

Dies sieht man auch durch Umformung

$$(\nabla^2 + k^2) G_0^\pm(\vec{k}; \vec{p}, \vec{p}') = \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} G_0^\pm(\vec{k}; \vec{p}, \vec{p}') = \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \underbrace{H_0}_{\frac{\hbar^2 \vec{p}^2}{2m}} \pm i\epsilon \right)^{-1} \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$\downarrow \text{F.T.} \\ \vec{p} \rightarrow \vec{q}; \vec{p}' = 0$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} G_0^\pm(\vec{k}; \vec{p}, \vec{p}') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \underbrace{\frac{\hbar^2 q^2}{2m}}_E \pm i\epsilon \right)^{-1}$$

"T-Matrix" (Übergangsoperator)

$$f(\theta, \phi) = -2\pi^2 \langle \vec{k}' | U [1 - G_0^\pm U]^{-1} | \vec{k} \rangle$$

$$= -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \underbrace{\langle \vec{k}' | V [1 - G_0^\pm \frac{2m}{\hbar^2} V]^{-1} | \vec{k} \rangle}_{\equiv T}$$

$$= -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \underbrace{\langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle}_{\text{Übergangs (T)-Matrix}} \quad \text{beachte } |\vec{k}'| = |\vec{k}|$$

Weitere Definition:

$$\text{Streue-Operator } S \equiv 1 - 2\pi i T \\ (\text{S-Matrix})$$

$$\Rightarrow T = \frac{i}{2\pi} (S - 1)$$

$$\Rightarrow f(\theta, \phi) = -\frac{2\pi i m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | S - 1 | \vec{k} \rangle$$

$$\underbrace{\langle \vec{k}' | S | \vec{k} \rangle}_{\text{außerhalb}} - \delta(\vec{k}' - \vec{k})$$

der Vorwärtsrichtung wie "T" Matrix  $\times 2\pi/\epsilon$

Man kann zeigen (ohne Beweis):

$$S = \underbrace{U_I(+\infty, -\infty)}_{\text{Evolution Operator im Wechselwirkungs-Bild}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{U_I(+T, -T)}_{e^{-\frac{i}{\hbar} H 2T}}$$

(5)

# Beispiel Yukawa-Potential

$$V(\vec{r}) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

kurzreichweitiges Potential  
aus Kernphysik

1. Bornsche Näherung:

$$f(\theta, \phi) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle$$

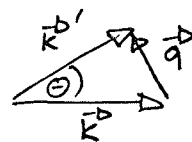
$$\langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 r e^{-i\vec{k}'\vec{r}} V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

mit  $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$

$$\Rightarrow q^2 = k'^2 + k^2 - 2\vec{k}\vec{k}'$$

$$= 2k^2(1 - \cos\theta)$$

$$= 2k^2 \underbrace{(1 - \cos\theta)}_{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$



$$\Rightarrow \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \frac{V_0}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d(\cos\tilde{\theta}) \frac{e^{-\alpha r}}{r} e^{iqr \cos\tilde{\theta}}$$

$$= \frac{V_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dr r e^{-\alpha r} \frac{1}{qr} \frac{1}{i} \underbrace{e^{iqr \cos\tilde{\theta}}}_{e^{iqr} - e^{-iqr}} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{V_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{qi} \left[ \frac{1}{iq - \alpha} e^{iqr - \alpha r} \Big|_0^\infty - \frac{1}{-iq - \alpha} e^{-iqr - \alpha r} \Big|_0^\infty \right]$$

$$= \frac{V_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{qi} \left( \frac{1}{\alpha - iq} - \frac{1}{\alpha + iq} \right) = \frac{V_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{qi} \frac{2iq}{\alpha^2 - (iq)^2} = \frac{2V_0}{(2\pi)^2 (\alpha^2 + q^2)}$$

$$\Rightarrow f(\theta, \phi) = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot V_0 \cdot \frac{1}{\alpha^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{bzw. } \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 = \frac{4m^2}{\hbar^4} V_0^2 \frac{1}{(\alpha^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2}$$

# Coulomb Grenzfall

Yukawa-Pot.

$$V(\vec{r}) = \frac{V_0}{r} e^{-\alpha r}$$

$V_0 = z_1 z_2 e^2$  Coulomb Pot  
 $\alpha \rightarrow 0 \rightarrow \Delta$

$$V(\vec{r}) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r}$$

$\alpha \rightarrow 0$  in Glg für  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  von S. 6 liefert

