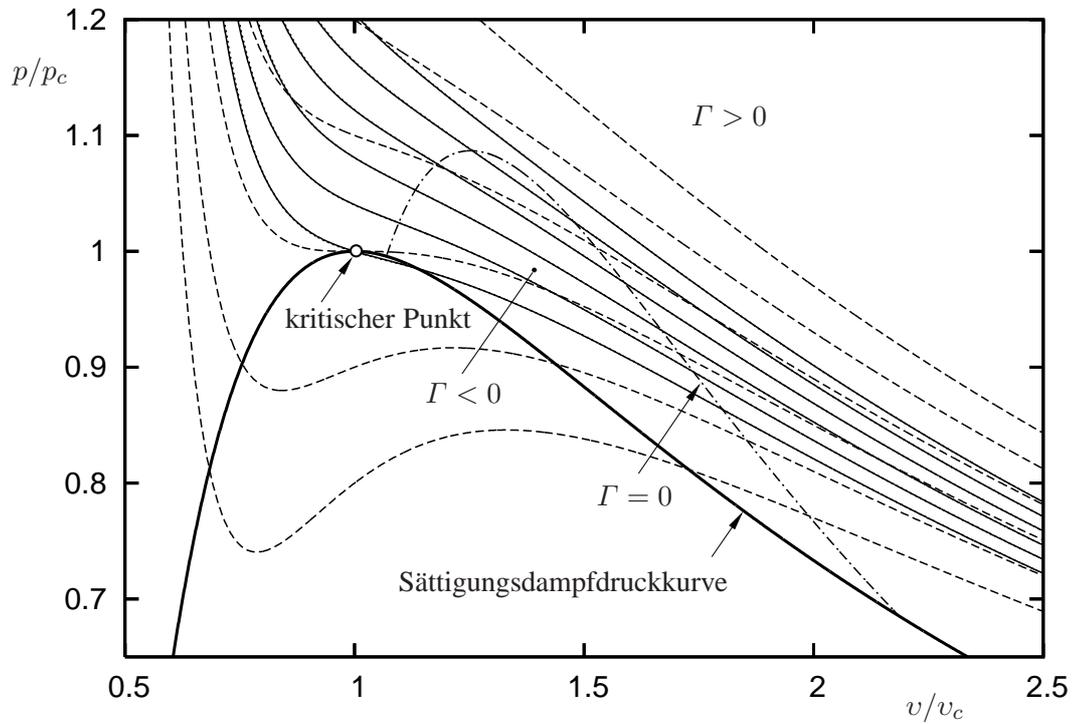


Abbildung 9: Bereich negativer gasdynamischer Fundamentableitung Γ eines BZT-Fluides mit $c_{vc}/R = 50$ nach der van der Waalsschen Realgasgleichung in reduzierten Koordinaten berechnet ($\Gamma < 0$ erfordert $c_{vc}/R \gtrsim 17,5$, $c_{vc} = c_v(T_c)$). Isothermen (strichliert), Isentropen (liniert), Stoßadiabaten (punktirt).

Klassifizierung von Strömungen und Anwendungen

9 Modellgesetze, Kennzahlen

Wie bei allen physikalischen Vorgängen wird auch eine Strömung durch eine bestimmte Anzahl von physikalischen Größen und Parametern charakterisiert. Sowohl für theoretische, als auch für numerische bzw. experimentelle Untersuchungen stellt sich die Frage nach der Mindestzahl von der das Strömungsproblem vollständig beschreibenden Einflussgrößen. Sie kann mit Hilfe der Dimensionsanalyse beantwortet werden. Die wichtigsten dimensionslosen Kennzahlen erhält man durch Dimensionslosmachen der Grundgleichungen. Entscheidend für die Aussagekraft einer Kennzahl ist dabei die geeignete Wahl von charakteristischen Referenzgrößen, Abb. 10.

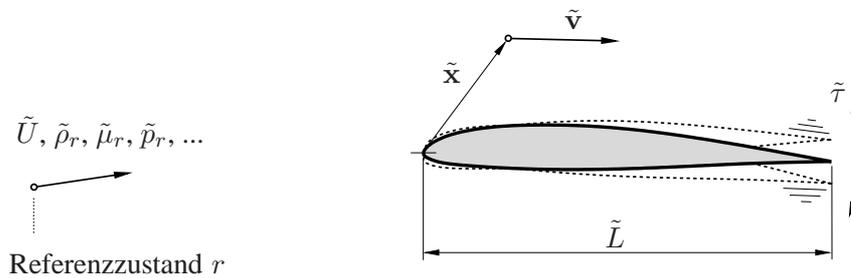


Abbildung 10: Spezifische Referenzgrößen eines Strömungsproblems (z.B. Flügelflattern) zur Bestimmung charakteristischer Kennzahlen: Referenzzustand r ... ungestörte Anströmung, $\tilde{\tau}$... Schwingungsperiodendauer.

Führt man dimensionslose Größen in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{L}}, & t &= \frac{\tilde{t}}{\tilde{\tau}}, & \mathbf{v} &= \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{U}}, & \rho &= \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_r}, & p &= \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_r}, & \mathbf{e}_g &= \frac{\tilde{\mathbf{g}}}{\tilde{g}}, \\ T &= \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_r}, & c_p &= \frac{\tilde{c}_p}{\tilde{c}_{pr}}, & \mu &= \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_r}, & \bar{\mu} &= \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_r}, & \lambda &= \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}_r} \end{aligned} \quad (117)$$

ein, wobei mit $\tilde{}$ dimensionsbehaftete Größen und \tilde{L} , $\tilde{\tau}$, \tilde{U} sowie mit Index r *problemangepasste* Referenzgrößen bezeichnet werden, dann lauten die Massenbilanz (37), die Navier–Stokes Gleichung (65) und die Leistungsbilanz (70) in dimensionsloser Schreibweise

$$\begin{aligned} Sr \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0, \\ Sr \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -Eu \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\mu} \nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu D_{ij}) \right] + \frac{1}{Fr^2} \rho e_{gi}, \\ \rho \left(Sr \frac{\partial h}{\partial t} + v_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) - Eu Ec \left(Sr \frac{\partial p}{\partial t} + v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) & \\ &= \frac{Ec}{Re} \underbrace{\left(\bar{\mu} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu D_{ij} D_{ij} \right)}_{\Phi} + \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)}_{-q_i}. \end{aligned} \quad (118)$$

Bei geeigneter Wahl der Referenzgrößen entscheiden die numerischen Wert der auftretenden Kennzahlen über die Bedeutung jener Terme in den Gleichungen, die die Kennzahlen enthalten. Die dimensionslosen Feldgrößen und deren Zeit- und Ortsableitungen sind von der Größenordnung $O(1)$.

Die *Strouhal-Zahl* (reduzierte Frequenz)

$$Sr := \frac{\tilde{L}}{\tilde{U}\tilde{\tau}} \quad (119)$$

ist ein Maß für das transiente Verhalten einer Strömung. Eine *quasistationäre* Strömung ist durch $Sr \ll 1$ charakterisiert. Stationäre Randbedingungen sind eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für eine stationäre Strömung, da die Strömung *instabil* sein kann (strömungsinduzierte Schwingungen, z.B. Flügelflattern \rightarrow Aeroelastizität; Turbulenz \rightarrow inhärent instationäre Fluidbewegung). Bei $Sr \sim O(1)$ ist die Strömung *instationär*.

Die *Euler-Zahl*

$$Eu := \frac{\tilde{p}_r}{\tilde{\rho}_r \tilde{U}^2} \quad (120)$$

tritt bei allen Strömungen auf, bei denen Druck- und Beschleunigungskräfte wesentlich sind.

Die *Froude-Zahl*

$$Fr := \frac{\tilde{U}}{\sqrt{\tilde{g}\tilde{L}}} \quad (121)$$

ist eine wesentliche Kennzahl bei der Ausbreitung von *Schwerewellen*, $\sqrt{\tilde{g}\tilde{L}}$ nennt man die *Grundwellengeschwindigkeit*. Sie hat eine ähnliche Bedeutung wie die Mach-Zahl bei kompressiblen Strömungen. Den Strömungszustand bei Gerinneströmungen mit freier Oberfläche der Tiefe \tilde{L} nennt man für $Fr < 1$... *strömend*, $Fr = 1$... *kritisch*, $Fr > 1$... *schießend*, je nachdem, ob die Strömungsgeschwindigkeit \tilde{U} kleiner, gleich oder größer als die Grundwellengeschwindigkeit ist. Der Übergang von strömend auf schießend ist stetig, der umgekehrte Vorgang erfolgt meist unstetig über einen hydraulischen Sprung (Wassersprung, beobachtbar z.B. im Waschbecken).

Eine der wesentlichsten Kennzahlen der Strömungsmechanik ist die *Reynolds-Zahl*

$$Re := \frac{\tilde{U}\tilde{L}\tilde{\rho}_r}{\tilde{\mu}_r} = \frac{\tilde{U}\tilde{L}}{\tilde{\nu}_r}, \quad (122)$$

sie ist ein Maß für das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften in einer Strömung. Der Grenzfall $Re \ll 1$ charakterisiert *schleichende (Stokes-) Strömung*, in diesem Fall sind die konvektiven Terme der Navier–Stokes-Gleichung linearisierbar, was eine starke Vereinfachung in der rechnerischen Behandlung bedeutet. Wichtige Vertreter des kleinen Re -Zahlenregimes sind die hydrodynamische Lager- (Schmierspalt-) Theorie, die Strömung in porösen Medien oder von Aerosolen und die Bewegung von mikrobiologischen Organismen. Bei $Re \sim O(1)$ sind im Allgemeinen Trägheits-, Druck- und Reibungskräfte im Strömungsfeld von gleicher Größenordnung, was die Lösung der vollen Navier–Stokes-Gleichungen erfordert. Der Grenzfall hoher Reynolds-Zahlen $Re \gg 1$, welchem in der Aerodynamik große praktische Bedeutung zukommt, ermöglicht ebenfalls eine vereinfachte Behandlung des Strömungsfeldes im Rahmen der *Grenzschichttheorie*. Grob gesprochen lässt sich für jedes Strömungsproblem eine *kritische*

Reynolds-Zahl Re_c angeben, unterhalb derer ($Re < Re_c$) die Strömung die *laminare*, oberhalb ($Re > Re_c$) die *turbulente* Form annimmt. Beispielsweise findet man für die Rohrströmung mit Kreisquerschnitt $Re_c \approx 2300$ und für die parallel angeströmte dünne Platte $Re_c \approx 5 \times 10^5$. Von *reibungsfreier* Strömung spricht man im Grenzfall $Re = \infty$, die Navier–Stokes-Gleichung reduziert sich auf die Euler-Gleichung.

Die *Eckert-Zahl*

$$Ec := \frac{\tilde{U}^2}{\tilde{c}_{pr} \tilde{T}_r} = M^2 K_c \quad (123)$$

ist ein Maß für die Dissipation in einer reibungsbehafteten Strömung. Sie kann alternativ über die *Mach-Zahl*

$$M := \frac{\tilde{U}}{\tilde{c}_r} \quad (124)$$

und die *Schallgeschwindigkeitszahl*

$$K_c := \frac{\tilde{c}_r^2}{\tilde{c}_{pr} \tilde{T}_r} \quad (125)$$

ausgedrückt werden. Die Mach-Zahl gibt Auskunft darüber, ob Kompressibilitätseffekte in einer Strömung von Bedeutung sind. Man unterscheidet grundsätzlich $M^2 \ll 1$... *inkompressible* Strömung (z.B. Automobil-Aerodynamik), $M < 1$... (*kompressibler*) *Unterschall* (z.B. Verkehrsflugfahrt), $M \approx 1$... *schallnaher (transsonischer)* Bereich (z.B. Turbomaschinen, Blattspitzen von Luftschrauben und Hubschrauberrotoren), $M > 1$... *Überschall* und $M^2 \gg 1$... *Hyperschall* (z.B. atmosphärischer Wiedereintritt eines Raumflugkörpers, cosmic jets). Für ideale Gase ist $K_c = \kappa - 1$, d.h. eine reine Stoffgröße.

Mit der *Prandtl-Zahl*

$$Pr := \frac{\tilde{\mu}_r \tilde{c}_{pr}}{\tilde{\lambda}_r} \quad (126)$$

wird eine reine (temperatur- und druckabhängige) Stoffkenngröße definiert, man findet für Gase $Pr \approx 1$, für Wasser $Pr \approx 7$, für flüssige Metalle $Pr \ll 1$ und für Öle $Pr \gg 1$.

Im Strömungsversuchswesen spielen obige Kennzahlen eine besondere Rolle, von *mechanischer Ähnlichkeit* zwischen Modellversuchs- und Großausführung spricht man dann, wenn (i) die Geometrie und (ii) die numerischen Werte der relevanten dimensionslosen Kennzahlen übereinstimmen. In der Praxis ist mechanische Ähnlichkeit oft nur partiell erzielbar und Kompromisse unumgänglich. Außerdem ist ein Experimentator zur Minimierung der Versuchsanzahl gut beraten, z.B. bei der Vermessung von Kennfeldern auf die Variation der dimensionslosen Kennzahlen – im Gegensatz zur Variation aller dimensionsbehafteter Einflußgrößen – zu achten.

10 Dimensionsanalyse

Bezeichnet man mit $\tilde{b}_i, i = 1, \dots, n$ die das Problem beschreibende physikalischen Größen, dann lautet die mathematische Formulierung des physikalischen Zusammenhangs

$$f(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n) = 0, \quad (127)$$

in dimensionsloser Form

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_l). \quad (128)$$

Dabei sind $\Pi_k, k = 1, \dots, l$ dimensionslose Potenzprodukte (\equiv Kennzahlen) von $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$. Nach dem *Buckingham'schen Π -Theorem* gilt

$$l = n - r, \quad (129)$$

wobei r der Rang der Dimensionsmatrix (a_{ij}) ist, deren Komponenten die Exponenten der relevanten Grundgrößen in der Einheitendarstellung

$$\dim(\tilde{b}_i) = (\text{Masse})^{a_{i1}} (\text{Länge})^{a_{i2}} (\text{Zeit})^{a_{i3}} (\text{Temperatur})^{a_{i4}} \dots \quad (130)$$

sind. Die Zweckmäßigkeit der Dimensionsanalyse wird am Beispiel der Kugelumströmung (s. unten) demonstriert.

11 Schleichende Strömung

Im Folgenden beschränken wir uns auf stationäre Strömung mit konstanten Stoffwerten $\tilde{\rho}, \tilde{\mu} = \text{const.}$ Am Beispiel der Kugelumströmung soll für kleine Werte der Reynoldszahl $Re \ll 1$ die Kugelwiderstandskraft $\tilde{\mathbf{W}}$ ermittelt werden, Abb. 11.

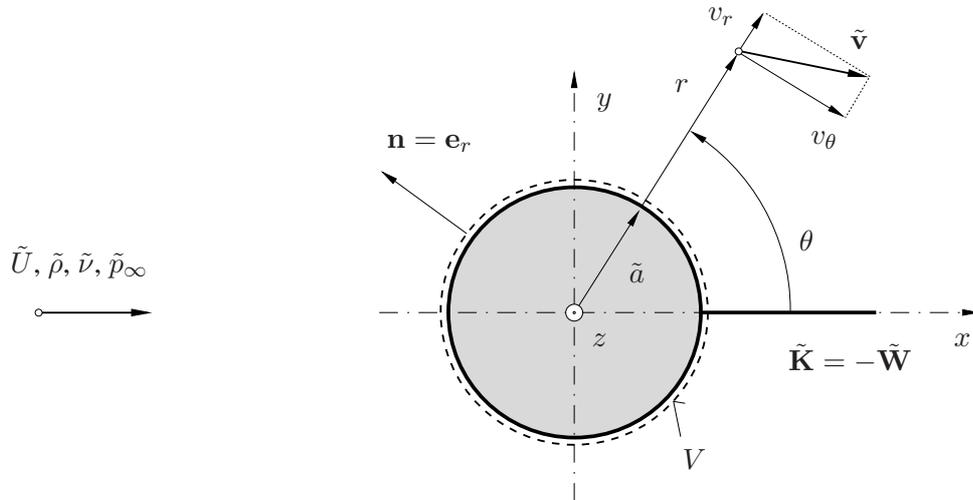


Abbildung 11: Bezeichnungen zur Bestimmung der Kugel-Haltekraft $\tilde{\mathbf{K}}$ in einer Parallelströmung.

Mit

$$\mathbf{x} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{a}}, \quad \mathbf{v} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{U}}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}\tilde{U}^2} \quad (131)$$

ergibt sich die dimensionslose Form der Massenbilanz und Navier–Stokes-Gleichung zu

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \frac{2}{Re} \Delta \mathbf{v}, \quad Re := \frac{2\tilde{a}\tilde{U}}{\tilde{\nu}} \ll 1. \end{aligned} \quad (132)$$

Die Strömungsgeometrie legt die Verwendung von Kugelkoordinaten ($r > 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) nahe, aus Symmetriegründen gibt es keine φ -Abhängigkeit der Feldgrößen, $\partial/\partial\varphi = 0$ und $v_\varphi = 0$. Beim Vorliegen einer achsensymmetrischen (ebenen) Strömung wird durch Einführen der *Stromfunktion* $\psi(r, \theta)$ die Massenbilanz

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \underbrace{(r^2 \sin \theta v_r)}_{\frac{\partial \psi}{\partial \theta}} + \frac{\partial}{\partial \theta} \underbrace{(r \sin \theta v_\theta)}_{-\frac{\partial \psi}{\partial r}} \right] = 0 \quad (133)$$

identisch erfüllt. Auf einer *Stromlinie* ist $\psi = \text{const}$, es gilt daher die Parameterdarstellung der Stromlinien $r = r(\theta, \psi = \text{const})$. Der Geschwindigkeitsvektor tangiert in jedem Punkt die Stromlinie, wie man aus

$$d\psi = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{rd\theta} = \frac{v_r}{v_\theta} \quad (134)$$

sieht. Durch Einführen von ψ wird die Bewegungsgleichung eine Differentialgleichung 3. Ordnung, zur Lösung benötigt man daher drei Randbedingungen: im Fernfeld herrscht ungestörte Anströmung

$$r \rightarrow \infty : \quad v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rightarrow \cos \theta, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow -\sin \theta, \quad (135)$$

woraus

$$\psi(r \rightarrow \infty, \theta) \rightarrow \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta \quad (136)$$

durch Integration folgt. An der (undurchlässigen) Kugeloberfläche muß die Haftbedingung erfüllt werden, d.h.

$$r = 1 : \quad v_r = v_\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad (137)$$

dabei ist $\psi(1, \theta) = 0$ willkürlich gewählt (die Wahlfreiheit ergibt sich aus der Unbestimmtheit der Integrationskonstanten von ψ ; Körperkonturen sind – wie hier die Erzeugenden der Kugeloberfläche – Stromlinien).

