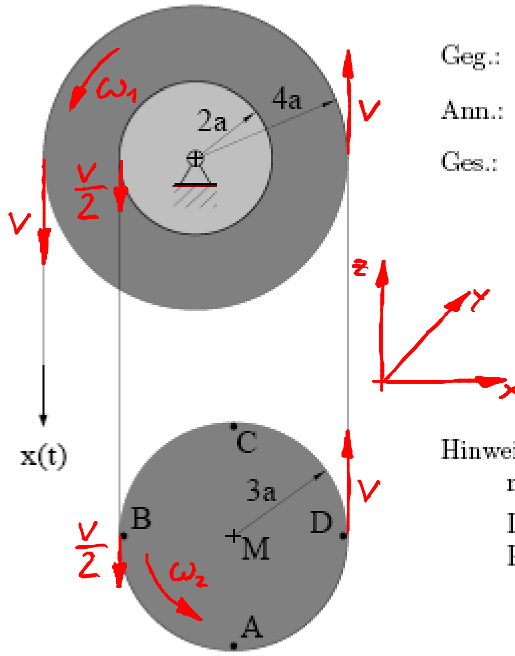
1. Flaschenzug

Ein undehnbares Seil ist gemäß Skizze um die rauhen Rollen geschlungen und an einem Ende an der Rolle mit Radius $2a$ aufgespult. Die Rollen mit den Radien $2a$ und $4a$ sind untereinander fest verbunden. Man ermittle bei vorgegebenem $x(t)$ die Geschwindigkeiten und Beschleunigung der Punkte A, B, C, D, M.



Geg.: a, $x(t)$.

Ann.: Reines Rollen.

Ges.:

(a) die Geschwindigkeit des Mittelpunkts der freien Rolle,

(b) die Winkelgeschwindigkeit ω der Rolle,

(c) die Geschwindigkeits und Beschleunigungsvektoren der Massenpunkte A, B, C und D am Rand der freien Rolle.

Hinweise: Fertigen Sie eine Skizze der Geschwindigkeitsvektoren an.

Die Punkte A, B, C und D befinden sich am Rand der Rolle.

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{r^2}(\vec{r} \times \vec{v})}$$

ω_2 als Überlagerung der Beiträge von $-\frac{v}{2}$ und v

$$\vec{\omega}_2 = \underbrace{\frac{1}{36a^2}\left(6a\vec{e_x} \times v\vec{e_z}\right)}_{\omega_B \text{ für } \vec{v_D} = \emptyset} + \underbrace{\frac{1}{36a^2}\left((-6a)\vec{e_x} \times \left(-\frac{v}{2}\right)\vec{e_z}\right)}_{\omega_D \text{ für } \vec{v_B} = \emptyset} = -\frac{6a}{36a^2} v\,\vec{e_y} - \frac{6a}{72a^2} v\,\vec{e_y}$$

$$\vec{\omega}_2 = -\frac{v}{4a}\vec{e_y}$$

$\omega_2 = -\frac{v}{4a}$ Skalar!

$$\boxed{\vec{v_P} = \vec{v_Q} + \vec{\omega} \times \vec{r_{PQ}}}$$

$$\vec{v_M} = \vec{v_B} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{MB} = -\frac{1}{2}v\vec{e_z} - \frac{v}{4a}\vec{e_y} \times 3a\vec{e_x} =$$

$$= -\frac{1}{2}v\vec{e_z} + \frac{3}{4}v\vec{e_z} = \frac{1}{4}v\vec{e_z}$$

$\vec{v_M} = -a\omega_2\vec{e_z}$

$$\vec{v_A} = \vec{v_M} + \omega_2 \times \vec{r_{AM}} = \frac{1}{4}v\vec{e_z} - \frac{1}{4a}v\vec{e_y} \times (-3a)\vec{e_z} = \frac{1}{4}v\vec{e_z} + \frac{3}{4}v\vec{e_x}$$

$$\vec{v_A} = \frac{1}{4}v(3\vec{e_x} + \vec{e_z})$$

$$\vec{v_B} = \vec{v_M} + \omega_2 \times \vec{r_{BM}} = \frac{1}{4}v\vec{e_z} - \frac{1}{4a}v\vec{e_y} \times (-3a)\vec{e_x} = \frac{1}{4}v\vec{e_z} - \frac{3}{4}v\vec{e_z}$$

