zu Kapitel 8: Pfadintegrale

8.1) Motivation s. Kap 1 — Zeitentwicklungsoperator $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$

$$|\psi(t_f)\rangle = \underbrace{U(t_f - t_i)}_{\equiv U(t_f, t_i)} |\psi(t_i)\rangle \qquad t_f > t_i$$

oder in Ortsdarstellung

$$U(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) \equiv \langle \vec{r}_f | U(t_f, t_i) | \vec{r}_i \rangle$$

Nun gilt: $U(t_f, t_i) = U(t_f, t)\, U(t, t_i) \qquad t_f > t > t_i$

oder in Ortsdarstellung: $\langle \vec{r}_f | \qquad \int d^3r\, |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| \qquad |\vec{r}_i\rangle$

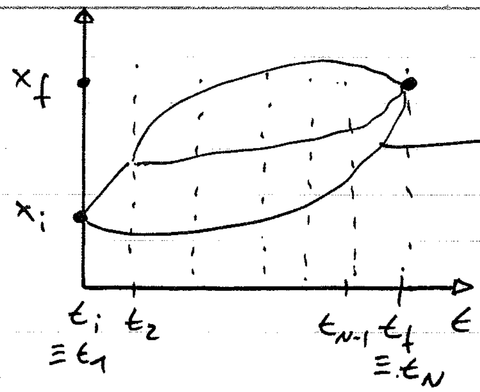
$$U(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = \int d^3r \; U(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}, t)\; U(\vec{r}, t; \vec{r}_i, t_i)$$

Wiederholte Anwendung:

$$U(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = \int d^3r_{N-1} \cdots \int d^3r_2 \; U(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_{N-1}, t_{N-1}) \times U(\vec{r}_{N-1}, t_{N-1}; \vec{r}_{N-2}, t_{N-2}) \cdots \times U(\vec{r}_2, t_2; \vec{r}_i, t_i)$$

$t_f = t_N$
$t_i = t_1$

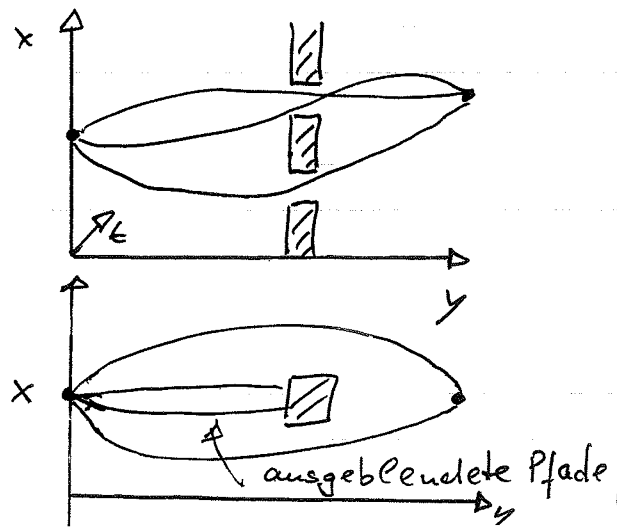
Skizze Pfadintegrale in einer Dimension $\vec{r} \to x$



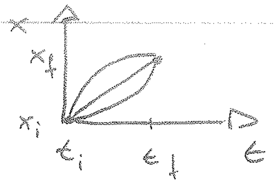
Diskretisierung für Berechnung

Zerschneiden der QM Trajektorien in kleine klassische Abschnitte

natürliche Erklärung für Doppelspaltexp. / Beugungsexp.

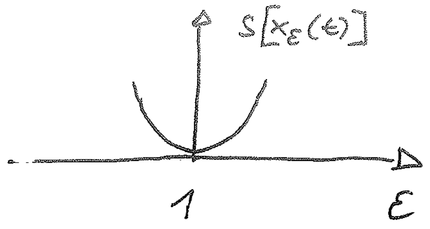


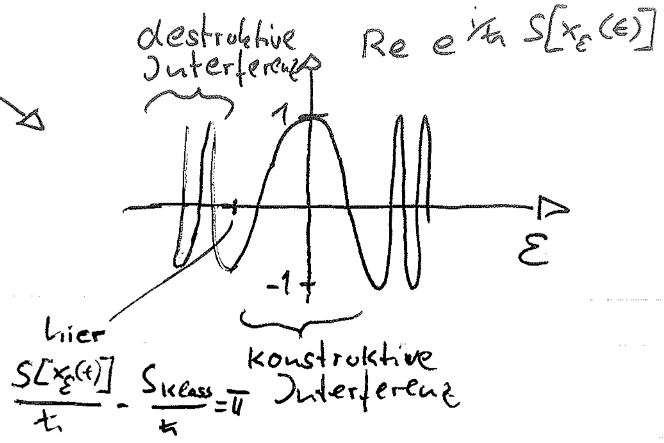
Skizze zum klassischen Grenzfall 8.2)



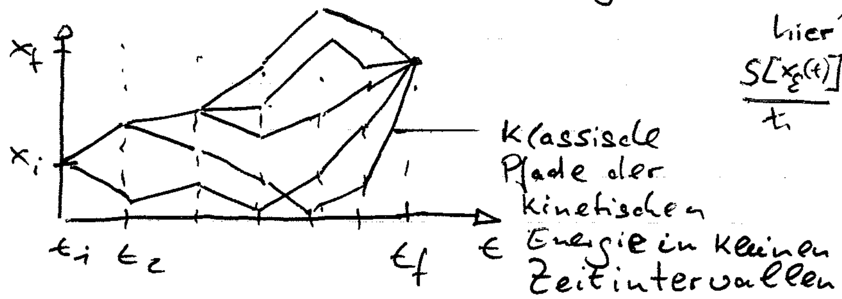
Pfade $x_\varepsilon(t) = x_i + (x_f - x_i)\left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i}\right)^\varepsilon$ s. Übung

$x_{\varepsilon=1}(t) = x_{klass}(t) = x_i + \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}\, t - t_i$





Skizze zur tatsächlichen Berechnung 8.3)



8.4) Äquivalenz Feynman-Pfadintegral $\Leftrightarrow$ S.-Glg.

