4) Streutheorie

oder wie wir die Struktur von Materie entschlüsseln

Burgd. 11

Schwabl 18

4) Streutheorie

oder wie wir die Struktur von Materie entschlüsseln

Burgd. 11
Schwabl 18

Unsere Kenntniss der Struktur von Materie und Materialien basiert zum großen Teil auf Streuexperimenten

4) Streutheorie
oder wie wir die Struktur von Materie entschlüsseln

📖Burgd. 11
📖Schwabl 18

Unsere Kenntniss der Struktur von Materie und Materialien basiert zum großen Teil auf Streuexperimenten

Ziel

Allgemeine Beschreibung des Streuprozesses.

4) Streutheorie
oder wie wir die Struktur von Materie entschlüsseln

Burgd. 11
Schwabl 18

Unsere Kenntniss der Struktur von Materie und Materialien basiert zum großen Teil auf Streuexperimenten

Ziel

Allgemeine Beschreibung des Streuprozesses.

Asymptotik:

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \left[e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

(ebene Welle + gestreute Kugelwelle)

4) Streutheorie

oder wie wir die Struktur von Materie entschlüsseln

Burgd. 11
Schwabl 18

Unsere Kenntniss der Struktur von Materie und Materialien basiert zum großen Teil auf Streuexperimenten

Ziel

Allgemeine Beschreibung des Streuprozesses.

Asymptotik:

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \left[e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

(ebene Welle + gestreute Kugelwelle)

Mathematische Beschreibung:
differentieller Wirkungsquerschnitt, Streuphase

4) Streutheorie
oder wie wir die Struktur von Materie entschlüsseln

Burgd. 11
Schwabl 18

Unsere Kenntniss der Struktur von Materie und Materialien basiert zum großen Teil auf Streuexperimenten

Ziel

Allgemeine Beschreibung des Streuprozesses.

Asymptotik:

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \left[e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}\right]$$

(ebene Welle + gestreute Kugelwelle)

Mathematische Beschreibung:
differentieller Wirkungsquerschnitt, Streuphase

Berechnung:
Bornsche Approximation

4.1) Asymptotik, differentieller Wirkungsquerschnitt

Voraussetzungen:

- kurzreichweitiges Potentiat $|V(\vec{r})| \leq r^{-\alpha}$ für $r \to \infty$ mit $\alpha > 1$
(Coulomb Potential $V(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{r}$ nicht enthalten!)

- Zweikörperpotential $V(\vec{r})$
- elastische Streuung (Energieerhaltung)
- kein Spin

4.1) Asymptotik, differentieller Wirkungsquerschnitt

Voraussetzungen:

- kurzreichweitiges Potentiat $|V(\vec{r})| \leq r^{-\alpha}$ für $r \to \infty$ mit $\alpha > 1$
(Coulomb Potential $V(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{r}$ nicht enthalten!)
- Zweikörperpotential $V(\vec{r})$
- elastische Streuung (Energieerhaltung)
- kein Spin

Zusammenfassung

Dann ist

$$\psi(\vec{r}) \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \left[e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \tag{1}$$

asymptisches Verhalten für $r \to \infty$ (Beweis s. Tafel)

Definition Wirkungsquerschnitt

Einfallender Teilchenstrom:

$$\text{Stromdichte (-fluss) } J_0 = \frac{\text{Zahl einfallender Teilchen}}{\text{Flächeneinheit Zeiteinheit}} \tag{2}$$

Zusammenfassung

Messung im Detektor mit Öffnungswinkel $d\Omega$*:*

$$d\mathcal{N} = \underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{\text{differentieller Wirkungsquerschnitt}} J_0 d\Omega \tag{3}$$

(pro Zeiteinheit in Richtung θ, ϕ *und in Raumwinkel* $d\Omega$ *gestreute Teilchen)*

Definition Wirkungsquerschnitt

Einfallender Teilchenstrom:

$$\text{Stromdichte (-fluss) } J_0 = \frac{\text{Zahl einfallender Teilchen}}{\text{Flächeneinheit Zeiteinheit}} \tag{2}$$