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2}{\hbar^4} V_0^2 \frac{1}{(4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2} = \left( \frac{z_1 z_2 e^2}{4\epsilon} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$\frac{z_1 z_2 e^2}{4\epsilon}$   
 $\frac{z_1 z_2 e^2}{2m}$

überraschenderweise (P) ist dies richtiges Ergebnis für Rutherford-Querschnitt

- obwohl:
- nur 1. Bornsche Näherung
  - $|V(r)|$  nicht  $< \frac{1}{r^\beta}$ ;  $\beta > 3$  d.h. Bornsche Reihe nicht konvergent
  - $|V(r)|$  nicht  $< \frac{1}{r^\alpha}$ ;  $\alpha > 1$  d.h. Asymptotik nicht korrekt

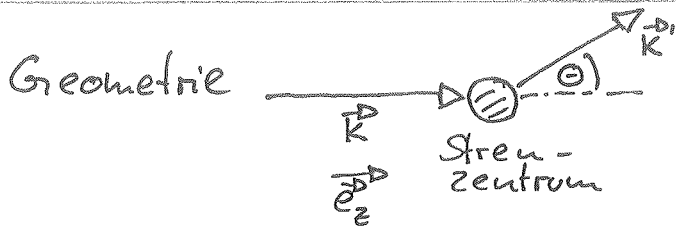
tatsächlich ergibt sich kein konstantes  $f(\theta, \phi)$  für  $r \rightarrow \infty$

$$\text{aber } f(\theta, \phi, r) = \underbrace{\tilde{f}(\theta, \phi)}_{\text{konstant für } r \rightarrow \infty} \cdot \underbrace{e^{i\phi_c}}_{\text{fluktuierende Phase für } r \rightarrow \infty}$$

$$\text{daher macht } \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi, r)|^2 = |\tilde{f}(\theta, \phi)|^2 \quad \text{Sinn}$$

- Rutherford-Querschnitt wurde von Geiger-Madsen bei Beschuss einer Goldfolie mit  $\alpha$ -Teilchen gemessen.  
Wegen Langreichweitiger Coulomb-WW sah man bei der niedrigen Energie der  $\alpha$ -Teilchen Kernpotential nicht.  
Die  $\alpha$ -Teilchen wurden bereits vorher durch Coulomb-WW abgelenkt.
- exponentieller Abfall  $e^{-\kappa r}$  wegen Masse der Bosonen, die Kernkräfte vermitteln

# Tafel zu Kapitel 4.4



Keine Abhängigkeit von  $\varphi$   
da  $V(\vec{r}) = V(r)$  und  $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$

Allgemein: Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen

$$Y_l^m(\Theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \left[ \frac{2e+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right] P_l^m(\cos\Theta) e^{im\varphi}$$

da nicht von  $\varphi$  abhängig hier nur  $m=0$   $\nabla$

$$\Rightarrow \text{nur } Y_l^0(\Theta, \varphi) = \frac{2e+1}{4\pi} \underbrace{P_l^0(\cos\Theta)}_{\substack{\text{Legendre} \\ \text{Polynome}}} = \frac{1}{2^e e!} \left( \frac{d}{d \cos\Theta} \right)^e (\cos^2\Theta - 1)^e$$

$\psi_k(\vec{r})$  muss die S-Glg lösen:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right] \psi_k(\vec{r}) = \underbrace{E}_{= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} \psi_k(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) + k^2 \right] R_l(k, r) = 0$$

Für  $U=0$  oder  $r \rightarrow \infty$  (mit  $|U(r)| < r^{-\gamma}$   $\gamma > 2$  für  $r \rightarrow \infty$ ):  
Einführen der dimensionslosen Variablen  $\rho = k \cdot r$

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right] R_l(\rho) = 0$$

Dies ist die sphärische Bessel-DGL, die von sphärischen Bessel-(j<sub>l</sub>) und von Neumann-Funktion (n<sub>l</sub>) gelöst wird:

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\sin \rho}{\rho}$$

$$n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\cos \rho}{\rho}$$

divergiert  
für  $\rho \rightarrow 0$   
(irreguläre Lösung)  $\textcircled{2}$

Entwicklung der ebenen Wellen nach Kugelflächenfunktionen

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \underbrace{j_{\ell}(kr)}_{\text{nur } j_{\ell}, \text{ da } n_{\ell} \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (*)$$

Man kann nun  $a_{\ell} = (2\ell+1)i^{\ell}$  zeigen.