S.-Glg: Differentialform

Pfadintegral: Integralform

Betrachten Pfadintegral für infinitesimalen Zeitschritt Δt

$$\Rightarrow \psi(\vec r, t+\Delta t) = \int d^3r'\, U(\vec r, t+\Delta t; \vec r', t)\, \psi(\vec r', t)$$

$$= \underbrace{A}_{\left(\frac{m}{2\pi\hbar i \Delta t}\right)^{d/2}} \int d^3r'\, e^{i/\hbar\, \Delta t \left(m \frac{(\vec r - \vec r')^2}{2\Delta t^2} - V(\vec r)\right)}\, \psi(\vec r', t)$$

$$\overset{\Delta \vec r = \vec r' - \vec r}{=} A \int d^3\Delta r\; e^{\frac{i}{\hbar}\Delta t\, m \frac{(\Delta \vec r)^2}{2\Delta t^2}} \left(1 - i/\hbar\, \Delta t\, V(\vec r)\right)$$

$$\times \left\{ \psi(\vec r, t) + \Delta \vec r \frac{\partial}{\partial \vec r}\psi(\vec r, t) + \frac{1}{2}(\Delta \vec r)^2 \frac{\partial^2}{\partial \vec r^2}\psi(\vec r, t) \right\}$$

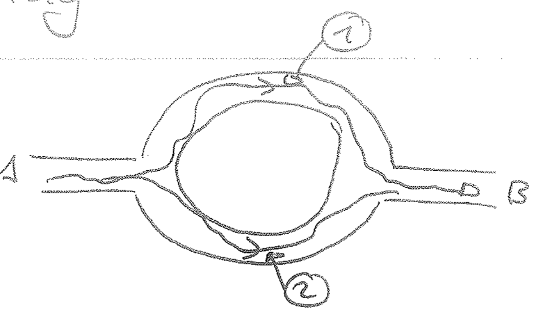
$$+ \mathcal{O}(\Delta \vec r^3) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$= \left[1 - i/\hbar\, \Delta t\, V(\vec r)\right] \psi(\vec r, t) + \frac{1}{2} \frac{i\hbar}{m} \Delta t \frac{\partial^2}{\partial \vec r^2} \psi(\vec r, t)$$

$1 \cdot i\hbar/\Delta t$

$$\Leftrightarrow \text{S.Glg} \quad i\hbar\left[\psi(\vec r, t+\Delta t) - \psi(\vec r, t)\right]/\Delta t = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec r, t) \quad (2)$$

8.5) Anwendung: Aharonov-Bohm-Ring



Leitfähigkeit $\longrightarrow |\langle B t_B | A t_A \rangle|^2$

$$\langle B t_B | A t_A \rangle = \sum_{\substack{\text{Pfade}\\ x(t)\\ x(t_A)=A\\ x(t_B)=B}} e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B} dt\, L(\vec r, \vec r\,', t)}$$

$$L(\vec r, \vec r\,', t) = P\,\dot{\vec r} - H(P, \vec r) \qquad H(\vec P, \vec r) = \frac{\left(\vec P - \frac{e}{c}\vec A\right)^2}{2m^*} + V(\vec r)$$

$$= \frac{e}{c}\vec A \cdot \dot{\vec r} + \underbrace{L_0(\vec r, \dot{\vec r}, t)}_{\vec A\text{-unabhängig}} \qquad \vec P = m^* \dot{\vec r} + \frac{e}{c}\vec A$$

$$\Rightarrow \langle B, t_B | A t_A \rangle = \sum_{\text{Pfade}} e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{t_A}^{t_B} dt\, \vec A \cdot \dot{\vec r}}\; e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B} dt\, L_0(\vec r, \dot{\vec r}, t)}$$

Phasendifferenz zwischen Pfad 1 und Pfad 2

$$e^{\frac{ie}{\hbar c}\left(\int_2 \vec A\, d\vec r - \int_1 \vec A\, d\vec r\right)}\, e^{\frac{i}{\hbar}\left(\int_2 dt\, L_0(\vec r, \dot{\vec r}) - \int_2 dt\, L_0(\vec r, \dot{\vec r})\right)} = e^{\frac{ie}{\hbar c}\oint d\vec r\, \vec A} \cdot e^{i\chi_{12}}$$

$$\oint d\vec r\, \vec A = \int \underbrace{d\vec F}_{\text{Fläche}}\, \vec\nabla \times \vec A = \int d\vec F \cdot \vec B \equiv \phi$$

magnetischer Fluß: Fläche × Feld

Alle Pfade sind sehr ähnlich zu 1 oder 2

$\hbar = h/2\pi$

$$\Rightarrow \langle B, t_B, A t_B \rangle = \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B} dt\, L(\vec r_1, \dot{\vec r}_1)}}_{\text{Pfad } 1} \left(1 + e^{i2\pi \frac{\phi}{2\phi_0}}\, e^{i\chi_{12}}\right)$$

$\phi_0 = \frac{hc}{2e}$ magnetisches Flußquantum

Oszillationen der Leitfähigkeit bei wachsendem ϕ mit Periode $2\phi_0$.