zu Kapitel 6|

Relativistische Quantenmechanik

gesucht: relativistische Version der S-Glg.
die $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ liefert
und unter Lorentz-Trafos L invariant ist

Lorentz-Trafos lassen die Metrik $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

invariant, d.h. $\underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{g}}\, \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{g}}$.

eigentliche Lorentz-Trafo

z.B. $L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \beta = \frac{v}{c}$

d.h. $x^\nu \to x^{\nu'} = L^\nu{}_\mu x^\mu \qquad x^\mu = (ct, \vec{x})$

$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad x' = \gamma(x - vt)$

Mit Einsteinscher Summations-Konvention und

$x_\nu = g_{\nu\mu} x^\mu = (ct, -\vec{x})$ (~~Verschieben Index von oben~~ nach unten durch $g_{\mu\nu}$)

Letztere Konvention erlaubt es, Lorentzinvariante Größen

als $x_\nu x^\nu = x^\nu g_{\nu\mu} x^\mu = c^2t^2 - x^2 = \text{const}$

oder mit $p^\nu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$

$$p_\nu p^\nu = p^\nu g_{\nu\mu} p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \text{const.} = m^2c^2$$

zu schreiben. Letzteres liefert $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

Wie können wir diese Glg. mit $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$

quantisieren?

Beachte $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

führt auf Lösungen $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ (*)

mit unendlich großen negativen Energien (⊖ Vorzeichen)

1. Versuch: Nur positives Vorzeichen aus (*)

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = +\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\; \psi$$

Problem: 1) Ort und Zeit sind asymmetrisch ↯ Relativ. Theorie

$$2) \quad mc^2\sqrt{1 - \frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{m^2c^2}} = mc^2 - \frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} - \frac{\hbar^4 \vec{\nabla}^4}{8m^3c^2} + \dots$$

ist hochgradig nichtlokal

2. Versuch: Klein-Gordon-Gl.

Direkte Quantisierung von $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$$\Rightarrow \quad -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4\right) \psi(\vec{r}, t)$$

mit d'Alambert Operator $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$
ergibt sich die Klein-Gordon-Gl.:

$$-\Box\, \psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{m^2c^2}{\hbar^2}}_{\equiv k_c^2} \psi(\vec{r}, t)$$

Da $\partial_\mu \partial^\mu$ Lorentz-Skalar folgt Invarianz unter Lorentz-Trafo

Lösung: $\psi(\vec{r}, t) \sim e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{x})} = e^{-\frac{i}{\hbar} p_\nu x^\nu}$

mit $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$

Eigenschaften: 1.) Ort und Zeit werden symmetrisch behandelt ✓
2.) Es gibt Lösungen mit positiven <u>und</u> negativen Energien
3.) Die Klein-Gordon-Gl. ist geeignet zur Beschreibung <u>spinloser</u> Teilchen und Felder.

3. Versuch: Dirac-Glg

Zur Vermeidung der 2. Zeitableitung wollen wir die Glg. linearisieren:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \underbrace{\left(c\,\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m c^2\right)}_{H}\psi(\vec{r},t)$$

$\vec{\alpha}, \beta$: hermitesch, unabh. von $\vec{r}, t$
so zu wählen, dass $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

Für stationäre Lösung: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi = H\psi$

$$\Rightarrow \quad E^2\psi = (c\,\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m c^2)^2\psi$$

$$= \left(c^2\alpha_i\alpha_j p_i p_j + c p_i(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) m c^2 + \beta^2 m^2 c^4\right)\psi$$

$$\stackrel{!}{=} (p^2c^2 + m^2c^4)\psi$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \mathrm{I}) & \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \\ \mathrm{II}) & \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \\ \mathrm{III}) & \beta^2 = 1 \end{array}\right\} \text{Clifford-Algebra}$$

Die kleinste Dimension, in der I, II, III erfüllt werden können ist 4 (Spinor-Raum)

$$\Rightarrow \psi(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r},t) \\ \psi_2(\vec{r},t) \\ \psi_3(\vec{r},t) \\ \psi_4(\vec{r},t) \end{pmatrix}$$

Glg. I wird von den Pauli-Matrizen $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$ erfüllt. Um auch II und III zu erfüllen, wählen wir

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ \sigma_i & \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Wdh.
$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$
$\sigma_y = \begin{pmatrix} & -i \\ +i & \end{pmatrix}$
$\sigma_x = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