Zur Eliminierung des Druckes wendet man den Rotationsoperator auf die Bewegungsgleichung an und erhält dadurch die Wirbeltransportgleichung

$$\mathbf{v} \cdot \nabla (\nabla \times \mathbf{v}) = \underbrace{[(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \nabla]}_0 \mathbf{v} + \frac{2}{Re} \Delta (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (138)$$

für die Wirbelstärke

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi = \omega \mathbf{e}_\varphi. \quad (139)$$

Die *Stokessche Näherung* für schleichende Strömung $Re \rightarrow 0$ besteht nun darin, die konvektiven Terme in (138) zu vernachlässigen. Sie läßt sich auch als führende Ordnung einer regulären asymptotischen Entwicklung $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_0 + Re \mathbf{v}_1 + O(Re^2)$, $(p - p_\infty) \sim Re^{-1} p_0 + p_1 + O(Re)$ für

$Re \rightarrow 0$ auffassen. Es verbleibt die lineare partielle Differentialgleichung

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} = \Delta(\omega \mathbf{e}_\varphi) = \left(\Delta \omega - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi, \quad (140)$$

welche in ψ von 4. Ordnung ist. Die Fernfeldbedingung legt den Produktansatz $\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta$ nahe, was auf die Eulersche Differentialgleichung $8f - 8rf' + 4r^2 f'' - r^4 f'''' = 0$ führt, deren an die Randbedingungen angepasste Lösung das Endresultat

$$\psi(r, \theta) = \left(\frac{r^2}{2} - \frac{3r}{4} + \frac{1}{4r} \right) \sin^2 \theta \quad (141)$$

liefert. Die Stromlinien sind demnach symmetrisch bezüglich der Ebene $\theta = \pi/2$. Der erste Term ist die ungestörte Parallelströmung, der letzte eine Dipolströmung um den Ursprung; diese beiden Anteile sind drehungsfrei, d.h. sie liefern keinen Beitrag zu $\boldsymbol{\omega}$. Den zweiten Term bezeichnet man als ‘Stokeslet’, er alleine beschreibt viskose Effekte. Man erhält für die Wirbelstärke

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{3 \sin \theta}{2 r^2} \mathbf{e}_\varphi. \quad (142)$$

Die Druckverteilung wird aus der Impulsbilanz unter Vernachlässigung der konvektiven Terme bestimmt, mit der Vektoridentität

$$\nabla \times \underbrace{(\nabla \times \mathbf{v})}_{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{v})}_0 - \Delta \mathbf{v}$$

ist

$$\nabla p = \frac{2}{Re} \Delta \mathbf{v} = -\frac{2}{Re} \nabla \times \boldsymbol{\omega}, \quad (143)$$

speziell z.B. für die Radialkomponente des Druckgradienten

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2}{Re} \nabla \times (\omega \mathbf{e}_\varphi) \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{2}{Re} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \omega) \right] = \frac{6 \cos \theta}{Re r^3}. \quad (144)$$

Integration von r bis ∞ liefert

$$p(r, \theta) = p_\infty - \frac{3 \cos \theta}{Re r^2}, \quad (145)$$

die Antisymmetrie der Druckstörung ($p - p_\infty$) bezüglich der Ebene $\theta = \pi/2$ ergibt einen nichtverschwindenden Druckwiderstand. Die Haltekraft wird über die integrale Impulsbilanz für das in Abb. 11 eingezeichnete raumfeste Kontrollvolumen V bestimmt. Aus

$$\tilde{a}^2 \tilde{\rho} \tilde{U}^2 \oint_{\partial V} \underbrace{\mathbf{v} v_n}_{0} dO = -\tilde{a}^2 \tilde{\rho} \tilde{U}^2 \oint_{\partial V} p \mathbf{n} dO + \frac{\tilde{\mu} \tilde{U}}{\tilde{a}} \tilde{a}^2 \oint_{\partial V} \sigma' \mathbf{n} dO + \tilde{\mathbf{K}}$$

folgt nach Umformung

$$\frac{\tilde{\mathbf{K}}}{\tilde{\rho} \tilde{U}^2 \tilde{a}^2} = \oint_{\partial V} p \mathbf{n} dO - \frac{2}{Re} \oint_{\partial V} \sigma' \mathbf{n} dO. \quad (146)$$

Mit

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_y + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_z, \quad dO = \underbrace{r^2}_1 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

ist

$$\oint_{\partial V} p \mathbf{e}_r \, dO = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(p_\infty - \frac{3 \cos \theta}{Re} \right) \cos \theta \mathbf{e}_x \underbrace{\sin \theta \, d\theta}_{-d(\cos \theta)} = \frac{6\pi \cos^3 \theta}{Re} \Big|_0^\pi \mathbf{e}_x = -\frac{4\pi}{Re} \mathbf{e}_x. \quad (147)$$

Der Reibspannungsvektor

$$\sigma' \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sigma'_{rr} & \cdots & \cdots \\ \sigma'_{\theta r} & \sigma'_{\theta\theta} & \cdots \\ \sigma'_{\varphi r} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma'_{rr} \\ \sigma'_{\theta r} \\ \sigma'_{\varphi r} \end{pmatrix}$$

wird unter Berücksichtigung der Randbedingungen für die Spannungstensoranteile

$$\sigma'_{rr}(1, \theta) = \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad \sigma'_{\theta r}(1, \theta) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \Big|_{r=1} = \frac{3}{2} \sin \theta, \quad \sigma'_{\varphi r}(1, \theta) = 0$$

zu

$$\sigma' \mathbf{e}_r = \frac{3}{2} \sin \theta \mathbf{e}_\theta = \frac{3}{2} \sin \theta (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_z),$$

daher ist

$$\oint_{\partial V} \sigma' \mathbf{e}_r \, dO = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{3}{2} \sin^2 \theta \mathbf{e}_x \sin \theta \, d\theta = 3\pi \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \Big|_0^\pi \mathbf{e}_x = 4\pi \mathbf{e}_x. \quad (148)$$

Für die Haltekraft in dimensionsloser Darstellung ergibt sich

$$\frac{\tilde{\mathbf{K}}}{\tilde{\rho} \tilde{U}^2 \tilde{a}^2} = (-4 - 8) \frac{\pi}{Re} \mathbf{e}_x = -\frac{12\pi}{Re} \mathbf{e}_x, \quad (149)$$

die Beiträge stammen zu 1/3 von Druck-, zu 2/3 von viskosen Spannungen. Üblicherweise wird die Widerstandskraft $\tilde{\mathbf{W}} = -\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{W} \mathbf{e}_x$ in Form des *Widerstandsbeiwertes* c_w angegeben, für die Kugel in schleichender Umströmung ergibt sich das *Stokessche Kugelwiderstandsgesetz*

$$c_w := \frac{\tilde{W}}{\tilde{\rho} \tilde{U}^2 / 2 \tilde{a}^2 \pi} \sim \frac{24}{Re}, \quad Re \rightarrow 0, \quad (150)$$

welches z.B. im Rahmen des Millikanschen Öltröpfchenversuches zur Bestimmung der Elementarladung Anwendung fand.

Wir wollen die Frage nach der *Gültigkeit* der Stokes-Näherung stellen. In diesem Zusammenhang ist entscheidend, dass die Reynolds-Zahl das Verhältnis zweier Längenmaßstäbe charak-

terisiert,

$$Re = \frac{2\tilde{a}\tilde{U}}{\tilde{\nu}} = \frac{2\tilde{a}}{\tilde{l}_\nu} \rightarrow 0, \quad l_\nu := \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{U}} \quad (151)$$

wobei für die *viskose Länge* $\tilde{l}_\nu \gg \tilde{a}$ für $Re \ll 1$ gilt. Eine *Größenordnungsabschätzung* der einzelnen Terme der Navier–Stokes-Gleichung im Fernfeld $\tilde{r} \rightarrow \infty$ führt mit

$$\tilde{\mathbf{v}} \sim \tilde{U}, \quad \tilde{\nabla} \sim \frac{1}{\tilde{r}}, \quad \tilde{\nabla} \circ \tilde{\mathbf{v}} \sim \frac{1}{\tilde{r}} \tilde{U} \frac{\tilde{a}^2 \tilde{r}}{\tilde{r}^2 \tilde{a}} \quad (\text{Stokeslet}), \quad \tilde{\nabla} \tilde{p} \sim \frac{1}{\tilde{r}} \tilde{\rho} \tilde{U}^2 \frac{\tilde{a}^2}{Re \tilde{r}^2}, \quad \tilde{\Delta} \sim \frac{1}{\tilde{r}^2}$$

auf

$$\begin{aligned} \underbrace{(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}}} &= \underbrace{-\frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\nabla} \tilde{p}} + \underbrace{\tilde{\nu} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}} \\ \frac{\tilde{U}^2 \tilde{a}}{\tilde{r}^2} &\sim \frac{\tilde{U}^2 \tilde{a}^2}{Re \tilde{r}^3} + \frac{\tilde{U} \tilde{a} \tilde{\nu}}{\tilde{r}^3} \\ &\quad \frac{\tilde{U}^2 \tilde{a}^2}{Re \tilde{r}^3} \end{aligned}$$

Druck- und Reibkräfte sind – wie zu erwarten war – von gleicher Größenordnung. Multiplikation mit $Re \tilde{r}^3 / (\tilde{U}^2 \tilde{a}^2)$ ergibt

$$Re \frac{\tilde{r}}{\tilde{a}} \sim \frac{\tilde{a}}{\tilde{l}_\nu} \frac{\tilde{r}}{\tilde{a}} \sim 1,$$

d.h. falls $\tilde{r} \sim \tilde{l}_\nu$ ($\gg \tilde{a}$), sind auch die Trägheitskräfte von der selben Größenordnung wie Druck- und Reibkräfte. Der konvektive Term darf daher im Fernfeld *nicht* vernachlässigt werden, anders ausgedrückt: die Stokesche Näherung ist im gesamten Strömungsfeld *nicht gleichmäßig* gültig. Bei ebenen Strömungen (z.B. schleichende Zylinderumströmung) existiert aus diesem Grund die Lösung für die Stokesche Näherung nicht (*Stokessches Paradoxon*). Generell ist zu bemerken: wenn der Störparameter (hier $Re \rightarrow 0$) eines Störproblems kleine oder große Werte annimmt und als Verhältnis z.B. zweier Längenmaßstäbe interpretiert werden kann, muß mit einer Aufspaltung des Strömungsfeldes in (zumindest) zwei Bereiche (Nah- und Fernfeld mit unterschiedlichen Kräftebalancen) gerechnet werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von *singulären Störproblemen* (vergl. Grenzschichttheorie).

Bei schleichender Strömung läßt sich durch die Linearisierung des konvektiven Terms um die ungestörte Anströmung eine gleichmäßig gültige Beschreibung des Strömungsfeldes finden (*Oseensche Näherung*)

$$(\tilde{U} \mathbf{e}_x \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nu} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}. \quad (152)$$

Für die Kugel ergibt sich damit

$$c_w \sim \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3Re}{16} + O(Re^2 \ln Re) \right), \quad Re \rightarrow 0, \quad (153)$$

Terme höherer Ordnung erfordern eine singuläre Störungsrechnung, siehe z.B. [23].

Führen wir abschließend eine Dimensionsanalyse zur Bestimmung der dimensionslosen Kennzahlen bei der inkompressiblen Umströmung einer Kugel durch. Nach (127) gilt im vorliegenden Fall

$$f(\tilde{U}, \tilde{a}, \tilde{\rho}, \tilde{\mu}, \tilde{W}) = 0, \quad (154)$$

die Dimensionsmatrix ist demnach

	M	L	Z
\tilde{U}	0	1	-1
\tilde{a}	0	1	0
$\tilde{\rho}$	1	-3	0
$\tilde{\mu}$	1	-1	-1
\tilde{W}	1	1	-2

und hat Rang $r = 3$. Für die 5 Einflußgrößen ergeben sich nach dem Π -Theorem $5 - 3 = 2$ dimensionslose Potenzprodukte:

$$\Pi_1 = \frac{\tilde{W}}{\tilde{\rho}\tilde{U}^2/2\tilde{a}^2\pi} = c_w, \quad \Pi_2 = \frac{2\tilde{a}\tilde{U}\tilde{\rho}}{\tilde{\mu}} = Re. \quad (155)$$

In dimensionsloser Darstellung (128) erhält man den funktionellen Zusammenhang

$$c_w = F(Re), \quad (156)$$

welcher i.A. experimentell bestimmt werden muß, Abb. 12.

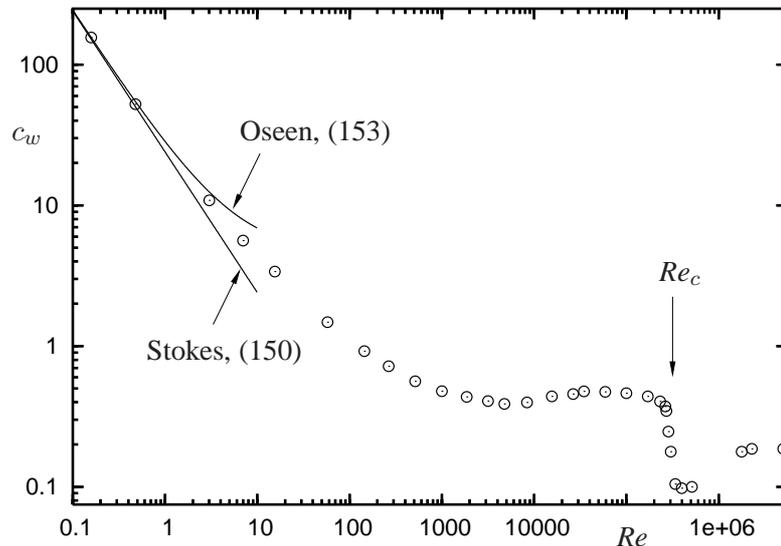


Abbildung 12: Kugelwiderstandsbeiwert c_w in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl Re :

○ ... Meßpunkte, $Re \gtrsim 20$... Strömungsablösung, $Re \gtrsim 130$... instabile (instationäre) Strömung, $Re \gtrsim 200$... chaotische Wirbelbildung im Nachlauf, $Re \leq Re_c$... laminare/turbulente Grenzschichtablösung.

12 Stromfadentheorie (Gasdynamik)

Vorausgesetzt wird hier stationäre ($Sr = 0$), reibungsfreie ($Re = \infty$), kompressible Strömung eines idealen Gases mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten. Der Stromfaden sei nur schwach gekrümmt, die relativen Querschnittsänderungen sind klein, $dA/A \ll 1$, d.h. die Feldgrößen sind über den Querschnitt näherungsweise konstant und hängen nur von der Ortskoordinate x ab. Weiters wird der Schwerkrafteinfluß vernachlässigt und keine Wärmezufuhr/abfuhr berücksichtigt (Beschränkung auf adiabate Zustandsänderungen).

Zunächst gehen wir von einer Stromröhre konstanten Querschnitts aus und fragen, ob zwischen den Stellen ① und ② Strömungs-Zustandsänderungen auftreten können, Abb. 13.

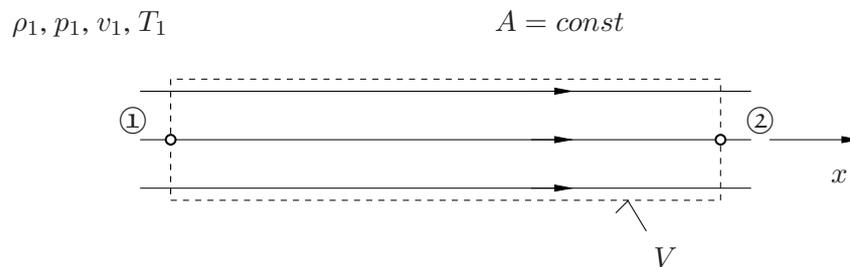


Abbildung 13: Zustandsänderung längs eines Stromfadens konstanten Querschnitts.

Wir wählen zwei Zugänge:

(i) *Feldgrößen differenzierbar*

Massen, Impuls- und Leistungsbilanz lauten

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0. \quad (157)$$

Aus letzter Gleichung folgt $s = \text{const}$ (Isentropie) entlang einer Stromlinie, für das ideale Gas gilt die Isentropengleichung $p/\rho^\kappa = \text{const}$. Mit $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, $\nabla = \mathbf{e}_x d/dx$ erhält man

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0, \quad \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{p}{\rho v^2} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} - \kappa \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0, \quad (158)$$

daraus durch Elimination von $(d\rho/dx)/\rho$, $(dv/dx)/v$

$$\left(1 - \underbrace{\frac{\kappa p}{\rho v^2}}_{1/M^2}\right) \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} = 0. \quad (159)$$

Demnach sind für $M \neq 1$ keine Zustandsänderungen möglich: $dp/dx = 0$, für $M = 1$ ist $dp/dx \neq 0$ hingegen möglich. Bemerkenswert ist, dass die Mach-Zahl $M = v/c$ die einzige dimensionslose Kennzahl ist, welche aus den Größen ρ , p und v gebildet werden kann (die Temperatur ist aus Dimensionsgründen keine Einflußgröße).

(ii) *unstetige Änderungen der Feldgrößen*

Aus der integralen Massen-, Impuls- und Leistungsbilanz folgt für das in Abb. 13 eingezeichnete Kontrollvolumen V mit $A = \text{const}$

$$\rho v = \hat{\rho} \hat{v} = \theta, \quad \rho v^2 + p = \hat{\rho} \hat{v}^2 + \hat{p}, \quad \frac{v^2}{2} + h = \frac{\hat{v}^2}{2} + \hat{h}, \quad (160)$$

hier und im Weiteren sind die Feldgrößen ohne Index jene an der Stelle ① (Anströmzustand), und die mit $\hat{}$ jene nach dem Stoß an der Stelle ②. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Stoßes ist im Laborsystem $\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_x = w = 0$. Unter Verwendung der Zusammenhänge für ein ideales Gas

$$\begin{aligned} h = c_p T + \text{const} &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} + \text{const}, & e = c_v T + \text{const}, \\ p = \rho R T, \quad R = c_p - c_v, & \quad c^2 = \kappa \frac{p}{\rho} \end{aligned} \quad (161)$$

ergibt die Kombination von Gleichungen (160) eine quadratische Gleichung in \hat{v}/v mit den Lösungen

$$\frac{\hat{v}}{v} = \begin{cases} 1 & \dots \text{triviale Lösung,} \\ 1 - \frac{2}{\kappa + 1} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) < 1 & \dots \text{Stoßlösung.} \end{cases} \quad (162)$$

Dabei erfordert die Existenz eines Verdichtungsstoßes – eine unstetige Zustandsänderung zwischen ① und ② – gemäß $\{v\} = \theta \{1/\rho\}$ *Überschallanströmung* $M > 1$ (vergl. die Verhältnisse bei (i)). Damit erhält man für die restlichen Feldgrößen

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\rho}}{\rho} = \frac{v}{\hat{v}} > 1, \quad \frac{\hat{p}}{p} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M^2 - 1) > 1, \quad \frac{\hat{T}}{T} = \frac{\hat{c}^2}{c^2} = \frac{\hat{p}}{p} \frac{\rho}{\hat{\rho}} > 1, \\ \hat{M}^2 = \frac{\hat{v}^2 \hat{\rho}}{\kappa \hat{p}} = \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (M^2 - 1)}{1 + \frac{2\kappa}{\kappa - 1} (M^2 - 1)} < 1. \end{aligned} \quad (163)$$

Aus der Sprungbeziehung (105)

$$\{h\} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left\{ \frac{p}{\rho} \right\} = \left\{ \frac{1}{\rho} \right\} \{p\}$$

ergibt sich die dynamische Adiabate

$$\frac{\{p\}}{\{\rho\}} = \kappa \frac{\{p\}}{\{\rho\}}, \quad (164)$$

Abb. 14.