Dies ist etwas mühsam und z.B. wie folgt möglich:

Multiplikation von (\*) mit  $P_{\ell}(\cos \theta)$  und Integration über  $\theta$  liefert mit

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_{\ell}(\cos \theta) P_{\ell}(\cos \theta) = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1} \quad (\text{OG von } P_{\ell})$$

folgende Gg.  $\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \underbrace{e^{i\vec{k}\vec{r}\cos\theta}}_{\dots \frac{(i\vec{k}\vec{r}\cos\theta)^{\ell}}{\ell!} + \dots} P_{\ell}(\cos \theta) = \frac{2}{2\ell+1} a_{\ell} \underbrace{j_{\ell}(kr)}_{\frac{(kr)^{\ell}}{(2\ell+1)!}}$

$d(\cos \theta)$  Integration liefert für  $(kr)^{\ell}$ -Term:  $\frac{(i\vec{k}\vec{r})^{\ell} 2^{\ell} \ell!}{(2\ell+1)!}$  Asymptotik  $kr \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow a_{\ell} = (2\ell+1)i^{\ell}$$

Entwicklung der Lösung der S-Glg. nach Kugelflächenfunktionen

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell+1) R_{\ell k}(r) P_{\ell}(\cos \theta)$$

für große Abstände  $|u(r)| < 1/r$   $r > 1$

$$\Rightarrow R_{\ell k}(r) = A_{\ell} j_{\ell}(kr) + B_{\ell} n_{\ell}(kr)$$

$$j_{\ell}(kr) \approx \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) \quad \text{für } kr \gg 1$$

$$n_{\ell}(kr) \approx -\frac{1}{kr} \cos\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$$

mit  $a_{\ell} \cos \delta_{\ell} \equiv A_{\ell}$   
 $-\tan \delta_{\ell} = B_{\ell}/A_{\ell}$

$$\Rightarrow R_{\ell k}(r) = \frac{1}{kr} a_{\ell} \left[ \cos \delta_{\ell} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) + \sin \delta_{\ell} \cos\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{a_{\ell}}{kr} \cdot \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_{\ell}\right)$$

für  $r \rightarrow \infty$

(9)

$$\Rightarrow \psi(r, \theta) \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i e^{-\frac{a\ell}{kr}} \frac{e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_{\ell})} - e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_{\ell})}}{2i} P_{\ell}(\cos\theta)$$

$$\stackrel{\text{Entwicklung ebener Wellen}}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i e^{-\frac{a\ell}{kr}} \frac{1}{kr} \frac{e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2})}}{2i} P_{\ell}(\cos\theta) + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Vorfaktoren für  $e^{-ikr}$  und  $e^{ikr}$  müssen jeweils gleich sein

$$e^{ikr}: a_{\ell} = e^{i\delta_{\ell}}$$

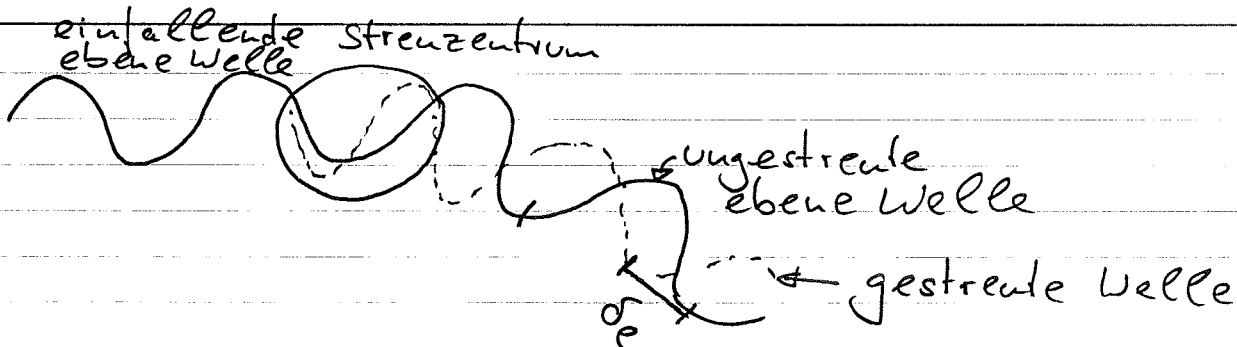
$$e^{-ikr}: f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \frac{1}{k} \underbrace{\frac{(e^{2i\delta_{\ell}} - 1)}{2i}}_{e^{i\delta_{\ell}} \sin\delta_{\ell}} P_{\ell}(\cos\theta) \quad \text{Beitrag der Partialwelle}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)(2\ell'+1) e^{i(\delta_{\ell} - \delta_{\ell'})} \sin\delta_{\ell} \sin\delta_{\ell'} P_{\ell}(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta)$$