Dies ist eine Darstellung von α_i und β (Pauli-Darstellung)
Die weiteren Darstellungen für 4er Spinoren folgen durch unitäre Trafos: $\alpha_i \to U\alpha_i U^{-1}$
$\beta \to U\beta U^{-1}$

Ruhendes Elektron: $\vec{p} = 0 \quad \vec{\nabla}\psi = 0$

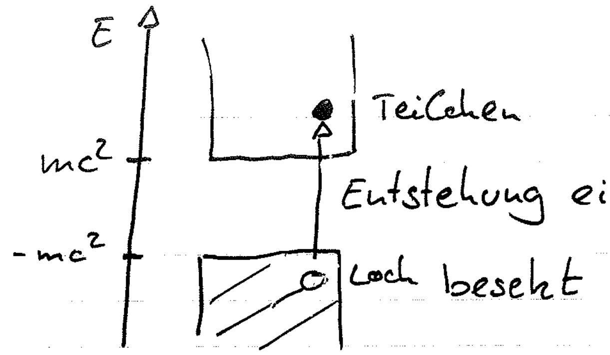
$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \beta m c^2\psi$$

$$\Rightarrow \text{Lösungen} \quad \underbrace{e^{-imc^2 t/\hbar}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ e^{-imc^2 t/\hbar}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{Lösungen mit } E>0 \text{ Spin} \uparrow \text{ bzw. } \downarrow};\ \underbrace{e^{+\frac{imc^2 t}{\hbar}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ e^{+\frac{imc^2 t}{\hbar}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{Lösungen mit negativer Energie}}$$

Dirac-Hypothese

Um das Problem der Lösungen mit negativer Energie zu lösen (es könnte soviel Energie freigesetzt werden, wenn ein Teilchen zu Zuständen mit immer größerer negativer Energie fällt)

schlug Dirac vor, dass das Vakuum ein Zustand ist, in dem alle Zustände mit negativer Energie bereits besetzt sind (Dirac-Fermi-See)
Das Pauli-Verbot verhindert eine Besetzung mit weiteren Fermionen.



Teilchenloch $\hat{=}$	Antiteilchen
z.B. Elektronenloch	Position
fehlende Ladung $-e$	Ladung $+e$
fehlende Ruheenergie $-mc^2$	Ruheenergie mc^2
fehlender Impuls $\vec{p}$	Impuls $-\vec{p}$
fehlender Spin $\lvert\uparrow\rangle$	Spin $\lvert\downarrow\rangle$

Das Teilchenloch entspricht also einem Antiteilchen

Mit dieser (Vielteilchen-) Interpretation erlaubt die Dirac-Glg., Fermionen relativistisch zu beschreiben.
Obige Darstellung der Clifford-Algebra beschreibt Spin-½ Teilchen, Verallgemeinerungen auf höhere Spinor-Räume sind möglich.

Die Dirac-Glg involviert

Raum-Zeit $(t, \vec{r}) \in \mathbb{R}^4$

<u>und</u> Spinorraum $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$!

Lorentz-invariante Form der Dirac-Glg.

Umschreiben der Dirac-Glg: EM Feld: $p^\mu \to p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu$

$$\left[\beta\left(\tfrac{1}{c}E - \tfrac{e}{c}\phi\right) - \beta\vec{\alpha}\left(\vec{p} - \tfrac{e}{c}\vec{A}\right) - mc\right]\psi = 0$$

Standard 4er Vektoren:

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad \partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

relativistische Form der Quantisierung: $p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$

legt folgende 4er Vektoren nahe:

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha}) \Rightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\underbrace{g^{\mu\nu}}_{\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}} \mathbb{1}$$

Spinor Einheits-Matrix

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - \frac{e}{\hbar c}A_\mu\right) - \frac{mc}{\hbar}\right]}_{\text{Lorentz-invariant s. Kap. Symmetrien}}\psi = 0$$

Nicht-relativistischer Grenzfall und relativistische Korrekturen:

<u>Pauli-Gleichung</u>

Betrachten: $V = -\frac{Ze^2}{r}$ Erinnerung: $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$

Für Wasserstoffatom $(Z=1)$ ist $\beta = \frac{v}{c} \approx Z\alpha \ll 1$

Im folgenden: Entwicklung bis $\mathcal{O}((Z\alpha))$

Pauli-Zerlegung des Spinors:

$$\psi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \quad \phi_1 = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