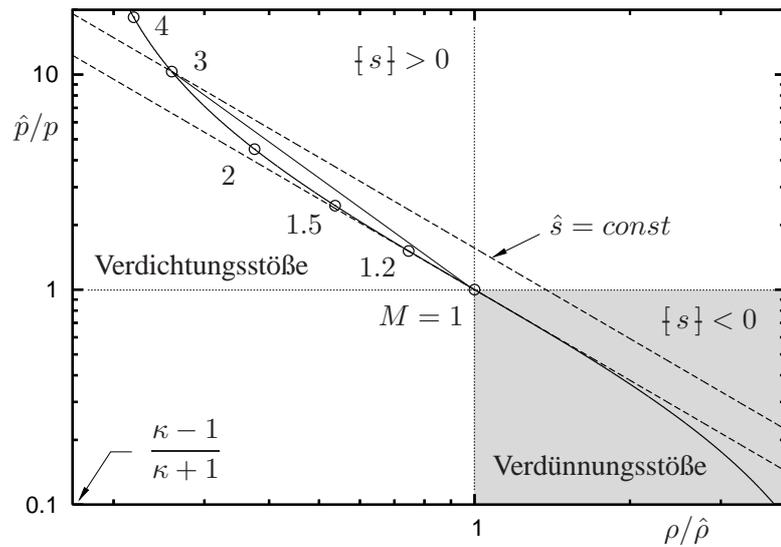


Abbildung 14: Stoßadiabate (liniert) und Isentropen (strichliert) eines idealen Gases für $\kappa = 1.4$ (Luft). Durch 2. HS verbotener Bereich (grau), Bereich schwacher Stöße, (170): $\{s\} \propto \{p\}^3 \dots$ Neigung und Krümmung von Stoßadiabaten und Isentropen sind näherungsweise gleich.

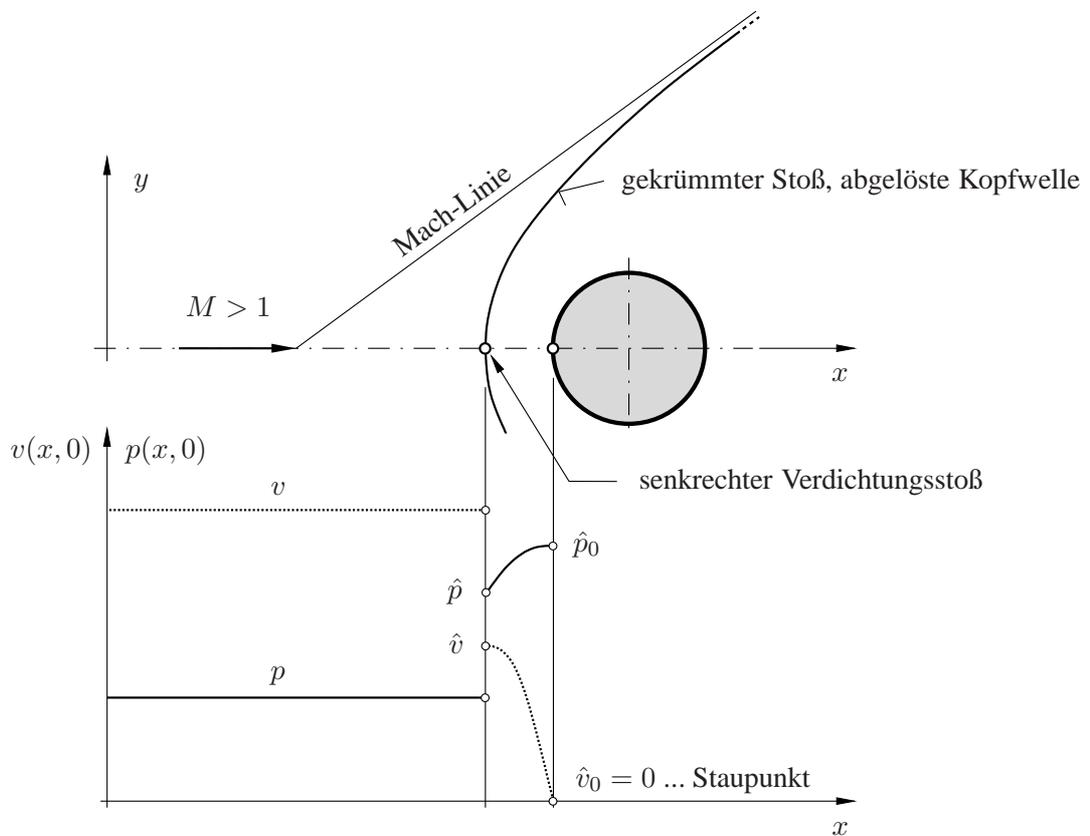


Abbildung 15: Kugel oder Zylinder in Überschallanströmung (qualitativ).

12.1 Stoßverluste und Ruhegrößen

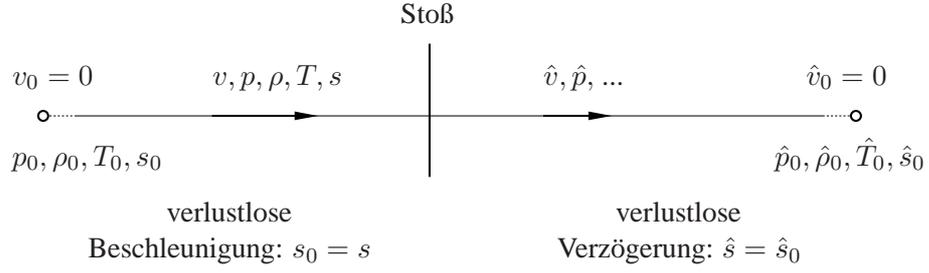


Abbildung 16: Stoßverluste, Notation.

Die Anwendung des Energiesatzes $v^2/2 + h = const$ auf die Stromlinie in Abb. 16 ergibt

$$c_p T_0 = \frac{v^2}{2} + c_p T = \frac{\hat{v}^2}{2} + c_p \hat{T} = c_p \hat{T}_0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \hat{T}_0, \quad (165)$$

d.h. keine Änderung der Ruhetemperatur T_0 über den Stoß hinweg. Für die Entropie des idealen Gases gilt

$$\frac{s}{c_v} = \ln \frac{p}{\rho^\kappa} + const = \ln \frac{(RT)^\kappa}{p^{\kappa-1}} + const, \quad (166)$$

zwischen den Ruhezuständen ergibt sich daher für den Entropiezuwachs durch den Verdichtungsstoß

$$\frac{\hat{s}_0 - s_0}{c_v} = \underbrace{\kappa \ln \frac{\hat{T}_0}{T_0}}_0 - (\kappa - 1) \ln \frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{\hat{s} - s}{c_v} \geq 0, \quad (167)$$

und damit unter Verwendung der thermischen Zustandsgleichung für den Ruhedruckverlust

$$\frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{\hat{\rho}_0}{\rho_0} \leq 1. \quad (168)$$

Daraus folgt, dass die Arbeitsfähigkeit des Systems nach dem Stoß abgenommen hat. Der Entropieanstieg berechnet sich mit Hilfe der dynamischen Adiabaten (164) und der Stoßlösung zu

$$\begin{aligned} \frac{\{s\}}{c_v} &= \frac{\hat{s} - s}{c_v} = \ln \frac{\hat{p}}{p} - \kappa \ln \frac{\hat{\rho}}{\rho} = \ln \frac{\hat{p}}{p} - \kappa \ln \frac{1 + \kappa + (\kappa - 1)\hat{p}/p}{\kappa - 1 + (1 + \kappa)\hat{p}/p} \\ &= \ln \left[1 + \frac{2\kappa}{1 + \kappa}(M^2 - 1) \right] - \kappa \ln \left[\frac{(1 + \kappa)M^2}{2 + (\kappa - 1)M^2} \right], \end{aligned} \quad (169)$$

hängt daher nur mehr vom Quadrat der Anström-Mach-Zahl (Stoß-Mach-Zahl) ab. Für schwache Stöße $\hat{p}/p - 1 = \{p\}/p \rightarrow 0$ bzw. $M^2 - 1 \rightarrow 0$ ergibt sich damit (vergl. Bethesche Relation (114))

$$\begin{aligned} \frac{\{s\}}{c_v} &\sim \frac{1}{12} \frac{(\kappa^2 - 1)}{\kappa^2} \frac{\{p\}^3}{p^3} + O((\{p\}/p)^4) \\ &\sim \frac{2(\kappa - 1)\kappa}{3(1 + \kappa)^2} (M^2 - 1)^3 + O((M^2 - 1)^4). \end{aligned} \quad (170)$$

12.2 Stromfaden schwach veränderlichen Querschnittes

Gegeben sei die Strömung (Massenstrom $\dot{m} = \rho v A = \text{const}$) durch einen ebenen Kanal schwach veränderlicher Querschnittsfläche $A(x)$, gesucht sind die Verläufe der Feldgrößen $v(x)$, $\rho(x)$, $p(x)$, $T(x)$, wobei wir Differenzierbarkeit voraussetzen. Die differentielle Form der Massenbilanz, Impulsbilanz und Isentropie lautet

$$\frac{d}{dx} \ln \dot{m} = 0 = \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx}, \quad \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\kappa M^2} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} = 0. \quad (171)$$

Die Kombination der beiden letzten Gleichungen liefert

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -M^2 \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}, \quad (172)$$

wonach für $M^2 \ll 1$ die relativen Dichteänderungen sehr viel kleiner als die relativen Geschwindigkeitsänderungen sind, die Strömung kann in diesem Fall als *inkompressibel* betrachtet werden. Eliminiert man mit (172) aus der Massenbilanz (171) die Dichte, ergibt sich

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = (M^2 - 1) \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}, \quad (173)$$

woraus

$$\begin{aligned} M < 1: \quad \frac{dv}{dx} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{dA}{dx} \leq 0 \\ M > 1: \quad \frac{dv}{dx} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{dA}{dx} \geq 0 \end{aligned} \quad (174)$$

folgt. Die Beschleunigung einer Unterschallströmung auf Überschall erfordert daher eine konvergent-divergente Kanalformgebung (*Laval-Düse*), Abb. 17.

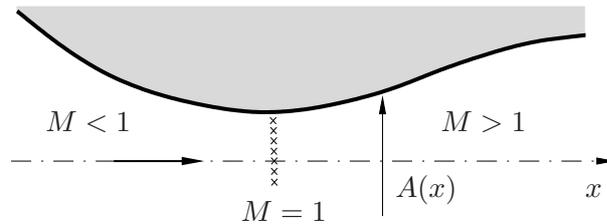


Abbildung 17: Laval-Düse. Schalldurchgang $M = 1$ im engsten Querschnitt $dA/dx = 0$.

Es folgen einige wichtige Begriffe der Gasdynamik. Die durch Expansion erreichbare *Maximalgeschwindigkeit* v_{max} kann aus dem Energiesatz bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} + c_p T = \text{const} &= c_p T_0 \Big|_{v=0} = \frac{c_0^2}{\kappa - 1} \Big|_{v=0} = \frac{v_{max}^2}{2} \Big|_{T=0}, \\ v_{max} &= \sqrt{2c_p T_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} c_0, \quad \frac{v^2}{v_{max}^2} = 1 - \frac{T}{T_0}, \end{aligned} \quad (175)$$

und hängt daher nur vom Ruhezustand (Ruhetemperatur T_0 , *Ruheschallgeschwindigkeit* c_0) ab. Die zugehörige Mach-Zahl ist $M_{max} = \infty$. Die *kritische Schallgeschwindigkeit* c^* ist der Wert

von c und v für $M = 1$, dem Energiesatz zufolge ist

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\kappa - 1} = \frac{c_0^2}{\kappa - 1}, \quad (176)$$

$$M = 1 : \quad \frac{c^{*2}}{2} + \frac{c^{*2}}{\kappa - 1} = \frac{c_0^2}{\kappa - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{c^{*2}}{c_0^2} = \frac{2}{\kappa + 1} = \frac{T^*}{T_0},$$

die Feldgrößen nehmen die kritischen Werte p^* , ρ^* , T^* an. Mit der Isentropenbeziehung und der Gasgleichung erhält man daraus die kritischen Verhältnisse

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{\rho^*}{\rho_0} \right)^\kappa = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (177)$$

Für Luft mit $\kappa = 1.4$ erhält man

$$\frac{p^*}{p_0} \doteq 0.5283, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} \doteq 0.6339, \quad \frac{T^*}{T_0} \doteq 0.8333.$$

Die *kritische Mach-Zahl* M^* ist durch

$$M^* := \frac{v}{c^*} \quad (178)$$

definiert, ihr Maximalwert ist durch

$$M_{max}^* = \frac{v_{max}}{c^*} = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \quad (179)$$

gegeben, für Luft z.B. $M_{max}^* \doteq 2.45$. Die lokalen Werte der Feldgrößen hängen nur vom Ruhezustand und der lokalen Mach-Zahl ab:

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = c_p T_0 \quad \left| \cdot \frac{1}{c_p T} \right. \rightarrow \quad \frac{v^2}{2c_p T} = \frac{(\kappa - 1)v^2}{2c^2} = \frac{T_0}{T} - 1$$

d.h.

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2} = \frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa - 1} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}. \quad (180)$$

Der Zusammenhang zwischen M und M^* ergibt sich aus dem Energiesatz

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\kappa - 1} = \frac{c_0^2}{\kappa - 1} = \frac{(\kappa + 1)}{2(\kappa - 1)} c^{*2} \quad \left| \cdot \frac{2}{v^2} \right. \rightarrow \quad 1 + \frac{2}{(\kappa - 1)} \frac{1}{M^2} = \frac{(\kappa + 1)}{(\kappa - 1)} \frac{1}{M^{*2}}$$

zu

$$M^{*2} = \frac{M^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (M^2 - 1)}. \quad (181)$$

Aus (177), (180), (181) und der Massenbilanz $\dot{m} = A\rho v = A^* \rho^* v^* = const$ ergibt sich für das Massenstromdichteverhältnis

$$\frac{\theta}{\theta^*} = \frac{\rho v}{\rho^* c^*} = \frac{A^*}{A} = M^* \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} (1 - M^{*2}) \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}, \quad (182)$$

hier bezeichnet A^* den *kritischen Querschnitt*. Abb. 18 bzw. Tab. 3 geben die Strömungsverhältnisse in einem Stromfaden bei isentroper Expansion oder Kompression eines idealen Gases konstanter spezifischer Wärmekapazitäten am Beispiel von Luft wieder.

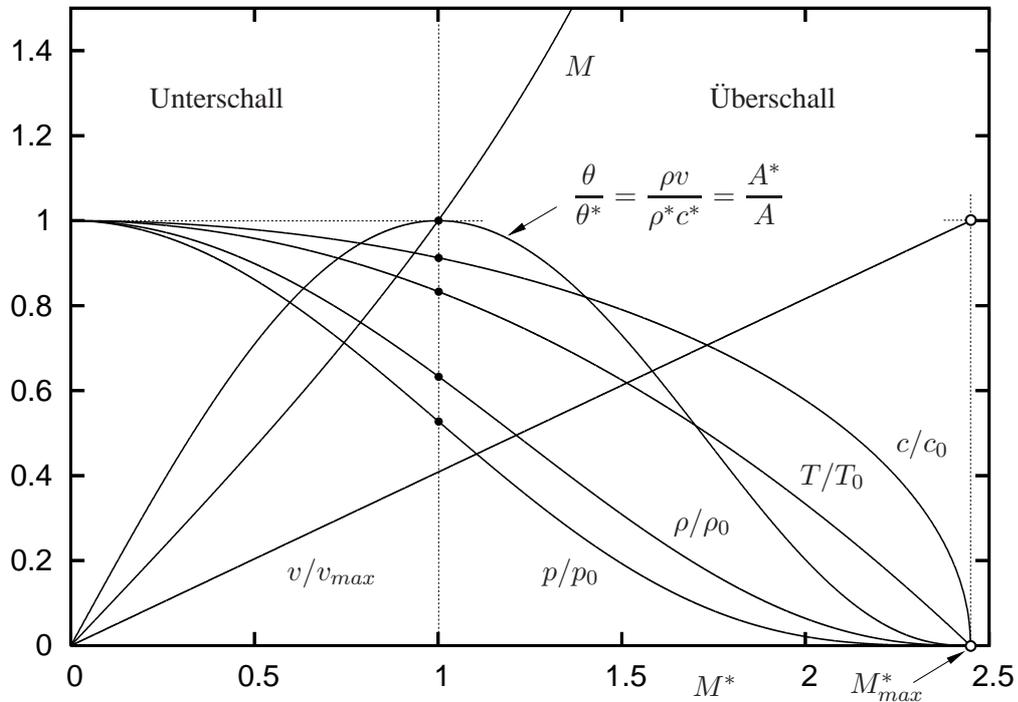


Abbildung 18: Feldgrößen im Stromfaden bei isentroper, stationärer Strömung für $\kappa = 1.4$ (Luft). • ... kritische Verhältnisse.

Für Strömungen mit Verdichtungsstoß gilt mit der Stoßlösung (162)

$$\frac{\hat{v}}{v} = 1 - \frac{2}{\kappa + 1} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \Big| \cdot v^2$$

$$\rightarrow \hat{v}v = v^2 - \frac{2}{\kappa + 1} v^2 + \frac{2}{\kappa + 1} c^2 = \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa + 1} \underbrace{\left(\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\kappa - 1} \right)}_{const \text{ (ES)}} = \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa + 1} \left(\frac{c^{*2}}{2} + \frac{c^{*2}}{\kappa - 1} \right)$$

$$= c^{*2}.$$

Wegen $T_0 = \hat{T}_0$ gilt auch $c^* = \hat{c}^*$ und daher $v\hat{v} = c^*\hat{c}^*$ oder

$$M^* \hat{M}^* = 1, \tag{183}$$

was als *Prandtl-Relation* für senkrechte Verdichtungsstöße bezeichnet wird.

Unterschall						
M	M^*	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho v}{\rho^* c^*}$	$\beta = \sqrt{1 - M^2}$
0	0	1	1	1	0	1
0.05	0.055	0.998	0.999	1.000	0.086	0.999
0.1	0.109	0.993	0.995	0.998	0.172	0.995
0.15	0.164	0.984	0.989	0.996	0.256	0.989
0.2	0.218	0.973	0.980	0.992	0.337	0.980
0.25	0.272	0.958	0.969	0.988	0.416	0.968
0.3	0.326	0.939	0.956	0.982	0.491	0.954
0.35	0.379	0.919	0.941	0.976	0.562	0.937
0.4	0.431	0.896	0.924	0.969	0.629	0.917
0.45	0.483	0.870	0.906	0.961	0.690	0.893
0.5	0.535	0.843	0.885	0.952	0.746	0.866
0.55	0.585	0.814	0.863	0.943	0.797	0.835
0.6	0.635	0.784	0.840	0.933	0.842	0.800
0.65	0.684	0.753	0.816	0.922	0.881	0.760
0.7	0.732	0.721	0.792	0.911	0.914	0.714
0.75	0.779	0.689	0.766	0.899	0.941	0.661
0.8	0.825	0.656	0.740	0.887	0.963	0.600
0.85	0.870	0.623	0.714	0.874	0.980	0.527
0.9	0.915	0.591	0.687	0.861	0.991	0.436
0.95	0.958	0.559	0.660	0.847	0.998	0.312
1.0	1.000	0.528	0.634	0.833	1.000	0.000
Überschall						
M	M^*	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho v}{\rho^* c^*}$	$\frac{\hat{p}_0}{p_0}$
1.0	1.000	0.528	0.634	0.833	1.000	1.000
1.05	1.041	0.498	0.608	0.819	0.998	1.000
1.1	1.082	0.468	0.582	0.805	0.992	0.999
1.2	1.158	0.412	0.531	0.776	0.970	0.993
1.3	1.231	0.361	0.483	0.747	0.938	0.979
1.4	1.300	0.314	0.437	0.718	0.897	0.958
1.5	1.365	0.272	0.395	0.690	0.850	0.930
1.6	1.425	0.235	0.356	0.661	0.800	0.895
1.7	1.483	0.203	0.320	0.634	0.748	0.856
1.8	1.536	0.174	0.287	0.607	0.695	0.813
1.9	1.586	0.149	0.257	0.581	0.643	0.767
2.0	1.633	0.128	0.230	0.556	0.593	0.721
2.5	1.826	0.059	0.132	0.444	0.379	0.499
3.0	1.964	0.027	0.0762	0.357	0.236	0.328
3.5	2.064	0.0131	0.0452	0.290	0.147	0.213
4.0	2.138	0.00659	0.0277	0.238	0.0933	0.139
4.5	2.194	0.00346	0.0174	0.198	0.0604	0.0917
5.0	2.236	0.00189	0.0113	0.167	0.0400	0.0618
6.0	2.295	0.000633	0.00519	0.122	0.0188	0.0297
7.0	2.333	0.000242	0.00261	0.0926	0.00960	0.0153
8.0	2.359	0.000102	0.00141	0.0725	0.00526	0.00849
9.0	2.377	0.0000474	0.000815	0.0581	0.00306	0.00496
10	2.391	0.0000236	0.000495	0.0476	0.00187	0.00304
20	2.435	0.000000209	0.0000170	0.0123	0.0000651	0.000108
∞	2.4495	0	0	0	0	0

Tabelle 3: Feldgrößen im Stromfaden bei isentroper, stationärer Strömung für $\kappa = 1.4$ (Luft).