Zusammenfassung

Messung im Detektor mit Öffnungswinkel $\mathrm{d}\Omega$*:*

$$\mathrm{d}\mathcal{N} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}}_{\text{differentieller Wirkungsquerschnitt}} J_0 \mathrm{d}\Omega \tag{3}$$

(pro Zeiteinheit in Richtung θ, ϕ *und in Raumwinkel* $\mathrm{d}\Omega$ *gestreute Teilchen)*

$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$*: Dimension Fläche (Streuquerschnitt)*

(eff. Fläche die Target f. Streuung in Richtung θ, ϕ *bietet)*

Definition Wirkungsquerschnitt

Einfallender Teilchenstrom:

$$\text{Stromdichte (-fluss) } J_0 = \frac{\text{Zahl einfallender Teilchen}}{\text{Flächeneinheit Zeiteinheit}} \tag{2}$$

Zusammenfassung

Messung im Detektor mit Öffnungswinkel $\mathrm{d}\Omega$*:*

$$\mathrm{d}\mathcal{N} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}}_{\text{differentieller Wirkungsquerschnitt}} J_0 \mathrm{d}\Omega \tag{3}$$

(pro Zeiteinheit in Richtung θ, ϕ *und in Raumwinkel* $\mathrm{d}\Omega$ *gestreute Teilchen)*

$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$*: Dimension Fläche (Streuquerschnitt)*
(eff. Fläche die Target f. Streuung in Richtung θ, ϕ *bietet)*

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 \;, \quad \sigma_{\mathrm{tot}} = \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \qquad s. \tag{4}$$

4.2) Lippmann-Schwinger-Gleichung

Gesucht: stationäre Lösungen $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ der S-Glg.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right]\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \underbrace{E_k}_{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \tag{5}$$

4.2) Lippmann-Schwinger-Gleichung

Gesucht: stationäre Lösungen $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ der S-Glg.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right]\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \underbrace{E_k}_{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \tag{5}$$

Umformen:

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right]\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \underbrace{U(\vec{r})}_{2mV(\vec{r})/\hbar^2}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \tag{6}$$

4.2) Lippmann-Schwinger-Gleichung

Gesucht: stationäre Lösungen $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ der S-Glg.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right]\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \underbrace{E_k}_{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \tag{5}$$

Umformen:

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right]\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \underbrace{U(\vec{r})}_{2mV(\vec{r})/\hbar^2}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \tag{6}$$

Lösung der DGL mittels Greenscher-Funktion:

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right]G^{\pm}(\vec{k};\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{7}$$

liefert s. 

$$G^{\pm}(\vec{k};\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{8}$$

Ebene Welle $\Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} e^{i\vec{k}\vec{r}}$ ist Lösung der homogenen Glg.

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right] \Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = 0 \tag{9}$$

Zusammenfassung

Zusammen erhalten wir die Lippmann-Schwinger-Glg.

$$\psi^{\pm}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) + \int \mathrm{d}^3 r' \; G^{\pm}(\vec{k}; \vec{r}, \vec{r}') U(\vec{r}') \psi^{\pm}_{\vec{k}}(\vec{r}') \tag{10}$$

Ebene Welle $\Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} e^{i\vec{k}\vec{r}}$ ist Lösung der homogenen Glg.

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right] \Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = 0 \tag{9}$$

Zusammenfassung

Zusammen erhalten wir die Lippmann-Schwinger-Glg.

$$\psi^{\pm}_{\vec{k}}(\vec{r}) = \Phi_{\vec{k}}(\vec{r}) + \int \mathrm{d}^3 r' \; G^{\pm}(\vec{k}; \vec{r}, \vec{r}')U(\vec{r}')\psi^{\pm}_{\vec{k}}(\vec{r}') \tag{10}$$

$$f(\theta,\phi) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}\langle \vec{k}' | V | \psi^{+}_{\vec{k}} \rangle \quad s. \tag{11}$$

mit $\vec{k}' = (k, \theta, \phi)$; *Winkel gegnüber* $\vec{k}$: $\angle(\vec{k}', \vec{k})$

