

## 5) Relativistische Quantentheorie

 Kap. 5

### Zusammenfassung

Gesucht: **Relativistische Variante** der Schrödinger-Glg.  
mit  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$   
und Lorentz-Invarianz

Versuch 2 (Lösung 1, für Spin-0): **Klein-Gordon-Glg.**

$$-\partial_\mu \partial^\mu \psi(x^\mu) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(x^\mu) \quad (1)$$

Versuch 3 (Lösung 2, für Fermionen): **Dirac-Glg.**

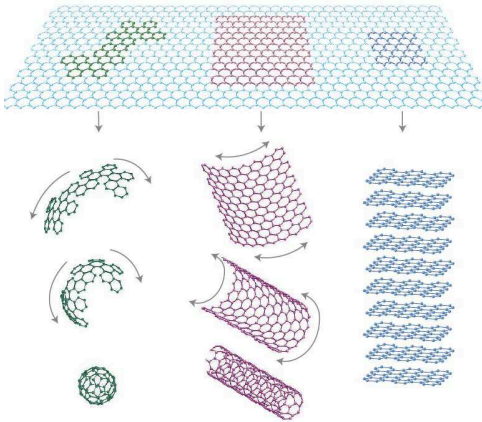
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x^\mu) = \left( c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2 \right) \psi(x^\mu) \quad (2)$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \text{diag}(1, 1, -1, -1) \quad (3)$$

## 5.6) Graphene

## Physik-Nobelpreis 2010 (Geim,Novoselov)

### Monolage Kohlenstoff



Fullerene

Nanotubes

Graphite

Nobelpreis Chemie'96

## Idee

*Herstellung*

*Präparation einfach: "Bleistift" und "Tape"*

*Finden schwierig: optisch und AFM*

## Idee

*Herstellung*

*Präparation einfach: "Bleistift" und "Tape"*

*Finden schwierig: optisch und AFM*

## Warum interessant?

**Potentielle Anwendungen: Elektronik**

hohe **Mobilität** freie Weglänge  $0.3\mu\text{m}$  bei 300K  
dünn und transparent,  $n \leftrightarrow p$  Dotierung durch E-Feld

**Spannende Physik: 2D Dirac-Fermionen**

QED im Festkörper ("Bleistiftstrich")

Entdeckung überraschend:

Theorie Landau'37, Peirls '35:

2D Graphit **thermodynamisch instabil**

Entdeckung überraschend:

Theorie Landau'37, Peirls '35:

2D Graphit **thermodynamisch instabil**

metastabil?

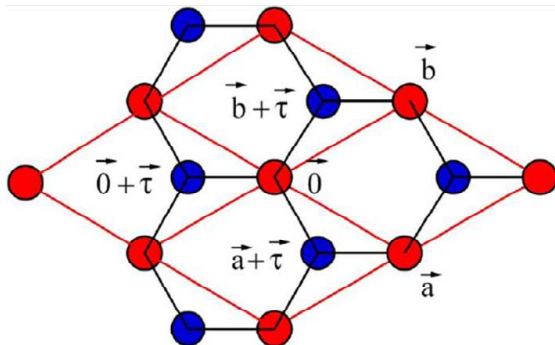
3D Verwölbung (10nm)?

gewinnt elastischer Energie

unterdrückt thermische Vibrationen

## Warum Dirac-Fermionen?

## Warum Dirac-Fermionen? → besondere Bandstruktur!

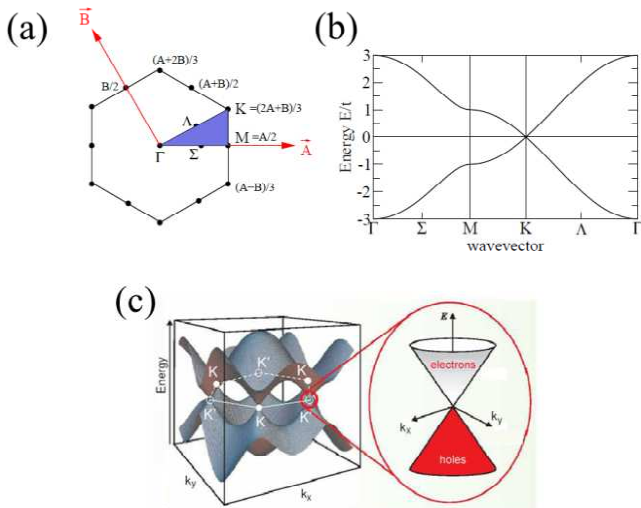


Tight-binding-Modell (Nächst-Nachbar-Hüpfen 2D  
Honigwaben-Gitter)

$$H = -t \sum_{\mathbf{R}} (|\mathbf{R} + \tau\rangle \langle \mathbf{R}| + |\mathbf{R} + \mathbf{b} + \tau\rangle \langle \mathbf{R}| + |\mathbf{R} + \mathbf{a} + \tau\rangle \langle \mathbf{R}| + H.c.)$$



# Fouriertransformation in $k$ -Raum



## Fouriertransformation in $k$ -Raum

$$h(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & h_{AB}(\mathbf{k}) \\ h_{AB}(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $h_{AB}(\mathbf{k}) = -t(1 + e^{i\mathbf{a}\mathbf{k}} + e^{i\mathbf{b}\mathbf{k}})$

