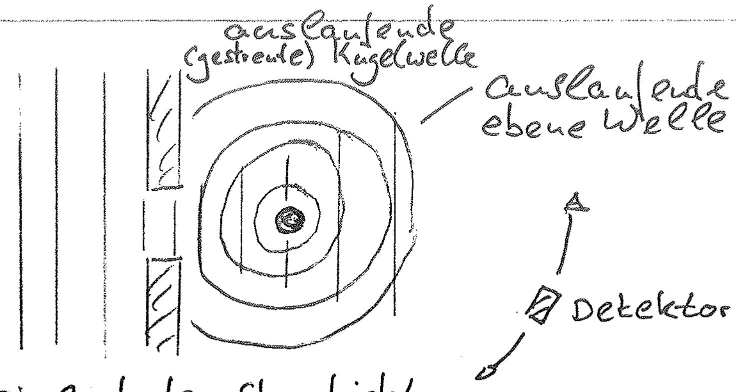
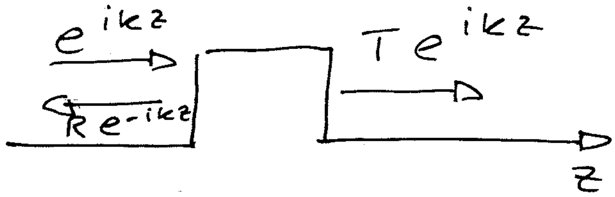
Tafel zu Kapitel 4.1



vgl. Quantentheorie I: Streuung in $d=1$



Anmerkung

eigentlich betrachten wir im Expirement folgende Situation

einfallendes Wellenpaket

$$\psi_0(\vec{r}, t_0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{r}} a_{\vec{k}}$$

aber es ist einfacher <u>stationäre</u> Lösungen der S-Glg

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(r)\right]\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = E_{\vec{k}}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad \text{mit } E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

zu behandeln und ψ_0 nach diesen zu entwickeln

$$\psi_0(\vec{r}, t_0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) A_{\vec{k}} e^{-\frac{i E_k (t-t_0)}{\hbar}} \quad (1)$$

(Übergang Wellenpaket → ebene Wellen)

Achtung: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ sind entarte Kontinuumszustände

---

Beweis der Asymptotik für $|V(\vec{r})| \leq r^{-\alpha}$ $\alpha > 1, r \to \infty$

$$\Big[\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2}\; + V(\vec{r})\Big] \left(e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\Theta,\phi)\,\frac{e^{\pm ikr}}{r}\right) \overset{r\to\infty}{=}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$+ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} e^{i\vec{k}\vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(f(\Theta,\phi)\cdot\frac{e^{\pm ikr}}{r}\right) + O(r^{-2}) + O(r^{-\alpha}) =$$

$$\underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{E_k}\left(e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\Theta,\phi)\,\frac{e^{\pm ikr}}{r}\right) + O(r^{-2}) + O(r^{-\alpha})$$

qed.

+ für auslaufende Kugelwelle (physikalische Lösung)

Radiale Stromdichte:

$$J_R(\Omega) = \frac{\hbar}{2mi}\left\{\psi^* \frac{\partial}{\partial r}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial r}\psi^*\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left[f^*(\Theta,\phi)\,\frac{e^{\mp ikr}}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} f(\Theta,\phi)\,\frac{e^{\pm ikr}}{r}\right]$$

$$= \frac{\hbar k}{m}\,|f(\Theta,\phi)|^2\,\frac{1}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsflussdichte in $d\Omega$, Richtung Θ,ϕ:

$$J_{total} = r^2 J_R(\Omega) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{\hbar k}{m}|f(\Theta,\phi)|^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{J_{total}}{J_{in}} = \frac{\frac{\hbar k}{m}|f(\Theta,\phi)|^2}{\frac{\hbar k}{m}} = |f(\Theta,\phi)|^2$$

Integration $d\Omega$ $\Rightarrow$ totaler Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega\,\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega\,|f(\Theta,\phi)|^2$$

Tafel zu Kapitel 4.2

Einsetzen Lippmann-Schwinger-Glg in umgeformte S-Glg:

$$\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right] \left(\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) + \int d^3r' \, G_0^\pm(\vec{k}; \vec{r}, \vec{r}') \, U(\vec{r}') \, \psi_{\vec{k}}^\pm(\vec{r}') \right)$$

$$= 0 + \int d^3r' \, \delta(\vec{r} - \vec{r}') \, U(\vec{r}') \, \psi_{\vec{k}}^\pm(\vec{r}')$$

ist erfüllt, da $\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right] \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = 0$ und $\left[\vec{\nabla}^2 + k^2\right] G_0^\pm = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

in Dirac-Notation ergibt sich (s. Übung)

$$|\psi_{\vec{k}}^\pm\rangle = |\vec{k}\rangle + G_0^\pm(\vec{k}) \, U \, |\psi_{\vec{k}}^\pm\rangle$$

$$\text{mit } G_0^\pm(\vec{k}; \vec{r}, \vec{r}') = \langle \vec{r} | G_0^\pm(\vec{k}) | \vec{r}' \rangle$$