noch zu berechnen: $|\psi^{+}_{\vec{k}}\rangle$

4.3) Bornsche Näherung

Zusammenfassung

Umformen der Lippmann-Schwinger-Glg. liefert

$$|\psi^{\pm}_{\vec{k}}\rangle = \underbrace{\left(1 - G^{\pm}_{0}(\vec{k})U\right)^{-1}}_{\sum_{n=0}^{\infty}(G^{\pm}_{0}(\vec{k})U)^{n}} |\vec{k}\rangle \tag{12}$$

und die Projektion auf $\langle\vec{k}'|$

$$f(\theta,\phi) = -2\pi^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\langle\vec{k}'|U(G^{\pm}_{0}(\vec{k})U)^{n}|\vec{k}\rangle \tag{13}$$

Das Mitnehmen von Termen bis zur Ordnung n wird als Bornsche Näherung in $(n+1)$ter Ordung bezeichnet ($n:$ Potenz von U bzw. V)

4.4) Partialwellenentwicklung und Streuphase

Idee

Betrachten sphärisch-symmetrisches Potential $V(\vec{r}) = V(r)$

4.4) Partialwellenentwicklung und Streuphase

Idee

Betrachten sphärisch-symmetrisches Potential $V(\vec{r}) = V(r)$
einfallenden Strahl in $z-$ *Richtung* $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$.

4.4) Partialwellenentwicklung und Streuphase

Idee

Betrachten sphärisch-symmetrisches Potential $V(\vec{r}) = V(r)$
einfallenden Strahl in $z-$ *Richtung* $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$.

$\Rightarrow$ *Entwicklung nach Besselfunktionen* $P_l(\cos\theta)$:

4.4) Partialwellenentwicklung und Streuphase

Idee

Betrachten sphärisch-symmetrisches Potential $V(\vec{r}) = V(r)$ *einfallenden Strahl in* $z -$ *Richtung* $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$.

$\Rightarrow$ *Entwicklung nach Besselfunktionen* $P_l(\cos\theta)$:

$$\psi_{\vec{k}}(\underbrace{\vec{r}}_{r,\theta}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) R_{lk}(r) P_l(\cos\theta) \tag{14}$$

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(k) P_l(\cos\theta) \tag{15}$$

keine Abhängigkeit von φ, *da symmetrisch bzgl.* φ*-Rotationen!*

Zusammenfassung

Asymptotik $r \to \infty$ der exakten Lösung der S-Glg.

$$R_{lk}(r) = \frac{e^{i\delta_l}}{kr} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \tag{16}$$

Zusammenfassung

Asymptotik $r \to \infty$ der exakten Lösung der S-Glg.

$$R_{lk}(r) = \frac{e^{i\delta_l}}{kr} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \tag{16}$$

"Nur" (l-abhängige) Phasenverschiebung δ_l

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) \underbrace{\frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin(\delta_l)}_{\equiv f_l \text{ Partialwellen-Beitrag}} P_l(\cos\theta) \tag{17}$$

Zusammenfassung

Asymptotik $r \to \infty$ der exakten Lösung der S-Glg.

$$R_{lk}(r) = \frac{e^{i\delta_l}}{kr} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \tag{16}$$

"Nur" (l-abhängige) Phasenverschiebung δ_l

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) \underbrace{\frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin(\delta_l)}_{\equiv f_l \text{ Partialwellen-Beitrag}} P_l(\cos\theta) \tag{17}$$

Totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \sum_l \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2(\delta_l) \tag{18}$$

Zusammenfassung

Asymptotik $r \to \infty$ der exakten Lösung der S-Glg.

$$R_{lk}(r) = \frac{e^{i\delta_l}}{kr} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) \tag{16}$$

"Nur" (l-abhängige) Phasenverschiebung δ_l

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) \underbrace{\frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin(\delta_l)}_{\equiv f_l \text{ Partialwellen-Beitrag}} P_l(\cos\theta) \tag{17}$$

Totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \sum_l \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2(\delta_l) \tag{18}$$

1. Bornsche Näherung:

$$f_l = \frac{-2m}{\hbar^2} \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2 V(r) j_l(kr)^2 \approx \frac{\delta_l}{k} \tag{19}$$