8) Pfadintegrale

Feynmansche (1950) Pfadintegrale:

- einfache, elegante Darstellung der Quantenmechanik
- häufig verwendet
- Einblick Quantenmechanik $\leftrightarrow$ klassische Mechanik

Ziel

Pfadintegral zur Berechnung des Propagators

$$U(\vec{r}_f, t_f, \vec{r}_i, t_i) \stackrel{Kap.1}{=} \langle \vec{r}_f | \; e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_f - t_i)} \; | \vec{r}_i \rangle \tag{1}$$

läßt sich schreiben als Summe der klassischen Wirkung über alle Pfade $\vec{r}(t)$ von $\vec{r}_i$ nach $\vec{r}_f$

$$U(\vec{r}_f, t_f, \vec{r}_i, t_i) = \sum_{\vec{r}(t) | \vec{r}(t_i) = \vec{r}_i, \vec{r}(t_f) = \vec{r}_f} e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{r}(t)]} \tag{2}$$

klassischen Mechanik

$$S[\vec{r}(t)] = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \; L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \; ; \quad L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = T(\dot{\vec{r}}(t)) - V(\vec{r}(t))$$

Literatur

- A. M. Zagoskin, *Quantum theory of many-body systems* (Springer).
- G. Röpsdorf, *Path integral to quantum physics* (Springer).
- www.quantumfieldtheory.info/Path_Integrals_in_Quantum_Theories.htm

8.2) Übergang zur klassischen Mechanik

Jeder Pfad in

$$U(\vec{r}_f, t_f, \vec{r}_i, t_i) = \sum_{\vec{r}(t)|\vec{r}(t_i)=\vec{r}_i, \vec{r}(t_f)=\vec{r}_f} e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{r}(t)]}$$

hat gleiches Gewicht.
Aber wegen Vorfaktor $\frac{i}{\hbar}$ interferieren sich viele Beiträge weg.
Dies trifft insbesondere für $\hbar \to 0$ zu (klassischer Grenzfall)
Hier trägen nur noch Pfade bei um

$$\frac{\delta S[\vec{r}(t)]}{\delta \vec{r}(t)} = 0 \qquad (3)$$

Dies sind aber nur noch die Pfade um den klassischen Pfad, da $\frac{\delta S[\vec{r}(t)]}{\delta \vec{r}(t)} = 0$ auf Lagrange-Glg. der klassischen Mechanik führt.
Allgemein: Konstruktive Überlagerung von Pfaden mit

$$\left| \frac{S}{\hbar} - \frac{S_{\text{klass}}}{\hbar} \right| \lesssim \pi \qquad (4)$$

Klassischer Pfad für freies Teilchen ($V = 0$): $\vec{r}_{\text{klass}}(t) = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} t$
Klassische Wirkung:

$$S[\vec{r}_{\text{klass}}(t)] = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \underbrace{L(\vec{r}_{\text{klass}}, \dot{\vec{r}}_{\text{klass}}, t)}_{\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_{\text{klass}}} = \frac{m}{2} \frac{(\vec{r}_f - \vec{r}_i)^2}{(t_f - t_i)^2} (t_f - t_i) \tag{5}$$

8.3) Tatsächliche Berechnung des Pfadintegrals:
Diskretisierung des Zeitintervalls $[t_i \cdots t_f]$ in N infinitesimale Zeitschritte $\Delta t = (t_f - t_i)/N$.

$$U(\vec{r}_f, t_f, \vec{r}_i, t_i) = \lim_{N \to \infty} \int \mathrm{d}^3 r_{N-1} \int \mathrm{d}^3 r_{N-2} \cdots \int \mathrm{d}^3 r_2 \tag{6}$$

$$\times \left(\frac{m}{2\pi\hbar i \Delta t} \right)^{\frac{(N-1)d}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=2}^{N} \Delta t \left(\frac{m(\vec{r}_n - \vec{r}_{n-1})^2}{2\Delta t^2} - V(\vec{r}_n) \right)} \tag{7}$$

da für kleines Δt der kinetische Energieterm so groß (stark fluktuierend) ist, dass jeweils nur klassischer Pfad beiträgt.

Normierungsfaktor aus Forderung

$$U(\vec{r}_f, t+\Delta t, \vec{r}_i, t_i) \xrightarrow{\Delta t \to 0} \delta(\vec{r}_f - \vec{r}_i) \tag{8}$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha(\vec{r}_f-\vec{r}_i)^2} \tag{9}$$

Wdh. Gaussintegral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-\alpha x^2 + gx} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{g^2}{4\alpha}} \tag{10}$$

Hier $\alpha = \frac{-im}{2\hbar\Delta t}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; x^2 e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{2\alpha} \tag{11}$$

Beweis Äquivalenz Feynman-Pfadintegral↔ S.-Glg. s.