Interferenzterme fallen weg für totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2\delta_{\ell}$$

Skizze



$\delta_{\ell} < 0$  attraktives Potential } für schwaches  
 $\delta_{\ell} > 0$  repulsives Potential } langsam variierendes  $V$

Streuung jeder Partialwelle  $\ell$  wird durch eine Phase  $\delta_{\ell}$  beschrieben

Bemerkungen • Resonanz (Maximum  $\sin^2\delta_{\ell}$ ) für  $\delta_{\ell} = (2\ell+1)\frac{\pi}{2}$   
 • Nur Terme mit  $k \cdot a \lesssim \ell$  sind relevant  
 Reichweite Pot

(Für  $r > a$  wirkt nur  $\frac{1}{r^2} e^{i\ell(1)/2\pi r^2}$  dies hat für  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  den klassischen

Umschlagsradius  $r_{\text{cl}} = \sqrt{2m|V|} / k \approx \ell/k$   
 für  $a \lesssim r_{\text{cl}} = \ell/k$  spürt Teilchen nichts vom Pot.)

(10)

# Optisches Theorem

Aus  $f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{k} (2\ell+1) e^{i\theta} \sin \theta P_{\ell}(\cos \theta)$

folgt:

$$\text{Im } f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \theta P_{\ell}(\cos \theta)$$

bzw.  $\underline{\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(\theta)}$  da  $P_{\ell}(\cos 0 = 1) = 1$

Zusammenhang zwischen totalen Streuquerschnitt  $\sigma$  und  $\text{Im } f(\theta)$  ist physikalisch Folge des Erhalts der Teilchenzahl

## 1. Bornsche Näherung für $\sigma_{\ell}$ :

Wir erinnern uns:

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} V(r') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \parallel \vec{e}_z$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \tilde{\theta}) \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell+1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

Winkel  $\angle(\vec{k}', \vec{r}')$

Mit Additionstheorem für Kugelfunktionen:

$$P_{\ell}(\cos \tilde{\theta}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\Omega_{\vec{r}'}) \cdot Y_{\ell m}(\Omega_{\vec{r}})$$

$\theta, \phi$  von  $\vec{r}'$  in Koord. System zu  $\vec{k}'$   
d.h.  $\theta, \phi \in (\vec{k}', \vec{r}')$        $\theta, \phi$  von  $\vec{r}$  ( $\vec{r}', \vec{k}$ )

und o.G.:  $\int d\Omega_{\vec{r}'} Y_{\ell m}(\Omega_{\vec{r}'}) P_{\ell}(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \delta_{\ell 0} \delta_{m 0}$   
 $= \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell 0}(\Omega_{\vec{r}'})$

erhalten wir:

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \int dr r^2 V(r) (j_{\ell}(kr))^2 P_{\ell}(\cos \theta)$$

bzw  $f_{\ell} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int dr r^2 V(r) (j_{\ell}(kr))^2$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{k} e^{i\theta} \sin \theta \approx \frac{\sigma_{\ell}}{k} \text{ für kleines } \sigma_{\ell}$$

## Beispiel: rotations-symmetrisches, konstantes Streuzentrum

$$V(r) = \begin{cases} \pm V_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

$$\int dr \sin^2 kr = \frac{1}{2} r - \frac{1}{4k} \sin 2kr$$

liefert für s-Welle:

$$f_0 = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^a dr r^2 (\pm V_0) \cdot \left(\frac{\sin kr}{kr}\right)^2$$

$$= \pm \frac{2m}{\hbar^2} \cdot V_0 \cdot \left[ \frac{1}{2} \frac{a^3}{k^3} - \frac{1}{4k^3} \sin 2ka \right]$$