## Fouriertransformation in $k$ -Raum

$$h(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & h_{AB}(\mathbf{k}) \\ h_{AB}(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } h_{AB}(\mathbf{k}) = -t(1 + e^{i\mathbf{a}\mathbf{k}} + e^{i\mathbf{b}\mathbf{k}})$$

In der Nähe von  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}'$  (d.h.  $\delta k_{x/y} = k_{x/y} - K'_{x/y}$ )

$$h(\mathbf{k}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} at \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \hbar(\delta k_x + i\delta k_y) \\ \hbar(\delta k_x - i\delta k_y) & 0 \end{pmatrix} = -\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} at}_{c_g} \sigma \mathbf{p}$$

## Fouriertransformation in $k$ -Raum

$$h(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & h_{AB}(\mathbf{k}) \\ h_{AB}(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } h_{AB}(\mathbf{k}) = -t(1 + e^{i\mathbf{a}\mathbf{k}} + e^{i\mathbf{b}\mathbf{k}})$$

In der Nähe von  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}'$  (d.h.  $\delta k_{x/y} = k_{x/y} - K'_{x/y}$ )

$$h(\mathbf{k}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} at \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \hbar(\delta k_x + i\delta k_y) \\ \hbar(\delta k_x - i\delta k_y) & 0 \end{pmatrix} = -\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} at}_{c_g} \sigma \mathbf{p}$$

d.h. 2D Dirac-Glg. masseloser Teilchen (Weyl-Glg.)

## Fouriertransformation in $k$ -Raum

$$h(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & h_{AB}(\mathbf{k}) \\ h_{AB}(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } h_{AB}(\mathbf{k}) = -t(1 + e^{i\mathbf{a}\mathbf{k}} + e^{i\mathbf{b}\mathbf{k}})$$

In der Nähe von  $\mathbf{K}, \mathbf{K}'$  (d.h.  $\delta k_{x/y} = k_{x/y} - K'_{x/y}$ )

$$h(\mathbf{k}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} at \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \hbar(\delta k_x + i\delta k_y) \\ \hbar(\delta k_x - i\delta k_y) & 0 \end{pmatrix} = -\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} at}_{c_g} \sigma \mathbf{p}$$

d.h. 2D Dirac-Glg. masseloser Teilchen (Weyl-Glg.)

$\sigma$  hier AB-Gitter-Pseudospin!

## Fouriertransformation in $k$ -Raum

$$h(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & h_{AB}(\mathbf{k}) \\ h_{AB}(\mathbf{k}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } h_{AB}(\mathbf{k}) = -t(1 + e^{i\mathbf{a}\mathbf{k}} + e^{i\mathbf{b}\mathbf{k}})$$

In der Nähe von  $\mathbf{K}, \mathbf{K}'$  (d.h.  $\delta k_{x/y} = k_{x/y} - K'_{x/y}$ )

$$h(\mathbf{k}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} at \frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & \hbar(\delta k_x + i\delta k_y) \\ \hbar(\delta k_x - i\delta k_y) & 0 \end{pmatrix} = -\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} at}_{c_g} \sigma \mathbf{p}$$

d.h. 2D Dirac-Glg. masseloser Teilchen (Weyl-Glg.)

$\sigma$  hier AB-Gitter-Pseudospin!

Ach weitere Hüpfsterme ... ändern dies nicht (Symmetrie)

## Konsequenzen

- **QED-Effekte** sehr viel einfacher zu beobachten, da  $c_g \approx c/300$  d.h.  $\alpha_g = e^2/hc_g \approx 1$
- **Chiralität** d.h. Projektion auf  $\sigma$ -Komponente in  $\mathbf{k}$ -Richtung
- **Chiraler Quanten-Hall-Effekt**
- **Kleinsches Paradoxon**
- **Leitfähigkeit** quantisiert  $4e^2/h\pi$  (Theorie:  $4e^2/h$ )
- noch viel mehr zu entdecken...

## Konsequenzen

- **QED-Effekte** sehr viel einfacher zu beobachten, da  $c_g \approx c/300$  d.h.  $\alpha_g = e^2/hc_g \approx 1$
- **Chiralität** d.h. Projektion auf  $\sigma$ -Komponente in  $\mathbf{k}$ -Richtung
- **Chiraler Quanten-Hall-Effekt**
- **Kleinsches Paradoxon**
- **Leitfähigkeit** quantisiert  $4e^2/h\pi$  (Theorie:  $4e^2/h$ )
- noch viel mehr zu entdecken...



## Literatur

- A.K. Geim and K. S. Novoselov, *The rise of graphene*, Nature Materials **6**, 183 (2007)  
<http://www.nature.com/naturematerials>
- Scientific background Noble Prize in Physics 2010  
[http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/2010/sci.htm](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2010/sci.htm)
- Lecture  
[https://wiki.physics.udel.edu/phys824/Band\\_structure\\_of\\_graphene,\\_massless\\_Dirac\\_fermions\\_as\\_low-energy\\_quasiparticles,\\_Berry\\_phase,\\_and\\_all\\_that](https://wiki.physics.udel.edu/phys824/Band_structure_of_graphene,_massless_Dirac_fermions_as_low-energy_quasiparticles,_Berry_phase,_and_all_that)