Anwendungsbeispiel: Ausströmen aus einem Kessel

Gegeben sei ein großer, gasgefüllter Druckkessel (Ruhezustand p_0, T_0, κ, c_p), der Außendruck ist $p_a < p_0$. Gesucht ist der aus einer kleinen Bohrung (Querschnittsfläche A) stationär austretende Massenstrom \dot{m} sowie die Feldgrößen in der Austrittsöffnung (isentropie Strömung). Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

(i) $\frac{p_a}{p_0} > \frac{p^*}{p_0}$... Unterschallströmung

Der Druck in der Ausflußöffnung stimmt mit dem Außendruck überein: $p = p_a$.

Rechengang: aus (180) Bestimmung von M (bzw. T, ρ, c, v) und aus (181) M^* in der Öffnung, daraus mit (182) das Massenstromdichteverhältnis θ/θ^* . Der austretende Massenstrom \dot{m} berechnet sich dann zu

$$\dot{m} = \frac{\rho v}{\rho^* c^*} \rho^* c^* A = \frac{\theta}{\theta^*} \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \rho_0 c_0 A \quad (184)$$

(ii) $\frac{p_a}{p_0} \leq \frac{p^*}{p_0}$... Schallströmung

Hier ist die Strömung in der Austrittsöffnung kritisch, $M = 1, p = p^*$, etc., *unabhängig* vom Außendruck $p_a \leq p^*$. An der Strömung im Kessel bis zur Öffnung ändert sich nichts, wenn der Außendruck im Bereich $0 \leq p_a \leq p^*$ variiert wird, da keine Information durch die Öffnung in den Kessel gelangen kann. Der austretende Massenstrom ist dabei der maximal mögliche und der Öffnungsquerschnitt gleich dem kritischen Querschnitt $A = A^*$:

$$\dot{m} = \dot{m}_{max} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \rho_0 c_0 A. \quad (185)$$

Für Luft ergibt sich bei Raumtemperatur ($T_0 = 293$ K) $\dot{m}_{max}/(\rho_0 A) \doteq 19.71/(\text{cm}^2 \text{ s})$.

Anwendungsbeispiel: Laval-Düse

Gegeben ist der Querschnittsverlauf $A(x)$, der Außendruck hinter der Düse p_a und der Ruhedruck vor der Düse.

(wir noch ergänzt)

Abbildung 19: Druckverläufe in einer Laval-Düse.

13 Dissipative Stoßstruktur

In der unmittelbaren Umgebung einer Stoßunstetigkeit müssen wegen der dort auftretenden unendlichen Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten viskose Spannungen und Wärmeströme eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen. Die Berücksichtigung von Dissipation und Wärmeleitung führt zur *Regularisierung* der Stoßunstetigkeit, d.h. zu stetigen Feldgrößenverläufen, dem *thermoviskosen Stoßprofil*. Bemerkenswert ist, dass man dafür – unter gewissen Annahmen – eine exakte Lösung der Navier–Stokes-Gleichung für kompressible Strömungen erhält. Ausgangspunkt ist die Massen-, Impuls- und Leistungsbilanz in differentieller Form für (lokal) eindimensionale stationäre Strömung eines Newtonschen Fluides in x -Richtung

$$\frac{d}{dx}(\rho v) = 0, \quad (186)$$

$$\rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{d\sigma'_{11}}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dx} \left[(\bar{\mu} + 2\mu) \frac{dv}{dx} \right], \quad (187)$$

$$\rho v \frac{dh}{dx} - v \frac{dp}{dx} = \sigma'_{11} \frac{dv}{dx} - \frac{dq}{dx} = (\bar{\mu} + 2\mu) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right). \quad (188)$$

Im Fernfeld $x \rightarrow \mp\infty$ nehmen die Größen ρ , v , p und T die konstanten Werte vor und nach dem Stoß an. Berücksichtigt man in der Impulsbilanz die Massenbilanz, kann man

$$\frac{d}{dx} \left[\rho v^2 + p - (\bar{\mu} + 2\mu) \frac{dv}{dx} \right] = 0 \quad (189)$$

schreiben, analog ergibt die Verwendung der Massen- und Impulsbilanz in der Leistungsbilanz

$$\rho v \frac{dh}{dx} + h \frac{d}{dx}(\rho v) = v \overbrace{\left\{ -\rho v \frac{dv}{dx} + \frac{d}{dx} \left[(\bar{\mu} + 2\mu) \frac{dv}{dx} \right] \right\}}^{\frac{dp}{dx}} + (\bar{\mu} + 2\mu) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right),$$

$\frac{d(v^2/2)/dx}$

und damit

$$\frac{d}{dx} \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + h \right) - (\bar{\mu} + 2\mu) v \frac{dv}{dx} - \lambda \frac{dT}{dx} \right] = 0. \quad (190)$$

Die Gleichungen (186), (189) und (190) sind in *Divergenz-* (*Erhaltungs-* bzw. *konservativer*) *Form* und können daher unmittelbar integriert werden:

$$\rho v = \theta = \text{const},$$

$$\rho v^2 + p - (\bar{\mu} + 2\mu) \frac{dv}{dx} = a = \text{const}, \quad (191)$$

$$\rho v \left(\frac{v^2}{2} + h \right) - (\bar{\mu} + 2\mu) v \frac{dv}{dx} - \lambda \frac{dT}{dx} = b = \text{const}.$$

Im Fernfeld $x \rightarrow \pm\infty$ verschwinden die Ableitungen dv/dx , $dT/dx \rightarrow 0$, in diesem Limit reduzieren sich die Gleichungen (191) auf die integralen Erhaltungsgleichungen (160), aus denen

die Stoßlösung (162) folgt. Die im Allgemeinen T - und p -abhängigen Stoffkenngrößen $\bar{\mu}$, μ , λ und c_p werden im folgenden als konstant angenommen, weiters wählen wir die modifizierte Prandtl-Zahl \bar{Pr} gleich 1,

$$\bar{Pr} := \frac{(\bar{\mu} + 2\mu)c_p}{\lambda} = 1, \quad (192)$$

was für Luft in sehr guter Näherung (Abweichung $\approx 3\%$) zutrifft. Die dritte Gleichung (191) wird damit zu

$$-\frac{\lambda}{c_p} \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} + h \right) = b - \theta \left(\frac{v^2}{2} + h \right),$$

woraus

$$\frac{v^2}{2} + h = \frac{b}{\theta} + k \exp \left(\frac{c_p \theta}{\lambda} x \right)$$

durch Integration folgt. Da $c_p \theta / \lambda > 0$ ist, zwingt die Forderung nach Beschränktheit der Lösung für $x \rightarrow \infty$ die Integrationskonstante zu $k = 0$. Daraus resultiert die Konstanz der spezifischen Gesamtenthalpie an jeder beliebigen Stelle x des Stoßprofils,

$$\frac{v^2}{2} + h = \frac{b}{\theta} = \text{const.} \quad (193)$$

Gemäß der dritten Gleichung (191) kompensiert damit an jeder Stelle x die Wärmeleitung die Dissipation durch Reibung,

$$-(\bar{\mu} + 2\mu) v \frac{dv}{dx} - \lambda \frac{dT}{dx} = 0.$$

Die Umformung der zweiten Gleichung (191) unter Verwendung der thermodynamischen Beziehungen für ein ideales Gas (161) mit (193),

$$\begin{aligned} -(\bar{\mu} + 2\mu) \frac{dv}{dx} &= a - \theta \left(v + \frac{p}{\rho v} \right) = a - \theta \left(v + \frac{(\kappa - 1)(h + h_0)}{\kappa v} \right) \\ &= a - \theta \left(\frac{\kappa + 1}{2\kappa} v + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left(\frac{b}{\theta} + h_0 \right) \frac{1}{v} \right), \end{aligned} \quad (194)$$

wird für die Bestimmung der Integrationskonstanten a und b unter Beachtung von $dv/dx \rightarrow 0$, $v \rightarrow v_{1,2}$ für das Fernfeld $x \rightarrow \mp \infty$ herangezogen:

$$a = \frac{1 + \kappa}{2\kappa} \theta (v_1 + v_2), \quad b = \frac{1 + \kappa}{2(\kappa - 1)} \theta v_1 v_2 - \theta h_0. \quad (195)$$

Einsetzen von a und b in (194) führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(\kappa + 1)}{2\kappa} \frac{\theta}{(\bar{\mu} + 2\mu)} \frac{(v - v_1)(v - v_2)}{v}, \quad (196)$$

woraus durch Integration die implizite Darstellung des Stoßprofils (R. Becker, 1922)

$$\alpha x = \frac{v_1 \ln(v_1 - v) - v_2 \ln(v - v_2)}{v_1 - v_2}, \quad \alpha := \frac{(\kappa + 1)}{2\kappa} \frac{\theta}{(\bar{\mu} + 2\mu)} \quad (197)$$

folgt, Abb. 20. Zur Bestimmung der Stoßdicke δ verwenden wir die von Prandtl eingeführte Definition

$$\delta := -\frac{v_1 - v_2}{(dv/dx)|_{max}}. \quad (198)$$

Die Stelle des Stoßprofilwendepunktes (x_m, v_m) berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} = \alpha \frac{dv}{dx} \left(1 - \frac{v_1 v_2}{v^2}\right) = 0 &\Rightarrow v_m = \sqrt{v_1 v_2}, \\ \alpha x_m = \frac{v_1 \ln(v_1 - v_m) - v_2 \ln(v_m - v_2)}{v_1 - v_2}, \quad \frac{dv}{dx}\Big|_{max} &= \alpha \frac{(v_m - v_1)(v_m - v_2)}{v_m}, \end{aligned}$$

damit ergibt sich unter Verwendung der Stoßlösung (162)

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{v_1 + v_2 + 2v_m}{\alpha(v_1 - v_2)} = \frac{1 + v_2/v_1 + 2\sqrt{v_2/v_1}}{\alpha(1 - v_2/v_1)} \\ &= \frac{1}{\alpha(M_1^2 - 1)} \left[1 + M_1^2 \left(\kappa + (1 + \kappa) \sqrt{\frac{2 + (\kappa - 1)M_1^2}{(\kappa + 1)M_1^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (199)$$

Für die Grenzfälle schwacher ($M_1 \rightarrow 1$) und starker ($M_1 \rightarrow \infty$) Stöße erhält man die Entwicklungen

$$\delta \sim \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1 + \kappa}{M_1 - 1} + O(1) \right], & M_1 \rightarrow 1, \\ \frac{1}{\alpha} \left[\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1} + O\left(\frac{1}{M_1^2}\right) \right], & M_1 \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (200)$$

woraus man entnehmen kann, dass die Stoßdicke δ bei zunehmender Stoß-Mach-Zahl M_1 abnimmt. Vermessungen des Stoßprofils zeigen gute Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Theorie bis zu $M_1 \lesssim 2$, bei höheren Werten von M_1 eignen sich die Navier–Stokes Gleichungen nicht mehr zur Beschreibung der inneren Struktur von Stößen, weil die dabei auftretenden Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht zu groß werden.

Zur Abschätzung der Größenordnung von δ wählen wir $M_1 = 1.2$ und als Strömungsmedium Luft bei 20 °C ($\rho = 1.205 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 1005 \text{ J/(kg K)}$, $\kappa = 1.4$, $\lambda = 0.0257 \text{ W/(m K)}$):

$$\delta \sim \frac{2\kappa l_{tv}}{M_1 - 1} = 14 l_{tv} \approx 7 \cdot 10^{-7} \text{ m},$$

dabei ist die *thermoviskose Länge* l_{tv} unter Berücksichtigung der Annahme $\bar{Pr} = 1$ durch

$$l_{tv} := \frac{\bar{\mu} + 2\mu}{\rho_1 v_1} = \frac{\lambda}{\rho_1 v_1 c_p} \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (201)$$

gegeben. Ein Vergleich von δ mit der *mittleren freien Weglänge* $l_f \approx 70 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ in Luft zeigt, dass selbst bei schwachen Stößen die Stoßdicke so gering ist, dass die Grenze der Anwendbarkeit der Kontinuumsmechanik erreicht ist. Das maßgebliche Kriterium dafür ist der Wert des Verhältnisses zwischen mittlerer freier Weglänge l_f und einer charakteristischen Abmessung L

des betrachteten physikalischen Vorganges in Form der *Knudsen-Zahl*

$$Kn := \frac{l_f}{L} \longrightarrow \begin{cases} \ll 1 & \dots \text{Kontinuumsmechanik,} \\ \gg 1 & \dots \text{kinetische Gastheorie,} \end{cases} \quad (202)$$

im konkreten Fall ist $Kn = l_f/\delta \approx 10^{-1}$. Im Rahmen der von uns betrachteten Kontinuumsmechanik lässt sich daher in sehr guter Näherung ein Stoß als Unstetigkeit ansehen.

Zur Bestimmung des Entropieverlaufes im Stoßprofil ziehen wir die Leistungsbilanz (70), (71) heran:

$$\rho T v \frac{ds}{dx} = \Phi + \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right), \quad \Phi = (\bar{\mu} + 2\mu) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2, \quad (203)$$

daraus

$$\theta \frac{ds}{dx} = \underbrace{\frac{(\bar{\mu} + 2\mu)}{T} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2}_{\text{Entropieproduktion } \rho \dot{\sigma}, (56)} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda}{T} \frac{dT}{dx} \right).$$

Integration von Zustand ① vor bis ② nach dem Stoß ergibt den Entropiezuwachs $\{s\}$,

$$\theta \{s\} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \dot{\sigma} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(\bar{\mu} + 2\mu)}{T} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (204)$$

Unter Verwendung von $h = c_p T + h_0$, (192), (193) und (201) erhält man

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\theta T} \left[(\bar{\mu} + 2\mu) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda}{c_p} \frac{d}{dx} \left(v \frac{dv}{dx} \right) \right] = -l_{tv} \frac{v}{T} \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad (205)$$

woraus man auf ein *Entropiemaximum* an der Stelle x_m schließen kann, Abb. 20. Dort sind Wärmestrom und Dissipation durch Reibung maximal.

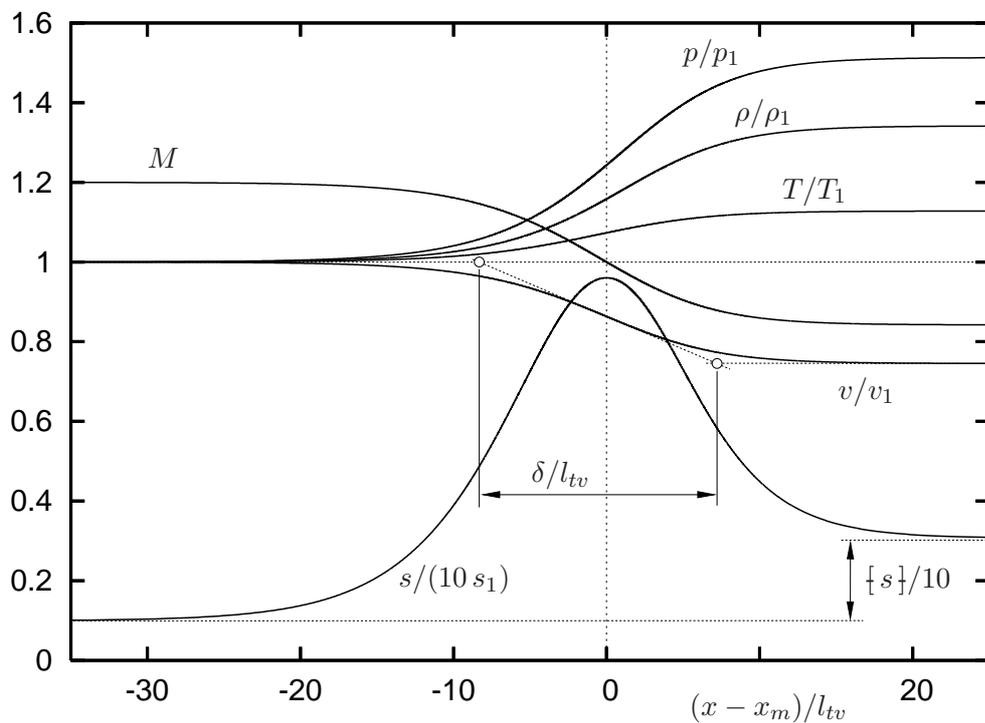


Abbildung 20: Feldgrößenverläufe im thermoviskosen Verdichtungsstoß in Luft. Anströmzustand $x \rightarrow -\infty$: $M_1 = 1.2$, $T_1 = 293.15$ K, $\rho_1 = 1.205$ kg/m³, $v_1 \approx 412$ m/s, $p_1 \approx 1.014$ bar. Abströmzustand $x \rightarrow \infty$: $M_2 \approx 0.842$, $T_2 \approx 331$ K, $\rho_2 \approx 1.617$ kg/m³, $v_2 \approx 307$ m/s, $p_2 = 1.535$ bar, $\{s\} \approx 2.075$ J/(kg K). Definition der Stoßdicke δ , (198).

14 Ebene (in)kompressible Potentialströmungen

Wir betrachten die reibungsfreie ($Re = \infty$), stationäre ($Sr = 0$), adiabate Strömung eines idealen Gases ohne Schwerkrafteinfluß in der x, y -Ebene. Die Massen-, Impuls- (Euler-Gleichung) und Leistungsbilanz lauten dafür

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0. \quad (206)$$

Die Leistungsbilanz reduziert sich auf Isentropie $s = const$ entlang einer Stromlinie $\psi = const$, Zustandsänderungen eines idealen Gases genügen daher der Beziehung $p/\rho^{\kappa} = const$. Fordert man zusätzlich, wie im weiteren angenommen, $s(\psi) = const$ d.h. $\nabla s = \mathbf{0}$, dann ist die Strömung nach dem Croccoschen Wirbelsatz (81)

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = T \nabla s = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

wegen $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}$ drehungsfrei: $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Folglich kann die Strömung durch ein Geschwindigkeitspotential $\Phi(x, y)$ mit

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} \quad (207)$$

beschrieben werden, vergl. (51). Unter Verwendung der Impulsbilanz ergibt

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial p}}_{1/c^2} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{c^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\rho}{c^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

in die Massenbilanz eingesetzt

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{uv}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,$$

und unter Verwendung der Potentialfunktion die *gasdynamische Gleichung*

$$\Phi_{xx} \left(1 - \frac{\Phi_x^2}{c^2} \right) + \Phi_{yy} \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{c^2} \right) - 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{c^2} \Phi_{xy} = 0, \quad (208)$$

$$\text{bzw.} \quad \Delta \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = \frac{1}{c^2} (\Phi_{xx} \Phi_x^2 + \Phi_{yy} \Phi_y^2 + 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy}).$$

Diese nichtlineare Gleichung verknüpft Geschwindigkeiten in Form der lokalen Größen Φ und c miteinander, Druck und Dichte wurden aus den Grundgleichungen (206) eliminiert. Im Grenzfall *inkompressibler* Strömung $c \rightarrow \infty$, $M = |\mathbf{v}|/c \rightarrow 0$ erhält man daraus die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta \Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad (209)$$

den einfachsten Vertreter einer partiellen Differentialgleichung von *elliptischem* Typus. Dabei macht sich eine in einem beliebigen Punkt eingebrachte Störung im *gesamten* Strömungsfeld bemerkbar.