Bemerkung:
- Lippmann-Schwinger-Glg ist äquivalent zur S-Glg mit Streurandbedingungen
- aus- und einlaufende Welle sind 2 linear unabh. Lösungen
- Wie ebene Wellen sind $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ nicht L^2 quadratintegrabel

Asymptotik Lippmann-Schwinger-Glg.:

$$k|\vec{r} - \vec{r}'| = k\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'} \underset{r \gg r'}{\approx} kr - k \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}'$$

$$\Rightarrow G_0^\pm(\vec{k}; \vec{r}, \vec{r}') \xrightarrow{r \to \infty} -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\mp ik\vec{r}\cdot\vec{r}'/r} \cdot e^{\pm ikr}}{r}$$

(im Zähler, nicht aber im schnell fluktuierenden Exponenten kann der 2. Term vernachlässigt werden

Mit $\vec{k}' = k \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ erhält man folgende Asymptotik:

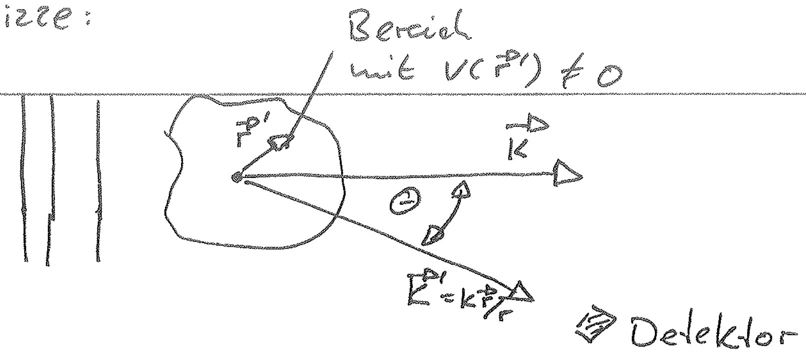
$$\psi_{\vec{k}}^\pm(\vec{r}) = \underbrace{\phi_{\vec{k}}(\vec{r})}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} e^{i\vec{k}\vec{r}}} - \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} \int d^3r' \, e^{\mp i\vec{k}'\vec{r}'} \, U(\vec{r}') \, \psi_{\vec{k}}^\pm(\vec{r}')$$

$$\Rightarrow f(\theta, \phi) = -\frac{\sqrt{2\pi}^3}{4\pi} \int d^3r' \, e^{-i\vec{k}'\vec{r}'} \, U(\vec{r}') \, \psi_{\vec{k}}^+(\vec{r}')$$

$$= -2\pi^2 \cdot \langle \underbrace{\vec{k}'}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} e^{-i\vec{k}'\vec{r}'}} | U | \psi_{\vec{k}}^+ \rangle$$

beachte: $|k'| = k$

Skizze:



Tafel zu Kapitel 4.3

Umformen der Lippmann-Schwinger-Glg:

$$|\psi^{\pm}_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle + G_0^{\pm}(\vec{k})\, U\, |\psi^{\pm}_{\vec{k}}\rangle$$

$$\left[1 - G_0^{\pm}(\vec{k})\, U\right] |\psi^{\pm}_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle$$

$$\underbrace{|\psi^{\pm}_{\vec{k}}\rangle}_{\text{Streuwellenfkt.}} = \underbrace{\left[1 - G_0^{\pm}(\vec{k})\, U\right]^{-1}}_{\text{Integraloperator}} \underbrace{|\vec{k}\rangle}_{\text{ebene Welle}}$$

mit $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

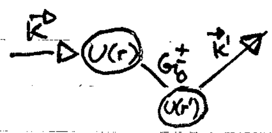
$$|\psi^{\pm}_{\vec{k}}\rangle = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[G_0^{\pm}(\vec{k})\, U\right]^n\right) |\vec{k}\rangle$$

Achtung: Konvergiert nur für
$|V(\vec{r})| < r^{-\beta}$ $\beta > 3$!
(Reed, Simon 1979)

$$\Rightarrow \quad f(\Theta, \phi) = -2\pi^2 \langle \vec{k}\,' | U | \psi^{+}_{\vec{k}} \rangle$$

$$= -2\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \langle \vec{k}\,' | U \left(G_0^{\pm}(\vec{k})\, U\right)^n | \vec{k} \rangle$$

Skizze



$$= -2\pi^2 \left[\langle \vec{k}\,' | U | \vec{k} \rangle + \langle \vec{k}\,' | U\, G_0^{\pm}(\vec{k})\, U | \vec{k} \rangle + \mathcal{O}(U^3)\right]$$

Vgl. Störungstheorie 1. Ordnung $\langle \phi_0 | V | \phi_0 \rangle$

2. Ordnung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle \phi_0 | V | \phi_n \rangle|^2}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n}$ für GS

Greensche Funktion spielt Rolle des Energie-Nenner