Dirac-Glg. $\Rightarrow$

$$\text{I} \quad \left(E - mc^2 + \frac{Ze^2}{r}\right)\phi_1 = c\vec{\sigma}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\phi_2$$

$$\text{II} \quad \left(E + mc^2 + \frac{Ze^2}{r}\right)\phi_2 = c\vec{\sigma}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\phi_1$$

gesucht Lösungen für gebundene Teilchen mit Energie nahe des Kontinuums, d.h. $|E - mc^2| \ll mc^2$

$$\underline{II} \Rightarrow \quad \phi_2 \approx \frac{1}{2mc^2} c\vec{\sigma}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\phi_1 \quad \ll \phi_1$$ wie für $p=0$ Lösungen

d.h. wir haben Zerlegung

$$E\,\phi_1 \approx mc^2\phi_1 \qquad \text{Teilchen}$$

$$E\,\phi_2 \approx -mc^2\phi_2 \qquad \text{Loch}$$

I und obige Abschätzung von ϕ_2 aus $\underline{II}$ liefern:

$$\underbrace{\mathcal{E}}_{E-mc^2}\phi_1 = \left[\frac{1}{2m}\vec{\sigma}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\vec{\sigma}\left(p-\frac{e}{c}\vec{A}\right) - \frac{ze^2}{r}\right]\phi_1$$

$$= \left[\frac{\vec{\sigma}\vec{p}\,\vec{\sigma}\vec{p}}{2m} - \frac{e}{2mc}\left[(\vec{\sigma}\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{A}) + (\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{p})\right] + \frac{e^2}{2mc^2}(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{A})\right]\phi_1$$

Für zwei Vektoren gilt auf Grund der Algebra der Pauli-Matrizen

$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b}\,\mathbb{1} + i\,\vec{\sigma}(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{p})}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

$$\frac{e^2}{2mc^2}(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{A}) = \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2$$

Für den 3. Term schreiben wir $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_j r_k$

d.h. $$(\vec{\sigma}\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{A}) + (\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{p}) = \underbrace{\vec{p}\vec{A} + \vec{A}\vec{p}}_{I} + \underbrace{i\vec{\sigma}(\vec{p}\times\vec{A} + \vec{A}\times\vec{p})}_{II}$$

$$I = \frac{\hbar}{i}(\vec{\nabla}\vec{A} + \vec{A}\vec{\nabla}) = \frac{\hbar}{2i}\left(\vec{\nabla}(\vec{B}\times\vec{r}) + (\vec{B}\times\vec{r})\vec{\nabla}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial r_i}\varepsilon_{ijk}B_j r_k + \varepsilon_{ijk}B_j r_k\frac{\partial}{\partial r_i}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2i}\left(\varepsilon_{ijk}\underbrace{\frac{\partial B_j}{\partial r_i}}_{0} r_k + \underbrace{\varepsilon_{ijk}B_j\underbrace{\frac{\partial r_k}{\partial r_i}}_{\delta_{ik}}}_{0} + 2\varepsilon_{ijk}B_j r_k\frac{\partial}{\partial r_i}\right)$$

$$= +\vec{L}\vec{B}$$

$$\mathrm{II} = \frac{\hbar}{2i}\, i\sigma_i\, \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial r_j}\varepsilon_{kem} B_e r_m + \varepsilon_{jem} B_e r_m \frac{\partial}{\partial r_k}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\sigma_i\, \varepsilon_{ijk}\Big(\varepsilon_{kem}\underbrace{\frac{\partial B_e}{\partial r_j}}_{0} r_m + \varepsilon_{kem} B_e \underbrace{\frac{\partial r_m}{\partial r_j}}_{\delta_{mj}} + \varepsilon_{kem} B_e r_m \frac{\partial}{\partial r_j}$$

$$+ \varepsilon_{jem} B_e r_m \frac{\partial}{\partial r_k}\Big)$$

$$= \hbar\,\sigma_i B_i = 2\cdot \vec{S}\vec{B}$$

| Beachte 3. u. 4. Term heben sich auf und $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iem} = \delta_{je}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{ke}$

Zusammenfassen aller Terme: Pauli-Glg.

$$\left[\frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{2mc}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\vec{B} + \frac{e^2}{8mc^2}\left(\vec{B}\times\vec{r}\right)^2\right]\phi_1(\vec{r}) = \varepsilon\,\phi_1(\vec{r})$$

$g_e = 2$, gyromagnetischer Faktor des Elektrons

Quantenfeldtheoretische Korrekturen

$\Rightarrow g_e = 2{,}00231930043768\ (86)$

Terme in $\mathcal{O}((Z\alpha)^2)$ liefern Relativistische Kinetische Energie, Darwin-Term und Spin-Bahn-Kopplung