Die zur Gleichungslösung weiters benötigten Randbedingungen für die uns im folgenden inter-

essierenden Umströmungsprobleme in einer Parallelanströmung $u_\infty \mathbf{e}_x$ lauten im Fernfeld

$$x \rightarrow -\infty : \quad \Phi_x \rightarrow u_\infty, \quad \Phi_y \rightarrow 0, \quad (210)$$

an einer festen, impermeablen Wand

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad (211)$$

d.h. eine Körperkontur ist zugleich Stromlinie.

14.1 Schwach gestörte Parallelströmungen

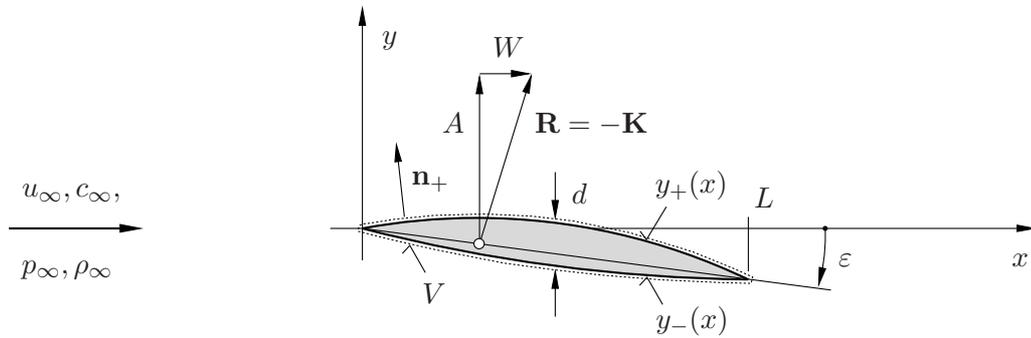


Abbildung 21: Dünnes, schwach angestelltes Tragflügelprofil in Parallelanströmung: ungestörte Anströmung $u_\infty \mathbf{e}_x$, Dickenparameter $\tau = d/L \ll 1$, Anstellwinkel $\epsilon \ll 1$, Profilkordinatenfunktionen für Profilober- und Unterseite $y_\pm(x)$.

Für durch die Geometrieparameter $\epsilon, \tau \rightarrow 0$ schwach gestörte Parallelanströmung bietet sich eine Entwicklung der Feldgrößen um den Anströmzustand an, Abb. 21:

$$\begin{aligned} c(x, y) &\sim c_\infty + O(\epsilon, \tau), \quad p(x, y) \sim p_\infty + O(\epsilon, \tau), \quad \rho(x, y) \sim \rho_\infty + O(\epsilon, \tau), \\ \Phi(x, y) &= u_\infty x + \varphi(x, y) \end{aligned} \quad (212)$$

hier bezeichnet $\varphi(x, y) \sim O(\epsilon, \tau)$ das *Störpotential*. Die erste Gleichung (208) wird damit über

$$\varphi_{xx} \left(1 - \frac{u_\infty^2 + 2u_\infty \varphi_x + O(\epsilon^2, \epsilon\tau, \tau^2)}{c_\infty^2 + O(\epsilon, \tau)} \right) + \varphi_{yy} (1 + O(\epsilon^2, \dots)) + O(\epsilon^2, \dots) = 0$$

in führender Ordnung zur *linearisierten gasdynamischen Gleichung*

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad M_\infty = \frac{u_\infty}{c_\infty} \gtrsim 1. \quad (213)$$

Falls – wie in vielen technisch wichtigen Fällen – die Anströmung schallnahe $M_\infty \approx 1$ erfolgt, darf der Term $\propto \varphi_x \varphi_{xx}$ gegenüber $(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx}$ nicht vernachlässigt werden. D.h. selbst schwache Störungen einer schallnahen Parallelströmung werden durch eine *nichtlineare* (wenn auch vereinfachte) Version der gasdynamischen Gleichung beschrieben (\rightarrow *schallnahe* oder *Kármán–Guderley-Gleichung*, siehe [11], [27]), welche hier nicht weiter behandelt wird.

Für die Angabe der Druckverteilung in einer Strömung wird oft der *Druckbeiwert* $c_p(x, y)$

$$c_p := \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2 / 2} \quad (214)$$

herangezogen. Im vorliegenden Fall ergibt die Linearisierung der Impulsgleichung für die x -Richtung und anschließende Integration,

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \sim \rho_\infty (u_\infty \varphi_{xx} + O(\varepsilon^2, \dots)) \quad \left| \int_{-\infty}^x \dots dx \right. \\ &\Rightarrow -(p - p_\infty) = \rho_\infty u_\infty \varphi_x \sim O(\varepsilon, \tau), \end{aligned}$$

die Näherung

$$c_p \sim -2 \frac{\varphi_x}{u_\infty} + O(\varepsilon^2, \dots). \quad (215)$$

(i) **Schwach gestörte Unterschallströmung** $M_\infty < 1$

Wendet man eine Affin-Transformation (*Prandtl–Glauert-Transformation*) gemäß

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \beta y, \quad \beta := \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad \bar{\varphi} = \gamma \varphi \quad (216)$$

mit dem *Prandtl-Faktor* $1 \geq \beta > 0$ auf die linearisierte gasdynamische Gleichung (213) an, erhält man die Laplace-Gleichung für inkompressible Strömung

$$\bar{\Delta} \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}} = 0. \quad (217)$$

Als Randbedingung an der undurchlässigen Körperkontur ergibt sich

$$\frac{dy_\pm}{dx} = \frac{v(x, y_\pm)}{u(x, y_\pm)} \sim \frac{\varphi_y(x, 0_\pm)}{u_\infty} + \dots, \quad (218)$$

vergleicht man *dasselbe* Profil in kompressibler und inkompressibler Strömung,

$$\frac{d\bar{y}_\pm}{d\bar{x}} = \frac{\bar{v}(\bar{x}, \bar{y}_\pm)}{\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}_\pm)} \sim \frac{\bar{\varphi}_{\bar{y}}(\bar{x}, 0_\pm)}{u_\infty} + \dots = \frac{\gamma \varphi_y(x, 0_\pm)}{u_\infty} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \bar{y}}}_{1/\beta} + \dots \equiv \frac{\varphi_y(x, 0_\pm)}{u_\infty} + \dots,$$

dann ist $\gamma = \beta$ zu wählen. Zusammenfassend erhält man für die Feldgrößen

$$\begin{aligned} u(x, y) - u_\infty &= \varphi_x = \frac{\bar{\varphi}_{\bar{x}}}{\beta} = \frac{\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) - u_\infty}{\beta}, \\ v(x, y) &= \varphi_y = \bar{\varphi}_{\bar{y}} = \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}), \\ c_p(x, y) &= -2 \frac{\varphi_x}{u_\infty} + \dots = \frac{\bar{c}_p(\bar{x}, \bar{y})}{\beta}. \end{aligned} \quad (219)$$

Schwach gestörte kompressible Unterschallparallelströmung ($M_\infty < 1$) kann daher auf die Lösung der Laplace-Gleichung ($M_\infty \rightarrow 0$) zurückgeführt werden. Dabei sind die z.B. von

einem Profil verursachten Störungen im kompressiblen Fall *stärker* und in y -Richtung *weitreichender* als die vom selben Profil in inkompressibler Strömung hervorgerufenen.

(ii) **Schwach gestörte Überschallanströmung** $M_\infty > 1$

Hier ist die linearisierte gasdynamische Gleichung (213)

$$(M_\infty^2 - 1) \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0 \quad (220)$$

von *hyperbolischem* Typus, sie entspricht der Wellengleichung. In die Strömung eingebrachte Störungen machen sich nur in einem *beschränkten* Raumgebiet, dem Einflußgebiet, bemerkbar. Die Gleichung (213) wird durch die *D'Alembertsche Lösung*

$$\varphi(x, y) = F(\xi) + G(\eta), \quad \xi = x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad \eta = x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1} \quad (221)$$

mit den beliebigen, zwei mal stetig differenzierbaren Funktionen F, G erfüllt. Hier bezeichnen Geraden mit $\xi = \text{const}$ bzw. $\eta = \text{const}$ links- bzw. rechtslaufende *Mach-Linien* (*Wellenfronten*, *Charakteristiken*, *'Informationslinien'*), die unter dem Mach-Winkel α_∞ geneigt sind, Fig. 22.

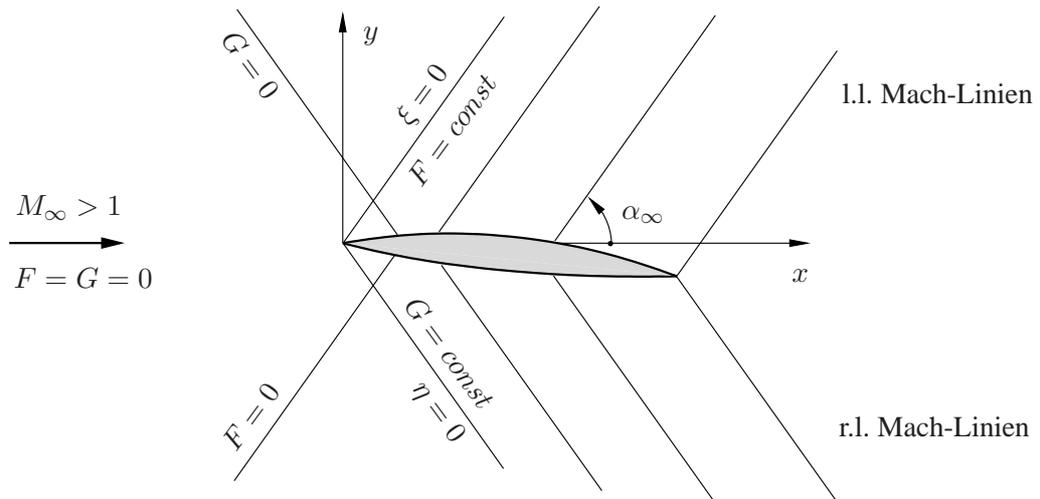


Abbildung 22: Wellenfeld eines Tragflügelprofils in schwach gestörter Überschallanströmung.

Man erhält

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\eta, \xi = \text{const}} = \pm \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \tan \alpha_\infty, \quad (222)$$

aus geometrischen Überlegungen, Abb. 23,

$$\sin \alpha_\infty = \frac{c_\infty}{u_\infty} = \frac{1}{M_\infty} \quad (223)$$

sowie den Wertebereich

$$1 \leq M_\infty \leq \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \geq \alpha_\infty \geq 0. \quad (224)$$

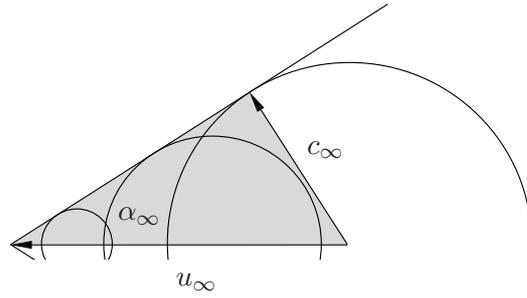


Abbildung 23: Mach-Kegel: die Einhüllende der Elementarwellen stellt die Wellenfront dar, sie kann als unendlich schwacher Stoß interpretiert werden (vergl. Definition der Schallgeschwindigkeit).

Anwendungsbeispiel: angestelltes Parabelbogenzweieck in Überschallströmung

Gegeben sind die Profilkordinatenfunktionen eines Tragflügelprofils lt. Abb. 21, 22

$$y_{\pm}(x) = (f_w \pm 2) \tau x \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \varepsilon x, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (225)$$

mit dem Wölbungs-, Dicken- und Anstellparameter $f_w \sim O(1)$, $\tau \ll 1$ und $\varepsilon \ll 1$ sowie der Profiltiefe L . Für gegebene Anström-Mach-Zahl $M_\infty > 1$ sind die Feldgrößenstörungen sowie die Strömungskraftbeiwerte c_p , c_a und c_w zu bestimmen.

Gemäß Abb. 22 können die Einflußgebiete ober- und unterhalb des Profils *unabhängig* voneinander behandelt werden.

(i) Bereich oberhalb des Profils

Hier gilt $G \equiv 0$, da die rechtslaufenden Mach-Linien aus dem ungestörten Bereich der Anströmung kommen. Das Störpotential ist daher durch

$$\varphi(x, y) = F(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1})$$

gegeben. Die Randbedingung an der Profiloberseite lautet

$$\frac{v(x, y_+)}{u(x, y_+)} \sim \frac{v(x, 0_+)}{u_\infty} + \dots = \frac{\varphi_y(x, 0_+)}{u_\infty} = \frac{dy_+}{dx} = (f_w + 2) \tau \left(1 - \frac{2x}{L}\right) - \varepsilon,$$

woraus

$$\varphi_y(x, 0_+) = -\sqrt{M_\infty^2 - 1} F'(x) = u_\infty \frac{dy_+}{dx}$$

und nach Integration

$$F(x) = -\frac{u_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} y_+(x)$$

folgt. Endgültig ergibt sich

$$\varphi(x, y) = -\frac{u_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} y_+(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1}), \quad (226)$$

und daraus die Feldgrößenstörungen (' bedeutet Ableitung nach dem Argument)

$$\begin{aligned} u(x, y) - u_\infty = \varphi_x &= -\frac{u_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} y'_+(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1}), \\ v(x, y) = \varphi_y &= u_\infty y'_+(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1}). \end{aligned} \quad (227)$$

(i) *Bereich unterhalb des Profils*

Hier gilt $F \equiv 0$, die Rechnung ist sonst analog zu (i) durchzuführen.

Zusammenfassend läßt sich ganz allgemein die *Ackeret-Beziehung*

$$u(x, y) - u_\infty = \mp \frac{v(x, y)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, \quad y \geq 0 \quad (228)$$

für den Zusammenhang der Feldgrößenstörungen im Bereich ober- oder unterhalb des Profils angeben.

Die zweckmäßige Darstellung der Auftriebs- und Widerstandskraft erfolgt im aerodynamischen Kontext in dimensionsloser Form über die Strömungskraftbeiwerte *Auftriebsbeiwert* c_a

$$c_a := \frac{A/(bL)}{\rho_\infty u_\infty^2/2} \quad (229)$$

und *Widerstandsbeiwert* c_w

$$c_w := \frac{W/(bL)}{\rho_\infty u_\infty^2/2}, \quad (230)$$

dabei ist bL eine geeignet gewählte Bezugsfläche. Im vorliegenden Fall bezeichnet L die Profiltiefe und b die Spannweiteinheit, Abb. 21.

Die Anwendung der integralen Impulsbilanz auf das in Abb. 21 eingezeichnete Kontrollvolumen V ergibt

$$\mathbf{R} = W \mathbf{e}_x + A \mathbf{e}_y = -\mathbf{K} = -\oint_{\partial V} p \mathbf{n} dO, \quad dO = b ds,$$

nach Division durch $bL\rho_\infty u_\infty^2/2$ weiters

$$\begin{aligned} c_w \mathbf{e}_x + c_a \mathbf{e}_y &= -\oint_{\partial V} \underbrace{\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2/2}}_{c_p} \frac{\mathbf{n}}{L} ds \sim -\frac{1}{L} \left[\int_0^L c_{p-} \mathbf{n}_- dx + \int_L^0 c_{p+} \mathbf{n}_+ (-dx) \right] \\ &= -\frac{1}{L} \int_0^L (c_{p-} \mathbf{n}_- + c_{p+} \mathbf{n}_+) dx \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen $c_{p\pm} = c_p(x, 0_\pm)$. Für schwach gestörte Parallelströmung ergeben sich mit dem Normalvektor für Profilober- und Unterseite

$$\mathbf{n}_\pm(x) \doteq \mp y'_\pm(x) \mathbf{e}_x \pm \mathbf{e}_y \quad (231)$$

die Darstellungen

$$c_a \sim -\frac{1}{L} \int_0^L (-c_{p-} + c_{p+}) dx, \quad c_w \sim -\frac{1}{L} \int_0^L (c_{p-} y'_- + c_{p+} y'_+) dx. \quad (232)$$

Unter Verwendung von (215),

$$c_{p\pm} \sim -2 \frac{u(x, 0_{\pm}) - u_{\infty}}{u_{\infty}} = \pm \frac{2y'_{\pm}(x)}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}, \quad (233)$$

erhält man damit für das gegebene Profil (225) die Resultate

$$c_a \sim -\frac{2}{L\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} (y_- + y_+) \Big|_0^L = \frac{4\varepsilon}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}, \quad (234)$$

$$c_w \sim \frac{2}{L\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \int_0^L (y'_-{}^2 + y'_+{}^2) dx = \frac{4}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \left[\frac{\tau^2}{3} (f_w^2 + 4) + \varepsilon^2 \right]. \quad (235)$$

Daraus sieht man, dass unter den gegebenen Voraussetzungen und Näherungen der Auftrieb *unabhängig* von der Profilform (Wölbung f_w , Dicke τ) ist und der *minimale* Widerstand bei gegebenem Auftrieb für $\tau = 0$ (dünne Platte) erreicht wird. Trotz Vernachlässigung von Reibung ergibt sich im Allgemeinen ein nichtverschwindender Widerstand, weil sich die vom Profil ausgehenden Störungen ungedämpft bis ins Unendliche entlang rechts- und linkslaufender Mach-Linien ausbreiten.

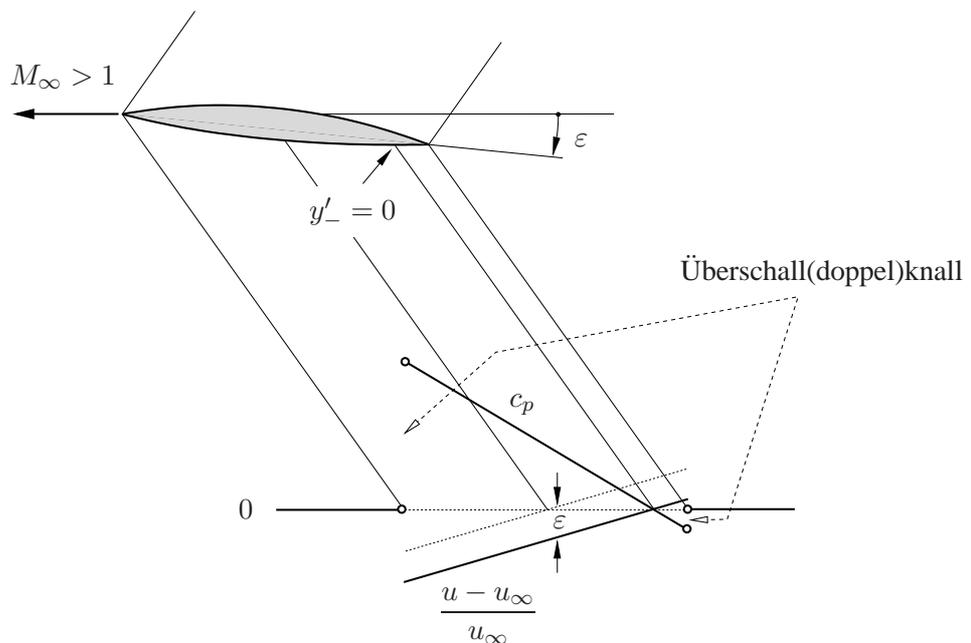


Abbildung 24: Wellenfeld und Feldgrößenstörungen eines Tragflügels (Parabelbogenzweieck) im Überschallflug.