$$\vec{v_B} = -\frac{1}{2}v\vec{e_z}$$

$$\vec{v_C} = \vec{v_M} + \omega_2 \times \vec{r_{CM}} = \frac{1}{4}v\vec{e_z} - \frac{1}{4a}v\vec{e_y} \times 3a\vec{e_z} = \frac{1}{4}v\vec{e_z} - \frac{3}{4}v\vec{e_x}$$

$$\vec{v_C} = \frac{1}{4}v(\vec{e_z} - 3\vec{e_x})$$

$$\vec{v_D} = \vec{v_M} + \omega_z \times \vec{r_{DM}} = \frac{1}{4} v\vec{e_z} - \frac{1}{4a} v\vec{e_y} \times 3a\vec{e_x} = \frac{1}{4} v\vec{e_z} + \frac{3}{4} v\vec{e_z}$$

$$\vec{v_D} = v\vec{e_z}$$

$$\vec{a_M} = \dot{\vec{v}}_M \qquad \vec{a_M} = -a\dot{\omega}_z \vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{a_P} = \vec{a_Q} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r_{PQ}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_{PQ}})}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a_A} &= \vec{a_M} + \dot{\vec{\omega}}_z \times \vec{r_{AM}} + \vec{\omega_z} \times (\vec{\omega_z} \times \vec{r_{AM}}) \\
&= \vec{a_M} + \dot{\omega}_z \vec{e_y} \times (-3a)\vec{e_z} + \omega_z \vec{e_y} \times (\omega_z \vec{e_y} \times (-3a)\vec{e_z}) \\
&= -a\dot{\omega}_z \vec{e_z} - 3a\dot{\omega}_z \vec{e_x} + \omega_z \vec{e_y} \times (-3a\omega_z \vec{e_x})
\end{aligned}$$

$$\vec{a_A} = a\dot{\omega}_z (3\vec{e_x} - \vec{e_z}) + 3a\omega_z^2 \vec{e_z}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a_B} &= \vec{a_M} + \dot{\vec{\omega}}_z \times \vec{r_{BM}} + \vec{\omega_z} \times (\vec{\omega_z} \times \vec{r_{BM}}) \\
&= \vec{a_M} + \dot{\omega}_z \vec{e_y} \times (-3a)\vec{e_x} + \omega_z \vec{e_y} \times (\omega_z \vec{e_y} \times (-3a)\vec{e_x}) \\
&= -a\dot{\omega}_z \vec{e_z} + 3a\dot{\omega}_z \vec{e_z} + \omega_z \vec{e_y} \times 3a\omega_z \vec{e_z}
\end{aligned}$$

$$\vec{a_B} = 2a\dot{\omega}_z \vec{e_z} + 3a\omega_z^2 \vec{e_x}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a_C} &= \vec{a_M} + \dot{\vec{\omega}}_z \times \vec{r_{CM}} + \vec{\omega_z} \times (\vec{\omega_z} \times \vec{r_{CM}}) \\
&= \vec{a_M} + \dot{\omega}_z \vec{e_y} \times 3a\vec{e_z} + \omega_z \vec{e_y} \times (\omega_z \vec{e_y} \times 3a\vec{e_z}) \\
&= -a\dot{\omega}_z \vec{e_z} - 3a\dot{\omega}_z \vec{e_x} + \omega_z \vec{e_y} \times (-3a\omega_z)\vec{e_x}
\end{aligned}$$

$$\vec{a_C} = -a\dot{\omega}_z (3\vec{e_x} + \vec{e_z}) + 3a\omega_z^2 \vec{e_z}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a_D} &= \vec{a_M} + \dot{\vec{\omega}}_z \times \vec{r_{DM}} + \vec{\omega_z} \times (\vec{\omega_z} \times \vec{r_{DM}}) \\
&= \vec{a_M} + \dot{\omega}_z \vec{e_y} \times 3a\vec{e_x} + \omega_z \vec{e_y} \times (\omega_z \vec{e_y} \times 3a\vec{e_x}) \\
&= -a\dot{\omega}_z \vec{e_z} - 3a\dot{\omega}_z \vec{e_z} + \omega_z \vec{e_y} \times (-3a\omega_z)\vec{e_z}
\end{aligned}$$

$$\vec{a_D} = -4a\dot{\omega}_z \vec{e_z} + 3a\omega_z^2 \vec{e_x}$$