14.2 Inkompressible Potentialströmungen

Es gelten nach wie vor die Voraussetzungen einer ebenen, stationären, reibungsfreien Strömung ohne Schwerkrafteinfluß und Wärmeleitung, zusätzlich gelte noch $\rho = \text{const}$. Die Massen- und Impulsbilanz sowie die Drehungsfreiheit lauten

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (236)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (237)$$

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (238)$$

Aus der Impulsbilanz erhält man die Bernoulli-Gleichung (43) entlang einer Stromlinie,

$$p + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} = \text{const}. \quad (239)$$

Definiert man mit

$$w(z) := u(x, y) - iv(x, y), \quad z = x + iy \quad (240)$$

die *komplexe Geschwindigkeit*, dann stellen (236) und (238) die *Cauchy-Riemannschen* Differentialgleichungen für w dar. Danach ist $w(z)$ analytisch (d.h. ist in jedem Punkt komplex differenzierbar und besitzt daher eine Potenzreihe) in einem einfach zusammenhängenden Gebiet in der Ebene. Die Stammfunktion von $w(z)$ ist das *komplexe Potential*

$$F(z) := \Phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad w = \frac{dF}{dz}, \quad (241)$$

es setzt sich aus Potential- und Stromfunktion zusammen, wobei

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (242)$$

die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für $F(z)$ darstellen. Durch Differenzieren und wechselseitige Elimination erkennt man, dass u , v , Φ und ψ die Laplace-Gleichung erfüllen, sie stellen daher harmonische Funktionen dar.

Im folgenden soll die resultierende Kraft \mathbf{R} auf einen Körper in einer inkompressiblen Potentialströmung bestimmt werden, Fig. 25.

Für das eingezeichnete Kontrollvolumen V ergibt die Anwendung der Impulsbilanz

$$\mathbf{R} = -\mathbf{K} = -\oint_{\partial V} p \mathbf{n} dO, \quad dO = b ds, \quad (243)$$

nach dem Übergang auf die komplexe Ebene durch die Substitution

$$ds \rightarrow dz = dx + idy, \quad \mathbf{n} ds \rightarrow \frac{dz}{i} = dy - idx, \quad \mathbf{R} \rightarrow R = R_x + iR_y, \quad \partial V \rightarrow \mathcal{C}$$

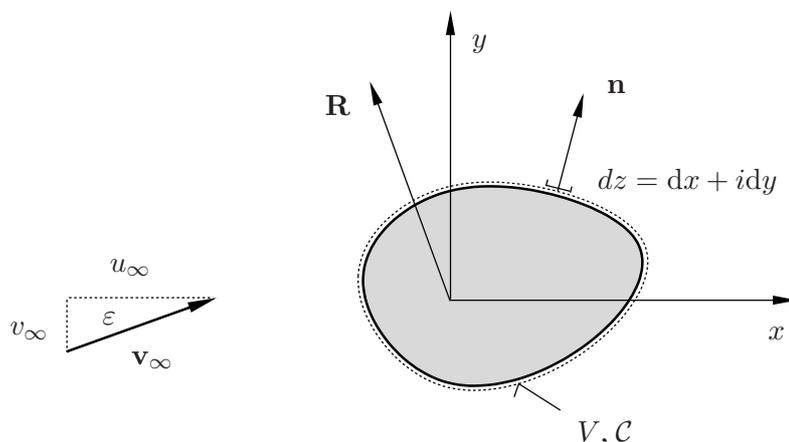


Abbildung 25: Kraft auf Körper in inkompressibler Potentialströmung.

ist weiters unter Verwendung der Bernoulli-Gleichung (239)

$$\frac{R}{b} = - \oint_C p (dy - idx) = i \oint_C p dz = -\frac{i\rho}{2} \oint_C (u^2 + v^2) dz .$$

Mit $w^2 = (u - iv)^2 = u^2 - v^2 - 2iuv$ und der an der Körperkontur \mathcal{C} zu erfüllenden Randbedingung

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_C = 0 \quad \Rightarrow \quad u dy = v dx$$

ist (* bezeichnet die komplexe Konjugation)

$$w^2 dz|_C = \dots = (u^2 + v^2)(dx - idy) \quad \Rightarrow \quad (w^2 dz)^*|_C = (u^2 + v^2) dz .$$

Damit erhält man das *Blasius-Theorem*

$$\frac{R}{b} = -\frac{i\rho}{2} \left[\oint_C w^2 dz \right]^* . \quad (244)$$

Außerhalb des Körpers kann die komplexe Geschwindigkeit in Form der Laurent-Reihe

$$w(z) \sim a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

dargestellt werden, positive Exponenten treten dabei nicht auf, weil $w(z)$ im Fernfeld beschränkt ist:

$$w(z \rightarrow \infty) \rightarrow u_\infty - iv_\infty = a_0 .$$

Unter Verwendung des Residuensatzes erhält man (die Kontur \mathcal{C} umschließt die singuläre Stelle $z = 0$)

$$\oint_C w dz = 2\pi i a_{-1} ,$$

und es gilt der Zusammenhang

$$\oint_C w \, dz = \oint_C (u - iv)(dx + idy) = \oint_C (u \, dx + v \, dy) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma$$

mit der Zirkulation Γ , (77), d.h. für das Residuum gilt

$$a_{-1} = \frac{\Gamma}{2\pi i}.$$

Unter Verwendung von

$$w^2 = a_0^2 + \frac{2a_0a_{-1}}{z} + \frac{2a_0a_{-2} + a_{-1}^2}{z^2} + \dots$$

erhält man den *Satz von Kutta–Joukowski*

$$\frac{R}{b} = -\frac{i\rho}{2} \left[\oint_C w^2 \, dz \right]^* = -\frac{i\rho}{2} (2\pi i 2a_0a_{-1})^* = \rho(v_\infty - iu_\infty)\Gamma, \quad (245)$$

welcher besagt, dass die resultierende Kraft $\mathbf{R} = R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y = \rho(v_\infty \mathbf{e}_x - u_\infty \mathbf{e}_y)\Gamma/b$ senkrecht auf die Anströmrichtung steht. Anders ausgedrückt: in einer inkompressiblen Potentialströmung erfährt ein Körper *keinen* Widerstand (*D'Alembertsches Paradoxon*), sondern nur Auftrieb, falls $\Gamma \neq 0$.

Für das asymptotische Verhalten einer inkompressiblen Potentialströmung im Fernfeld $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ eines (auftriebserzeugenden) ebenen Körpers erhält man aus

$$\begin{aligned} w(z \rightarrow \infty) &\sim u_\infty - iv_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \\ &= u_\infty - iv_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} (-y - ix) + \frac{a_{-2}(x^2 - y^2 - 2ixy)}{r^4} + \dots \end{aligned}$$

das Ergebnis

$$\mathbf{v}(r \rightarrow \infty) \sim \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + O(r^{-2}). \quad (246)$$

Zur Bestimmung des gesamten Strömungsfeldes kann man (i) die Laplace-Gleichung mit den entsprechenden Randbedingungen (an der Körperkontur bzw. im Fernfeld) zu lösen versuchen, oder (ii) einfache Fundamentallösungen der Laplace-Gleichung durch Superposition an die vorgegebenen Randbedingungen anpassen. Wir wählen letzteren Zugang und betrachten zunächst einfache Lösungen der Laplace-Gleichung.

(i) Parallelströmung

$$w(z) = u_\infty - iv_\infty = |\mathbf{v}_\infty| (\cos \varepsilon - i \sin \varepsilon) = |\mathbf{v}_\infty| e^{-i\varepsilon} = \text{const}, \quad (247)$$

das komplexe Potential bzw. Potential- und Stromfunktion sind damit durch

$$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z = \Phi + i\psi = (u_\infty x + v_\infty y) + i(u_\infty y - v_\infty x) \quad (248)$$

gegeben.

(ii) Quell-/Senkenströmung

Für eine Quelle bzw. Senke im Koordinatenursprung ist

$$F(z) = A \ln z = A \ln r + iA(\varphi + 2\pi n), \quad A \in \mathbb{R} \quad (249)$$

mit

$$z = x + iy = r e^{i(\varphi + 2\pi n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

woraus

$$\Phi = A \ln r, \quad \psi = A(\varphi + 2\pi n) \quad (250)$$

folgt. Äquipotentiallinien $\Phi = const$ sind demnach konzentrische Kreise und Stromlinien $\psi = const$ Geraden durch den Ursprung, Abb. 26. Die Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung ist durch

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

gegeben, woraus ersichtlich ist, dass $A > 0$ eine Quell- und $A < 0$ eine Senkenströmung bedeutet. Aus dem Volumenstrom pro Tiefeneinheit Q ergibt sich der Zusammenhang

$$Q = 2\pi r v_r = 2\pi A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{Q}{2\pi}. \quad (251)$$

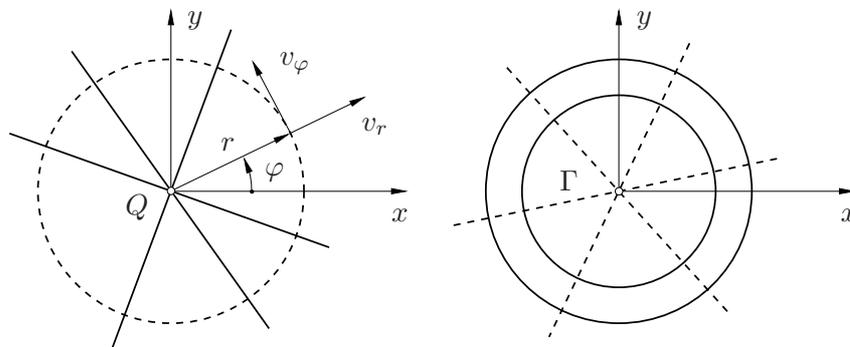


Abbildung 26: Quell-/Senken- und Potentialwirbelströmung. Potentiallinien $\Phi = const$ (strichliert), Stromlinien $\psi = const$ (liniert).

(iii) Potentialwirbel

Ein Wirbel im Ursprung wird durch

$$F(z) = -iB \ln z, \quad B \in \mathbb{R} \quad (252)$$

beschrieben, damit ist

$$\Phi = B(\varphi + 2\pi n), \quad \psi = -B \ln r. \quad (253)$$

Die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit ist

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{B}{r},$$

und daraus die Zirkulation

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} v_\varphi r d\varphi = 2\pi B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\Gamma}{2\pi}. \quad (254)$$

Weitere wichtige Vertreter von einfachen Potentialströmungen sind Eckenströmungen $F \propto z^\nu$, $\nu \in \mathbb{R}$ und Multipole, welche hier nicht weiter behandelt werden. Wegen der Linearität der Laplace-Gleichung gilt das *Superpositionsprinzip*, die Erfüllung von Randbedingungen (Körperkonturen, Begrenzungswände, Symmetrien) kann die Anwendung des *Spiegelungsprinzips* erfordern. Beispielsweise ergibt sich für die Stromfunktion der Strömung nach Abb. 27

$$\psi(x, y) = u_\infty y + \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y-a}{x} + \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y+a}{x}. \quad (255)$$

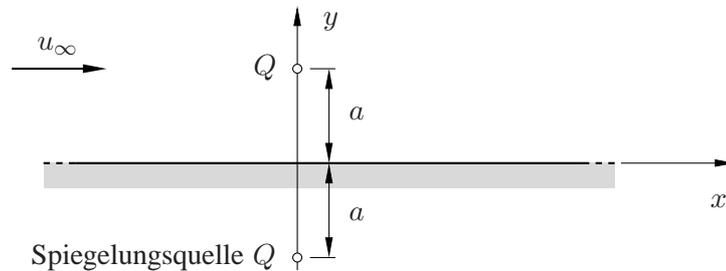


Abbildung 27: Quelle in Parallelanströmung über Wand: Anwendung des Superpositions- und Spiegelungsprinzips für inkompressible Potentialströmung.

14.3 Methode der Singularitätenbelegung

Diese leistungsfähige Methode stellt die Grundlage für wichtige numerische Verfahren (z.B. Panel-Methoden) dar. Hier soll sie auf ebene, inkompressible, *schwach* gestörte Parallelströmungen angewendet werden (*Profiltheorie*), Abb. 28. Wir suchen die an die Randbedingungen angepasste Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0. \quad (256)$$

Das Superpositionsprinzip ermöglicht die Zerlegung in die parallele Anströmung sowie ein Störpotential φ ,

$$\Phi(x, y) = u_\infty x + v_\infty y + \varphi(x, y), \quad \varphi = \varphi_d + \varphi_a + \varphi_w \sim O(\tau, \varepsilon), \quad (257)$$

das weiters in die durch Dicken-, Anstell- und Wölbeffekt hervorgerufenen Anteile zerlegt wird. Die Begründung dafür liegt in der möglichen Linearisierung der Randbedingungen an der Profillober- und Unterseite (tangenciales Umströmen) für kleine Störparameter $\tau, \varepsilon \ll 1$,

$$\frac{v(x, y_\pm)}{u(x, y_\pm)} \sim \frac{v(x, 0_\pm)}{u_\infty} + O(\tau^2, \tau\varepsilon, \varepsilon^2) \sim \frac{1}{u_\infty} \left[\varepsilon u_\infty + \varphi_{dy} + \varphi_{ay} + \varphi_{wy} \right] (x, 0_\pm) = y'_w \pm y'_d, \quad (258)$$

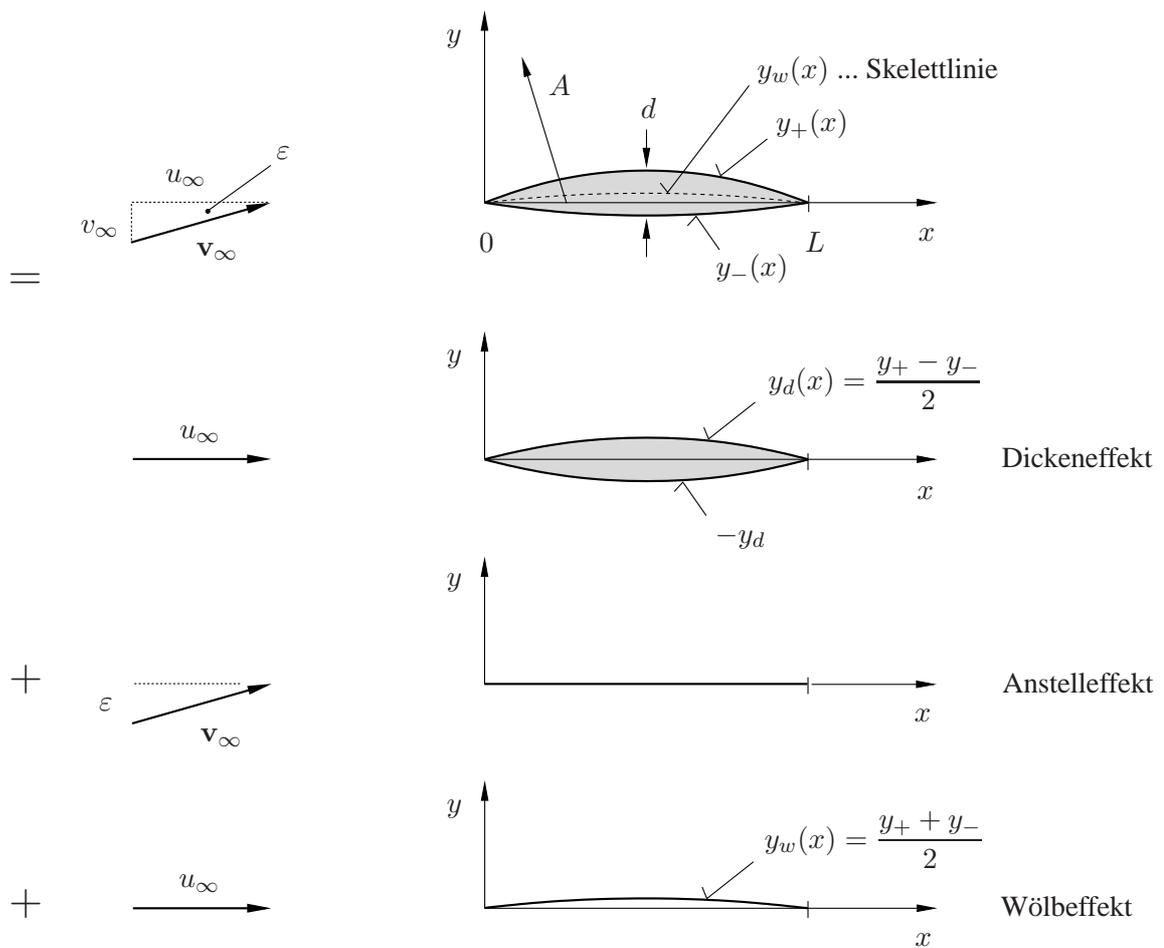


Abbildung 28: Störungstheorie für dünne, schwach angestellte Profile in inkompressibler Parallelanströmung: Dickenparameter $\tau = d/L \ll 1$, Anstellwinkel $\varepsilon \ll 1$. Zerlegung in Dicken-, Anstell- und Wölbeneffekt.

wobei die Näherung $v_\infty \sim \varepsilon u_\infty + O(\varepsilon^3)$ verwendet und die Profilkordinatenfunktionen in einen symmetrischen (y_d) und antisymmetrischen (y_w) Anteil zerlegt wird:

$$y_+ = y_w + y_d, \quad y_- = y_w - y_d. \quad (259)$$

Aus den Randbedingungen (258) wählt man die Zuordnungen

$$\varphi_{dy}(x, 0_\pm) = \pm u_\infty y'_d(x), \quad \varphi_{ay}(x, 0_\pm) = -u_\infty \varepsilon, \quad \varphi_{wy}(x, 0_\pm) = u_\infty y'_w(x). \quad (260)$$

Im folgenden werden die unbekanntenen Störpotentiale φ_d , φ_a und φ_w bestimmt.

(i) Dickeneffekt

Aus Symmetrieüberlegungen kann die symmetrische Umströmung eines symmetrischen Profils keinen Auftrieb liefern. Die Körperkontur wird durch eine kontinuierliche Quell- und Senken-

verteilung dQ (Superpositionsprinzip) entlang der x -Achse erzeugt, Abb. 29,

$$\varphi_d(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L q(\xi) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \quad (261)$$

dabei ist $q(x)$ die *Belegungsfunktion*.

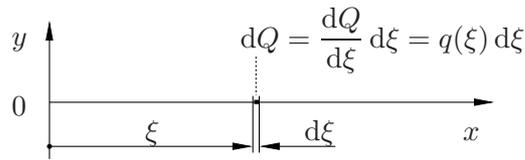


Abbildung 29: Quell-/Senkenbelegung zur Erzeugung eines symmetrischen Körpers.

Nach Differentiation

$$\varphi_{dy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^L q(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi$$

und Grenzwertbildung

$$\varphi_{dy}(x, 0_{\pm}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L q(\xi) \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2}}_{\pm \pi \delta(x - \xi)} d\xi = \pm \frac{q(x)}{2} = \pm u_{\infty} y'_d(x)$$

ergibt der Vergleich mit der Randbedingung (260) die gesuchte Belegungsfunktion

$$q(x) = 2u_{\infty} y'_d(x). \quad (262)$$

Falls es sich – wie im vorliegenden Fall – um einen geschlossenen Körper handelt, muß die Gesamtquellstärke verschwinden:

$$\int_0^L q(x) dx = 2u_{\infty} y_d(x) \Big|_0^L = 0.$$

(ii) Anstelleffekt

Wegen der Asymmetrie der Strömung wirkt eine Auftriebskraft auf die dünne, angestellte Platte. Nach dem Satz von Kutta-Joukowski (245) ist die Gesamtzirkulation der Strömung daher $\Gamma \neq 0$. Zur Darstellung des Störpotentials superponiert man folglich eine kontinuierliche Wirbelverteilung $d\Gamma$ entlang der x -Achse

$$\varphi_a(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \gamma_a(\xi) \arctan \frac{y}{x - \xi} d\xi, \quad d\Gamma = \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi = \gamma_a(\xi) d\xi. \quad (263)$$

Differentiation nach y liefert

$$\varphi_{ay} = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \gamma_a(\xi) \frac{(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi,$$

und Grenzwertbildung sowie der Vergleich mit (260)

$$\varphi_{ay}(x, 0_{\pm}) = \frac{1}{2\pi} \oint_0^L \frac{\gamma_a(\xi)}{x - \xi} d\xi = -u_{\infty}\varepsilon. \quad (264)$$

Das Integral ist im Sinne des *Cauchyschen Hauptwertes*

$$\oint_0^L \frac{\gamma_a(\xi)}{x - \xi} d\xi := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^L \right] \frac{\gamma_a(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (265)$$

zu verstehen. (264) stellt eine singuläre Integralgleichung 1. Art (Betzsche Integralgleichung) der allgemeinen Form

$$-\frac{1}{\pi} \oint_a^b \frac{\gamma_a(\xi)}{x - \xi} d\xi = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (266)$$

mit der *nicht eindeutigen* Lösung

$$\gamma_a(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{(x-a)(b-x)}} \left[\oint_a^b \frac{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}{x - \xi} f(\xi) d\xi + C \right], \quad C = \int_a^b \gamma_a(x) dx \quad (267)$$

dar, $C \equiv \Gamma$ ist eine beliebige Konstante, [12]. Im vorliegenden Fall ist $a = 0$, $b = L$, $f(x) = 2u_{\infty}\varepsilon = \text{const}$ und die Belegungsfunktion daher

$$\gamma_a(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(L-x)}} \left[\underbrace{2u_{\infty}\varepsilon \oint_0^L \frac{\sqrt{\xi(L-\xi)}}{x - \xi} d\xi}_{-\pi(L-2x)/2} + C \right].$$

Diese Nichteindeutigkeit der Lösung ist eine Folge der Vernachlässigung von Reibung ($Re \rightarrow \infty$) und drückt sich in der Beliebigkeit der Gesamtzirkulation Γ aus. Zur eindeutigen Bestimmung der Lösung benötigt man daher eine zusätzliche Annahme, welche aus der Beobachtung kommt: es zeigt sich, dass die Hinterkante nicht umströmt wird, sondern die Strömung die Hinterkante glatt verlässt. Diese als *Kutta-Bedingung* bekannte Forderung an die Lösung lautet

$$u(L, 0_{\pm}) = u_{\infty} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{ax}(L, 0_{\pm}) = 0. \quad (268)$$

Mit

$$\varphi_{ax} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^L \gamma_a(\xi) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi, \quad \rightarrow \quad \varphi_{ax}(x, 0_{\pm}) = \dots = \mp \frac{\gamma_a(x)}{2}$$

folgt aus der Kutta-Bedingung $\gamma_a(L) = 0$ und daher

$$C = \Gamma = -\varepsilon\pi u_{\infty} L, \quad \gamma_a(x) = -2\varepsilon u_{\infty} \sqrt{\frac{L-x}{x}}. \quad (269)$$

(iii) Wölbefekt

Die Asymmetrie der Strömung ist ebenfalls auftriebserzeugend, in Analogie zum Anstelleffekt wird die x -Achse mit einer kontinuierlichen Wirbelverteilung belegt:

$$\varphi_w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \gamma_w(\xi) \arctan \frac{y}{x-\xi} d\xi \quad (270)$$

Unter Verwendung von (260) ist

$$\varphi_{wy}(x, 0_{\pm}) = \frac{1}{2\pi} \oint_0^L \frac{\gamma_w(\xi)}{x-\xi} d\xi = u_{\infty} y'_w(x) \quad (271)$$

und mit (266), (267) sowie $a = 0, b = L, f(x) = -2u_{\infty} y'_w(x)$

$$\gamma_w(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(L-x)}} \left[-2u_{\infty} \oint_0^L \frac{\sqrt{\xi(L-\xi)}}{x-\xi} y'_w(\xi) d\xi + \Gamma \right]$$

mit noch unbestimmter Zirkulation Γ . Wie vorhin legt die Kutta-Bedingung glatten Abströmens an der Profilhinterkante $\varphi_{wx}(L, 0_{\pm}) = 0$ die Zirkulation fest:

$$\gamma_w(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = 2u_{\infty} \int_0^L \sqrt{\frac{\xi}{L-\xi}} y'_w(\xi) d\xi. \quad (272)$$

Zusammenfassend lautet die Gesamtlösung für die Profilmströmung nach Abb. 28 daher

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) \sim & u_{\infty}(x + \varepsilon y) + \frac{u_{\infty}}{\pi} \int_0^L y'_d(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \\ & - \frac{u_{\infty}\varepsilon}{\pi} \int_0^L \sqrt{\frac{L-\xi}{\xi}} \arctan \frac{y}{x-\xi} d\xi \\ & + \frac{u_{\infty}}{\pi^2} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{\xi(L-\xi)}} \left[- \oint_0^L \frac{\sqrt{s(L-s)}}{\xi-s} y'_w(s) ds + \int_0^L \sqrt{\frac{s}{L-s}} y'_w(s) ds \right] \arctan \frac{y}{x-\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (273)$$

Der elliptische Gleichungstypus der Laplace-Gleichung kommt in der Lösung durch die Inte-

grale über die Koordinatenfunktionen zum Ausdruck. Für die Berechnung der Auftriebskraft ist nur die Geschwindigkeitsstörung an der Profilloberfläche von Relevanz, man erhält

$$\begin{aligned} \frac{u(x, 0_{\pm}) - u_{\infty}}{u_{\infty}} &\sim \frac{1}{\pi} \oint_0^L \frac{y'_d(\xi)}{x - \xi} d\xi \pm \varepsilon \sqrt{\frac{L-x}{x}} \\ &\mp \frac{1}{\pi \sqrt{x(L-x)}} \left[\int_0^L \sqrt{\frac{\xi}{L-\xi}} y'_w(\xi) d\xi - \oint_0^L \frac{\sqrt{\xi(L-\xi)}}{x-\xi} y'_w(\xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (274)$$

Die Druckverteilung in Form des Druckbeiwertes an der Profilloberfläche ist nach (215) damit über

$$c_p(x, 0_{\pm}) =: c_{p\pm} \sim -2 \frac{u(x, 0_{\pm}) - u_{\infty}}{u_{\infty}} \quad (275)$$

verknüpft, für den Auftriebsbeiwert folgt damit weiters in führender Ordnung

$$c_a \sim \frac{1}{L} \int_0^L (c_{p-} - c_{p+}) dx. \quad (276)$$

Daraus sieht man wieder, dass der Dickeneffekt keinen Beitrag zum Auftrieb liefert. Die Umströmung der Profilverderrkante bewirkt einen *Nasensog*, der die Auftriebskraft aus der Senkrechten zur x -Achse um den Anstellwinkel ε in Übereinstimmung mit dem Satz von Kutta-Joukowski ($\mathbf{A} \perp \mathbf{v}_{\infty}$) verkippt.

Anwendungsbeispiel: angestelltes Parabelbogenzweieck in inkompressibler, reibungsfreier Strömung

Gesucht ist der Auftriebsbeiwert für ein unter dem Winkel $\varepsilon \ll 1$ angestelltes, gewölbtes, dünnes Profil der Koordinatenfunktionen

$$y_{\pm}(x) = (f_w \pm 2)\tau x \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L, \quad \tau \ll 1, \quad f_w \sim O(1). \quad (277)$$

Nach (259) und Abb. 28 ist

$$y_d(x) = 2\tau x \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad y_w(x) = f_w \tau x \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad (278)$$

die Auswertung von (274) ergibt damit, Abb. 30, 31,

$$\frac{u(x, 0_{\pm}) - u_{\infty}}{u_{\infty}} \sim \underbrace{\frac{2\tau}{\pi} \left[2 + \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \ln \left| \frac{x}{L-x} \right| \right]}_{\text{DE}} \underbrace{\pm \varepsilon \sqrt{\frac{L-x}{x}}}_{\text{AE}} \underbrace{\pm 2\tau f_w \sqrt{\frac{x}{L}} \left(1 - \frac{x}{L}\right)}_{\text{WE}}. \quad (279)$$

Die Verwendung von (275) und (276) liefert nach Integration

$$c_a \sim 2\pi\varepsilon + f_w \pi \tau. \quad (280)$$

Die Profiltheorie liefert für den Dickeneffekt (DE) an Vorder- und Hinterkante inkorrekte Resultate: tatsächlich befinden sich dort Staupunkte $u(0, 0) = u(L, 0) = 0$, die Voraussetzung kleiner Störungen ist in deren Umgebung nicht gegeben, was sich in logarithmischen Singularitäten ausdrückt, Abb. 30(a). Der Nasensog wird durch die Umströmung der scharfen Vorderkante beim Anstellereffekt erzeugt und macht sich dort in einer Wurzelsingularität der Geschwindigkeitsstörung bemerkbar, Abb. 30(b). Weiterführende Aspekte der Profiltheorie findet man in [23].

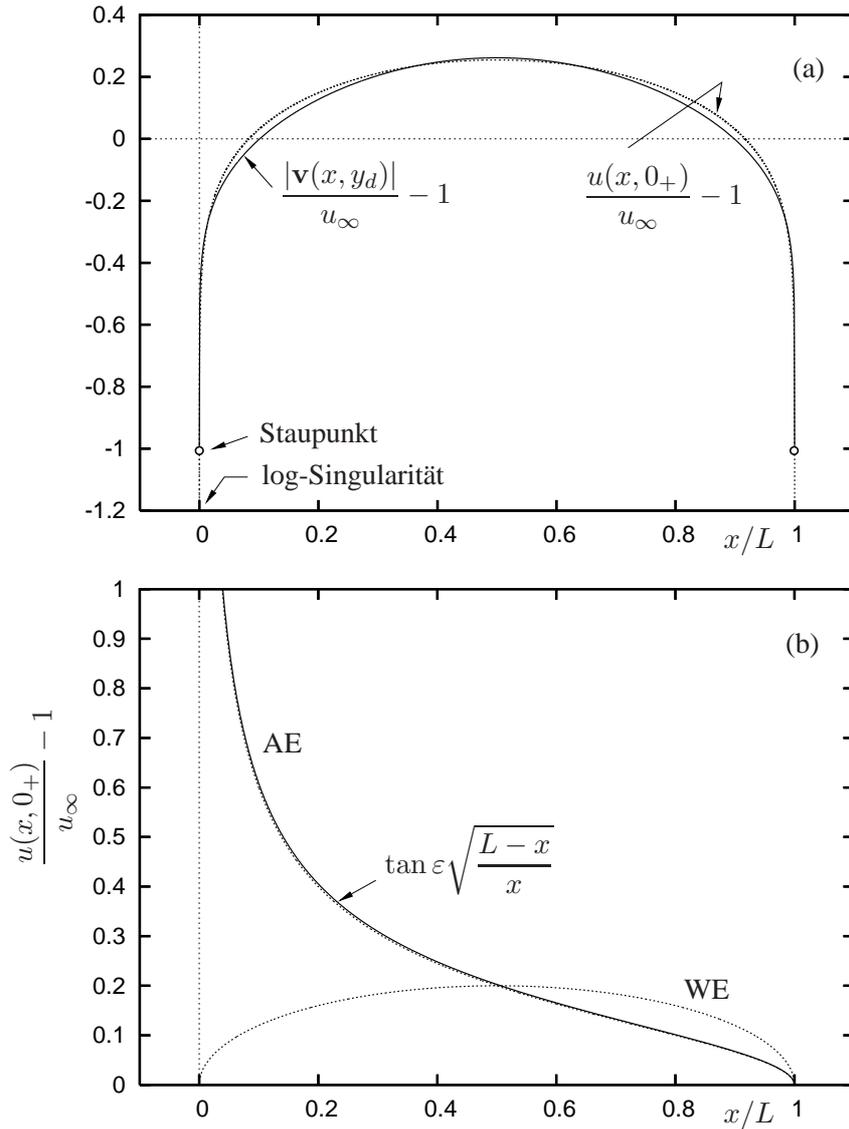


Abbildung 30: Geschwindigkeitsstörung an der Oberseite des Profils (277). (a) Dickeneffekt (DE), $\tau = 0.2$: Störungsrechnungsergebnis (279) (punktiert) und numerische Rechnung (Panel-Verfahren, liniert). (b) Anstell- (AE) und Wölbeffekt (WE) mit $\varepsilon = \tau = 0.2$, $f_w = 1$ nach (279) (punktiert) und exaktes Resultat für AE (konforme Abbildung, liniert).

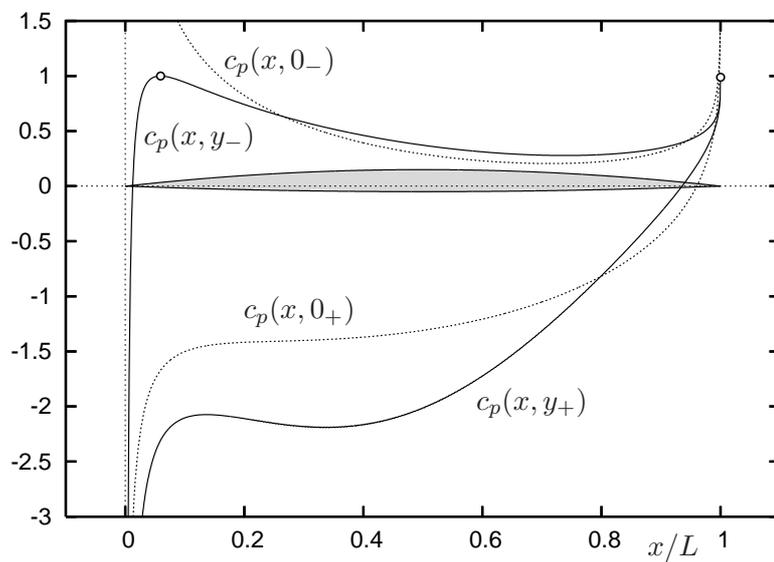


Abbildung 31: Druckverteilung am Parabelbogenzweieck (277) für $\varepsilon = \tau = 0.2$, $f_w = 1$: Profiltheorie (279), (275) (punktiert, $c_a \approx 1.89$ nach (280)), numerische Rechnung (liniert, $c_a \approx 2.17$).

15 Grenzschichttheorie

In vielen wichtigen aerodynamischen Anwendungen ist die mit einer charakteristischen Körperabmessung gebildete Reynolds-Zahl sehr groß, $Re \gg 1$, sodaß die Strömung näherungsweise als reibungsfrei angesehen werden kann (siehe Kap. 14). Unabhängig von der Größe von Re ist aber in der Nähe der Körperoberfläche wegen der dort zu erfüllenden Haftbedingung Reibung immer von wesentlicher Bedeutung, sie ist für den Reibungswiderstand des Körpers in der Strömung verantwortlich. Zur Berechnung des Reibungswiderstandes schlanker Körper bei hohen Re -Zahlen betrachten wir der Einfachheit halber stationäre, ebene, inkompressible, laminare Strömung eines newtonschen Fluides mit konstanten Stoffwerten, Abb. 32.

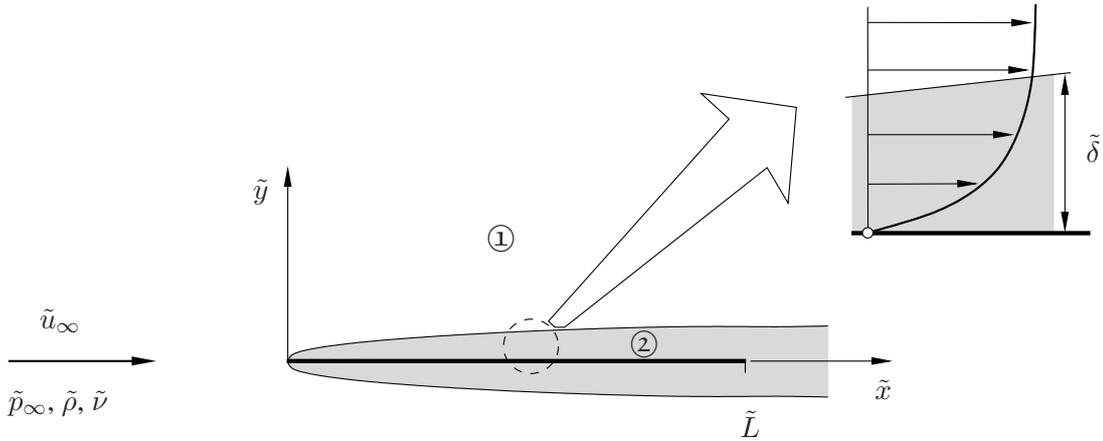


Abbildung 32: Strömung bei hohen Reynolds-Zahlen: reibungsfreies Außengebiet ①, Reibungsgrenzschicht ②.

Mit den dimensionslosen Größen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{L}}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{u}_\infty}, \quad p = \frac{\tilde{p} - \tilde{p}_\infty}{\tilde{\rho} \tilde{u}_\infty^2} \quad (281)$$

lauten Kontinuitäts- und Navier–Stokes-Gleichung (67)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}, \quad (282)$$

die Randbedingungen sind

$$\begin{aligned} y = 0_{\pm}, \quad 0 \leq x \leq 1: \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \dots \text{Haftbedingung,} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty: \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}_x, \quad p \rightarrow 0 \quad \dots \text{Fernfeldbedingung.} \end{aligned} \quad (283)$$

Da die Reynolds-Zahl

$$Re := \frac{\tilde{u}_\infty \tilde{L}}{\tilde{\nu}} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{l}_\nu} \gg 1 \quad (284)$$

– wie schon bei schleichender Strömung – die Rolle eines Störparameters einnimmt, erwarten wir wegen $\tilde{l}_\nu \ll \tilde{L}$ den Zusammenbruch einer regulären asymptotischen Entwicklung der Feldgrößen für $Re \rightarrow \infty$ im Nahfeld des umströmten Körpers. Tatsächlich führt der formale Grenzübergang $Re \rightarrow \infty$ in (282) auf die Euler-Gleichungen (inkompressible Potential-

strömung), d.h. zum Verlust des Terms mit der höchsten (zweiten) Ableitung (Reibterm) und damit auch einer Randbedingung. Offensichtlich kann dann die Haftbedingung an der Körperkontur nicht mehr erfüllt werden. Es handelt sich wieder um ein *siguläres Störproblem*, bei dem die *Außenströmung* ① reibungsfrei ist und die Forderung der Haftbedingung an der Körperwand die Existenz einer dünnen *Grenzschicht* ② in der Nähe der Körperoberfläche erzwingt, in der innere Reibung nicht vernachlässigt werden kann.

Zur Abschätzung der Größenordnung der Grenzschichtdicke δ und der wandnormalen Geschwindigkeit v *innerhalb* der Grenzschicht folgt unter Beachtung der Größenordnungsrelationen $u \sim p \sim x \sim O(1)$, $y \sim O(\delta)$ aus der Massenbilanz (282)

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim 1} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim v/\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad v \sim \delta, \quad (285)$$

und damit weiters aus der Impulsgleichung (282) für die x -Richtung

$$\underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim 1} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\sim 1} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\sim 1} + \frac{1}{Re} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\sim 1} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\sim 1/\delta^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad (286)$$

sowie aus der Impulsgleichung (282) für die y -Richtung

$$\underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{Re}}} + \underbrace{v \frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{Re}}} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial y}}_{\sqrt{Re}} + \frac{1}{Re} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{Re}}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\sim \sqrt{Re}} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad p = p(x). \quad (287)$$

Zusammenfassend ist $\delta \sim v \sim O(Re^{-1/2})$, und der Druck über die Grenzschichtdicke (in y -Richtung) konstant.

Damit können die asymptotischen Entwicklungen der Feldgrößen für die reibungsfreie Außen- und reibungsbehaftete Grenzschichtströmung für $Re \rightarrow \infty$ angegeben werden:

Außengebiet ①: Potentialströmung

Mit

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_0(x, y) + O(Re^{-1/2}), \quad p \sim p_0(x, y) + O(Re^{-1/2}) \quad (288)$$

erhält man aus (282), (283) in führender Ordnung

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = 0, \quad \mathbf{v}_0 = \nabla \Phi, \quad p_0 = \frac{1}{2} - \frac{u_0^2 + v_0^2}{2} \quad \dots \text{Bernoulli-Glg.}, \\ y = 0_{\pm}, \quad 0 \leq x \leq 1: \quad \mathbf{v}_0 \cdot \underbrace{\mathbf{n}}_{\pm \mathbf{e}_y} = 0 \quad \rightarrow \quad v_0(x, 0_{\pm}) = 0 \quad \dots \text{tangenciales Gleiten}, \\ r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{v}_0 \rightarrow \mathbf{e}_x, \quad p_0 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (289)$$

Innengebiet ②: Grenzschichtströmung

Unter Verwendung der *Grenzschichtkoordinate*

$$\bar{y} := \sqrt{Re} y \sim O(1) \quad (290)$$

und den Entwicklungen

$$u \sim U(x, \bar{y}) + O(Re^{-1/2}), \quad v \sim Re^{-1/2} V(x, \bar{y}) + O(Re^{-1}), \quad p \sim P(x) + O(Re^{-1/2}) \quad (291)$$

erhält man aus (282) in führender Ordnung die *Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen*

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \bar{y}} = 0, \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} = -\frac{dP}{dx} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{y}^2}, \quad (292)$$

welche von *parabolischem* Gleichungstypus sind (zweite Ableitungen nach x treten nicht mehr auf). Das bedeutet, dass die Lösung der Grenzschichtgleichung an einer Stelle x nur vom stromaufseitigen Lösungsverhalten abhängt. Für die Berechnung der Grenzschichtströmung benötigt man daher die Vorgabe einer Anfangsbedingung

$$x = 0 : U = U_0(\bar{y}), \quad (293)$$

an der Körperwand ist die Haftbedingung

$$\bar{y} = 0 : U = V = 0 \quad (294)$$

zu erfüllen und am Grenzschichttrand $\bar{y} \rightarrow \infty$ muß die Grenzschichtströmung ② an die Außenströmung ① angepasst werden. In führender Ordnung $O(Re^0)$ gilt die *Anpassungsvorschrift*

$$\begin{aligned} \lim_{Re \rightarrow \infty} U(x, y\sqrt{Re}) \Big|_{y \text{ fix}} &= \lim_{Re \rightarrow \infty} u_0(x, \frac{\bar{y}}{\sqrt{Re}}) \Big|_{\bar{y} \text{ fix}} \Rightarrow U(x, \infty) = u_0(x, 0) =: u_{0w}(x), \\ \lim_{Re \rightarrow \infty} P(x) &= \lim_{Re \rightarrow \infty} p_0(x, \frac{\bar{y}}{\sqrt{Re}}) \Big|_{\bar{y} \text{ fix}} \Rightarrow P(x) = p_0(x, 0), \end{aligned} \quad (295)$$

d.h. der Druck $P(x)$ ist innerhalb der Grenzschicht nicht unbekannt, sondern von der Außenströmung *aufgeprägt*. Nach der Bernoulli-Gleichung gilt der Zusammenhang

$$P(x) = \frac{1}{2} - \frac{u_{0w}^2(x)}{2} \quad (296)$$

mit der Wandgeschwindigkeit $u_{0w}(x)$ der Potentialströmung. Mit Hilfe der Stromfunktion $\psi(x, \bar{y})$ ($U = \psi_{\bar{y}}, V = -\psi_x$) läßt sich das Grenzschichtproblem kompakt formulieren:

$$\begin{aligned} \psi_{\bar{y}} \psi_{\bar{y}x} - \psi_x \psi_{\bar{y}\bar{y}} &= \underbrace{-P'}_{u_{0w} u'_{0w}} + \psi_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}}, \\ \bar{y} = 0 : \quad \psi &= \psi_{\bar{y}} = 0 \quad \dots \text{Haftbedingung,} \\ \bar{y} \rightarrow \infty : \quad \psi_{\bar{y}} &\rightarrow u_{0w}(x) \quad \dots \text{Anpassungsbedingung,} \\ x = 0 : \quad \psi &= \psi_0(\bar{y}) \quad \dots \text{Anfangsbedingung.} \end{aligned} \quad (297)$$

Daraus wird das *hierarchische* (klassische) Grenzschichtkonzept ersichtlich: zuerst muß die Außenströmung (u_{0w}) berechnet werden, anschließend wird die Grenzschichtgleichung (i.A. numerisch) integriert.

15.1 Grenzschichtkenngrößen

(i) Wandschubspannung

Die Auswertung der Reibspannungstensorkomponente σ'_{xy} ergibt in der Grenzschichtnäherung

$$\sigma'_{xy} = \frac{\tilde{\sigma}'_{xy}}{\tilde{\rho}\tilde{u}_\infty^2} = \frac{\tilde{\mu}\tilde{u}_\infty}{\tilde{\rho}\tilde{u}_\infty^2\tilde{L}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} + O(Re^{-1}),$$

dabei ist $\tau(x, \bar{y}) := \partial U / \partial \bar{y}$ die Schubspannung und

$$\tau_w(x) := \left. \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=0} \quad (298)$$

die *Wandschubspannung*. Die Grenzschichtströmung ist drehungsbehaftet, die Wirbelstärke (50) ist proportional zur Schubspannung:

$$\omega_z = \frac{\tilde{L}\tilde{\omega}_z}{\tilde{u}_\infty} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \sim -\sqrt{Re} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} + O(1). \quad (299)$$

Die Wandschubspannung dient zur Berechnung der Widerstandskraft, im Falle stationärer Strömung lautet das *Strömungsablöskriterium*

$$\tau_w(x = x_0) = 0, \quad (300)$$

die (klassische) Grenzschichtrechnung versagt für $x > x_0$.

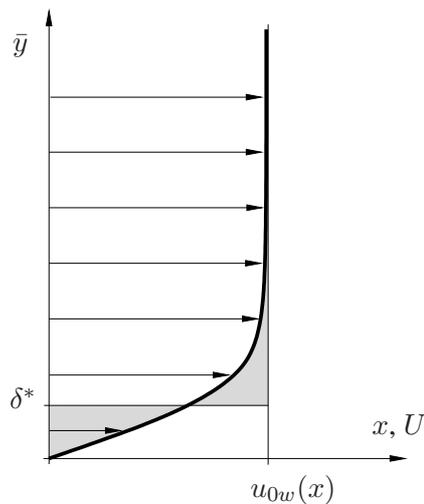


Abbildung 33: Grenzschicht-Verdrängungsdicke $\delta^*(x)$: die beiden grauen Flächen sind gleich groß.

(ii) **Verdrängungsdicke**

Die Erfüllung der Haftbedingung an der Körperoberfläche bewirkt ein Abdrängen der Außenströmung, der Körper erscheint um die *Verdrängungsdicke*

$$\delta^*(x) = \sqrt{Re} \frac{\tilde{\delta}^*}{\tilde{L}} := \int_0^\infty \left(1 - \frac{U(x, \bar{y})}{u_{0w}(x)} \right) d\bar{y} \quad (301)$$

aufgedickt, Abb. 33. Diese Kenngröße ist für Grenzschichttheorie höherer Ordnung von Bedeutung. Erweiterungen und Anwendungen der Grenzschichttheorie findet man in [13], [25].

Anwendungsbeispiel: Widerstand einer parallel angeströmten dünnen Platte

Gesucht ist der Widerstandsbeiwert einer dünnen Platte der Länge \tilde{L} und der Breite \tilde{b} , welche in ihrer Ebene unter der Annahme hoher *Re*-Zahlen angeströmt wird, Abb. 32.

Die Potentialströmung ist in führender Ordnung durch

$$\mathbf{v}_0(x, y) = \mathbf{e}_x, \quad p_0(x, y) = 0, \quad u_{0w}(x) = 1 \quad (302)$$

gegeben, die Grenzschichtgleichung vereinfacht sich dadurch zu

$$\psi_{\bar{y}} \psi_{\bar{y}x} - \psi_x \psi_{\bar{y}\bar{y}} = \psi_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}}, \quad + \text{RB.} \quad (303)$$

Wegen der Parabolizität der Grenzschichtgleichung darf die Lösung nicht von der Plattenlänge abhängen, was ein *Ähnlichkeitsverhalten* erwarten läßt: der Ansatz

$$\psi(x, \bar{y}) = \varphi(x) f(\eta), \quad \eta = \frac{\bar{y}}{\delta(x)} \quad (304)$$

mit den zu bestimmenden Skalierungsfunktionen $\varphi(x)$, $\delta(x)$ und der *Ähnlichkeitsvariablen* η führt (303) auf

$$f'^2(\varphi'\delta - \varphi\delta') - f f''\varphi'\delta = f'''.$$

Die Forderung, dass diese Gleichung keine *x*-Abhängigkeit enthält, d.h. auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduziert wird, läßt sich durch $\varphi = \delta = \sqrt{2x}$ erfüllen. Damit erhält man das nichtlineare Randwertproblem (*Blasius-Gleichung*) der Plattengrenzschichtströmung

$$\begin{aligned} f''' + f f'' &= 0, \\ f(0) = f'(0) &= 0 \quad \dots \text{Haftbedingung,} \\ f'(\eta \rightarrow \infty) &\rightarrow 1 \quad \dots \text{Anpassungsbedingung.} \end{aligned} \quad (305)$$

Die numerische Rechnung ergibt die Feldgrößenverläufe in Abb. 34 und die Grenzschichtkenngrößen

$$\tau_w(x) = \psi_{\bar{y}\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{f''(0)}{\delta(x)} \approx \frac{0.332}{\sqrt{x}}, \quad (306)$$

$$\delta^*(x) = \delta(x) \int_0^\infty (1 - f') d\eta = \sqrt{2x} \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta - f) \approx 1.72 \sqrt{x}. \quad (307)$$

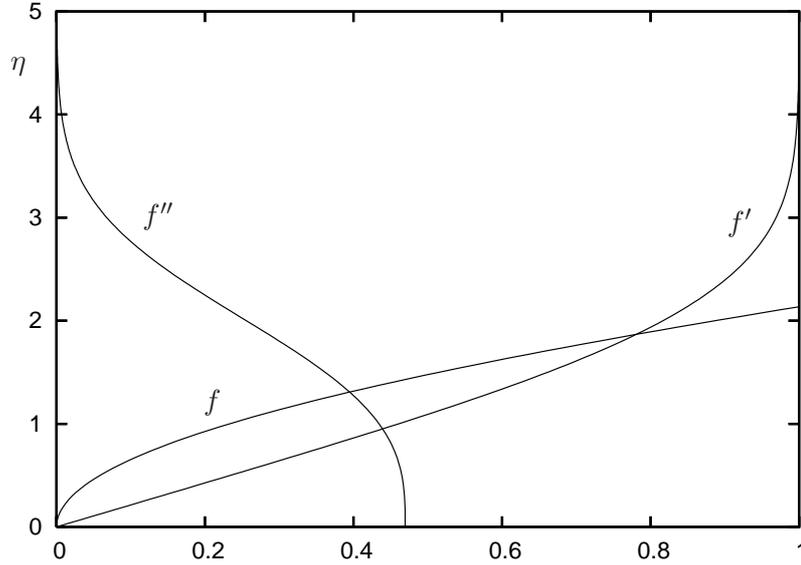


Abbildung 34: Ähnlichkeitslösung der Plattengrenzschichtströmung: Stromfunktion $f(\eta)$, Geschwindigkeitsprofil $f'(\eta)$, Schubspannung (Wirbelstärke) $f''(\eta)$.

Die resultierende Widerstandskraft \tilde{W} erhält man aus der integralen Impulsbilanz für ein an die Körperoberfläche gelegtes Kontrollvolumen:

$$\begin{aligned} -\tilde{\mathbf{K}} &= \oint_{\partial V} \tilde{\sigma} \mathbf{n} d\tilde{O} = - \underbrace{\oint_{\partial V} \tilde{p} \mathbf{n} d\tilde{O}}_0 + \int_0^{\tilde{L}} (-\tilde{\sigma}'_{xy} \mathbf{e}_x) \underbrace{n_y}_{-1} \tilde{b} d\tilde{x} + \int_{\tilde{L}}^0 \tilde{\sigma}'_{xy} \mathbf{e}_x \underbrace{n_y}_1 \tilde{b} (-d\tilde{x}) \\ &\sim 2 \frac{\tilde{\mu} \tilde{u}_\infty \tilde{b}}{\tilde{L}} \mathbf{e}_x \int_0^1 \underbrace{\left(\sqrt{Re} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} + O(1) \right)}_{\tau_w(x)} dx = \tilde{W} \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

Mit τ_w für die Platte erhält man für den Widerstandsbeiwert, Abb. 35,

$$c_w := \frac{\tilde{W}/(\tilde{b}\tilde{L})}{\tilde{\rho} \tilde{u}_\infty^2 / 2} \sim \frac{2.66}{\sqrt{Re}} + O(Re^{-1}), \quad Re \rightarrow \infty. \quad (308)$$

Eine genauere Analyse zeigt, dass die Grenzschichtapproximation in der Nähe der Plattenvorderkante versagt (erkennbar am singulären Verhalten der Wandschubspannung (306) für $x \rightarrow 0$), dieses Versagen sich aber nicht in führender Ordnung von (308) bemerkbar macht. Auch an der Plattenhinterkante (sprunghafte Änderung der Randbedingung an $x = 1, \bar{y} = 0$) versagt die klassische (hierarchische) Grenzschichttheorie, ein lokales Grenzschichtwechselwirkungskonzept (triple deck Theorie) schafft hier Abhilfe.

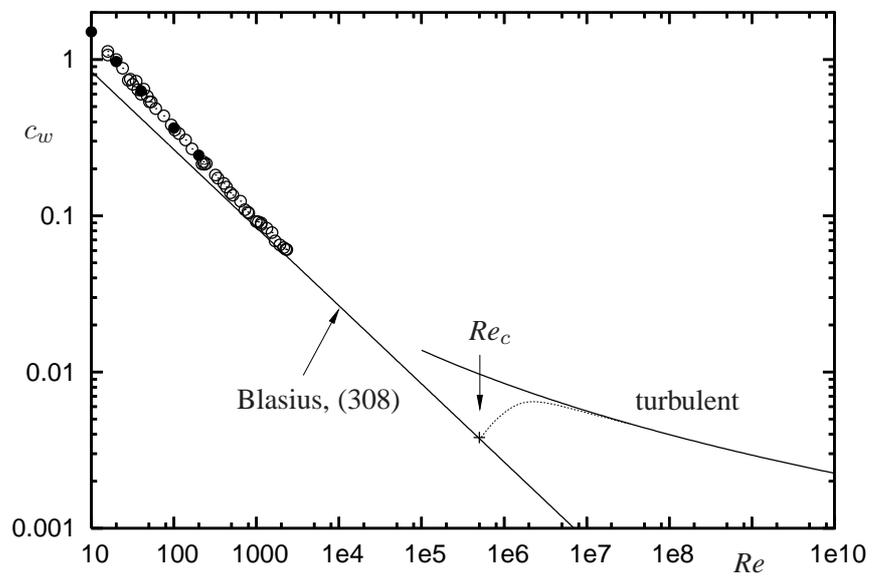


Abbildung 35: Plattenwiderstandsbeiwert $c_w(Re)$: \circ ... Meßpunkte, \bullet ... Navier–Stokes-Rechnung, $Re_c \approx 5 \times 10^5$... kritische Re -Zahl für laminar-turbulenten Umschlag.

Literatur

- [1] Adam, G. & Hittmair, O.: *Wärmetheorie*. 4. Aufl., Vieweg, Braunschweig (1992).
- [2] Batchelor, G.K.: *An Introduction to Fluid Mechanics*. Cambridge University Press (1970).
- [3] Ben-Dor, G., Igra, O. & Elperin, T.: *Handbook of Shock Waves*. Bde. 1-3, Academic Press, San Diego (2000).
- [4] Blevins, R.D.: *Applied Fluid Dynamics Handbook*. Krieger Publishing Company, Malabar (FL, USA) (2003).
- [5] Bush, A.W.: *Perturbation Methods for Engineers and Scientists*. CRC Press, Boca Raton (1992).
- [6] Hänel, D.: *Molekulare Gasdynamik*. Springer, Berlin (2004).
- [7] Idelchik, I.E.: *Handbook of Hydraulic Resistance*. 4. Aufl., Begell House, New York (2008).
- [8] Kluwick, A. (Ed.): *Nonlinear Waves in Real Fluids*. CISM Courses and Lectures No. 315, Springer, Wien (1991).
- [9] Landau, L.D. & Lifschitz, E.M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. VI: Hydrodynamik*. Akademie, Berlin (1991).
- [10] Müller, I.: *Thermodynamics*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston (1985).
- [11] Oswatitsch, K.: *Grundlagen der Gasdynamik*. Springer, Wien (1976).
- [12] Polyanin, A.D. & Manzhirov, A.V. *Handbook of Integral Equations*. 2. Aufl., Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton (2008).
- [13] Schlichting, H. & Gersten, K.: *Grenzschichttheorie*. 10. Aufl., Springer, Berlin (2006).
- [14] Schneider, W.: *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*. Vieweg, Braunschweig (1978).
- [15] Serrin, J.: *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*. In *Handbuch der Physik Bd. VIII/1: Strömungsmechanik I* (Ed. S. Flügge), Springer, Berlin (1959).
- [16] Shapiro, A.H.: *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. Bde. I/II, Ronald Press, New York (1953, 1954).
- [17] Spurk, J.H. & Aksel, N.: *Strömungslehre*. 7. Aufl., Springer, Berlin (2007).
- [18] Thess, A.: *Das Entropieprinzip. Thermodynamik für Unzufriedene. (Lieb-Yngvason-Theorie)* Oldenbourg, München (2007).
- [19] Thompson, P.A.: *Compressible-Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, New York (1972).
- [20] Troger, H. & Steindl, A.: *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory*. Springer, Wien (1991).

- [21] Truesdell, C.A. & Toupin, R.A.: *The Classical Field Theories*. In *Handbuch der Physik Bd. III/1: Principles of Classical Mechanics and Field Theory* (Ed. S. Flügge), Springer, Berlin (1960).
- [22] Truesdell, C.A.: *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Vol. 1, Academic Press, New York (1977).
- [23] Van Dyke, M.: *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Parabolic Press, Stanford (1975).
- [24] Vincenti, W.G. & Kruger, Ch.H.: *Introduction to Physical Gas Dynamics*. Wiley, New York (1965).
- [25] White, F.M.: *Viscous Fluid Flow*. 2. Aufl., McGraw-Hill, New York (1991).
- [26] Whitham, G.B.: *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, New York (1974).
- [27] Zierep, J.: *Theoretische Gasdynamik*. 3. Aufl., G. Braun, Karlsruhe (1976).