13) "Symmetrisierende / Antisymmetrisierende Projektoren"

a)

Betrachte einen N-Teilchen Zustand $|\psi_N\rangle = |1\rangle_1 |2\rangle_2 \cdots |N\rangle_N$

Die direkte Anwendung von S definiert den symmetrisierten Zustand

$$|s\rangle = S|\psi\rangle_N = \frac{1}{N!}\Big(\underbrace{|1\rangle_1|2\rangle_2 \cdots |N\rangle_N + |2\rangle_1|1\rangle_2 \cdots |N\rangle_N + \cdots}_{N!\ \text{Permutationen}}\Big)$$

Wir können nur den Effekt des S^2 berechnen:

$$S^2|\psi_N\rangle = S\left(S|\psi_N\rangle\right) = S|s\rangle = \frac{1}{N!}\left(S\left(|1\rangle_1|2\rangle_2 \cdots |N\rangle_N\right) + S\left(|2\rangle_1|1\rangle_2 \cdots |N\rangle_N\right) + \cdots\right)$$

Der Effekt des S Operators (der alle möglichen Permutationen aufbaut) ist gleich für jeden Beitrag in Klammer (das finale Ergebnis ist immer $|s\rangle$) deswegen

$$S^2|\psi_N\rangle = \frac{1}{N!}\Big(\underbrace{|s\rangle + |s\rangle + \cdots |s\rangle}_{N!\ \text{Beiträge}}\Big) = |s\rangle = S|\psi\rangle_N$$

$$\Rightarrow \boxed{S^2 = S}$$

Eine ähnlicher Beweis gilt für den Antisymmetrisierenden-Operator

$$|a\rangle = A|\psi\rangle_N = \frac{1}{N!}\Big(\underbrace{|1\rangle_1|2\rangle_2 \cdots |N\rangle_N - |2\rangle_1|1\rangle_2 \cdots |N\rangle_N + \cdots}_{N!\ \text{Permutationen}}\Big)$$

" Antisymmetrisierter Zustand

$$A^2|\psi_N\rangle = A\left(A|\psi_N\rangle\right) = \frac{1}{N!}\left(A|1\rangle_1|2\rangle_2 \cdots |N\rangle_N - A|2\rangle_1|1\rangle_2 \cdots |N\rangle_N + \cdots\right)$$

Es ist klar, dass die Anwendung von A auf den ersten Beitrag wieder $|a\rangle$ gibt.

Das gleiche passiert aber auch für allen anderen Beiträge in der Summe, z.B. dem zweiten

$$-A\,|2\rangle_1|1\rangle_2|\cdots|N\rangle_N = -\frac{1}{N!}\left(|2\rangle_1|1\rangle_2\cdots|N\rangle - |1\rangle_1|2\rangle\cdots|N\rangle + \cdots\right)$$

$$-(-|a\rangle) = |a\rangle$$

weil die Beiträge mit einem $-$ Vorzeichen aus ungeraden Permutationen kommen und eine zweite Anwendung des A Operators das Vorzeichen wieder nach $+$ wechselt.

$$A^2|\psi_N\rangle = \frac{1}{N!}\Big(\underbrace{|a\rangle + |a\rangle + \cdots}_{N!\text{ mal}}\Big) = |a\rangle = A|\psi_N\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{A^2 = A}$$

b) $$SA = \frac{1}{(N!)^2}\sum_n\sum_m \underbrace{P_n P_m}_{P_{m'}}\,\varepsilon_m \qquad \varepsilon_m = \varepsilon_{m'}\cdot\varepsilon_n$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_n \varepsilon_n \underbrace{\frac{1}{N!}\sum_{m'} P_{m'}\,\varepsilon_{m'}}_{A} = A\,\frac{1}{N!}\underbrace{\sum_n \varepsilon_n}_{0}$$

0, da es gleich viele gerade und ungerade Permutationen gibt.

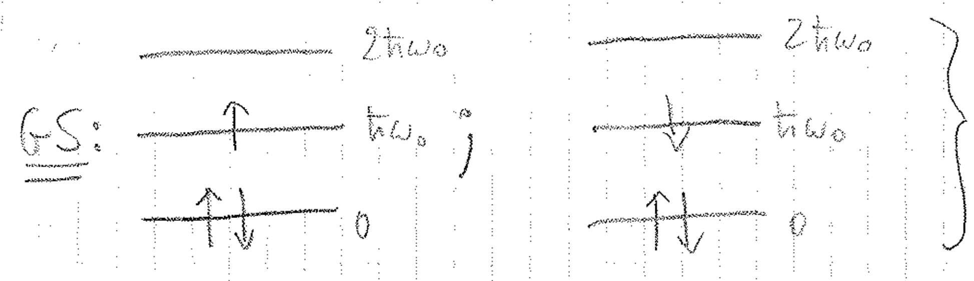
14)

a) • Da der Hamilton-Operator ein 1-Teilchen-Operator ist ($\equiv$ keine WW zwischen den Teilchen), läßt sich die entsprechende Eigenbasis als Produktansatz schreiben

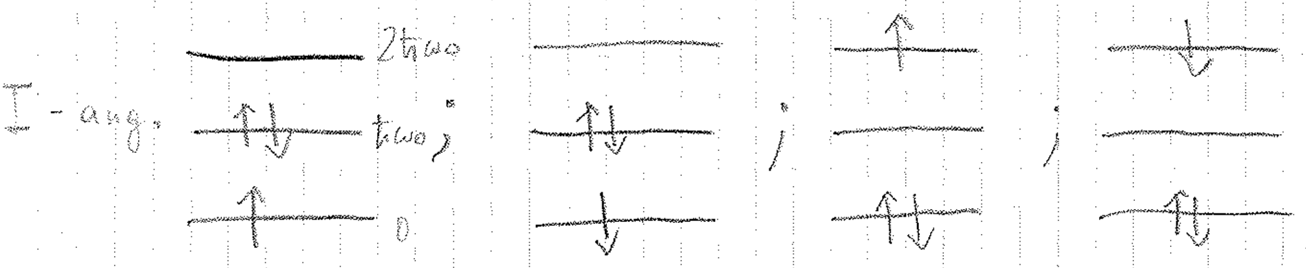
$$B^{\text{Eigen}}_{(2)} = \left\{ \sqrt{N!}\,\hat{A} \prod_{i,\sigma} |\varphi_{ki}, \sigma\rangle_i \right\} \quad \text{wobei} \quad h_0 |\varphi_n, \sigma\rangle = \epsilon_n |\varphi_n, \sigma\rangle$$

$$EW = \epsilon_{a_1} + \epsilon_{a_2} + \epsilon_{a_3}$$

• Eigenenergie & Entartung für E_{GS}, I, II angeregten Zustände



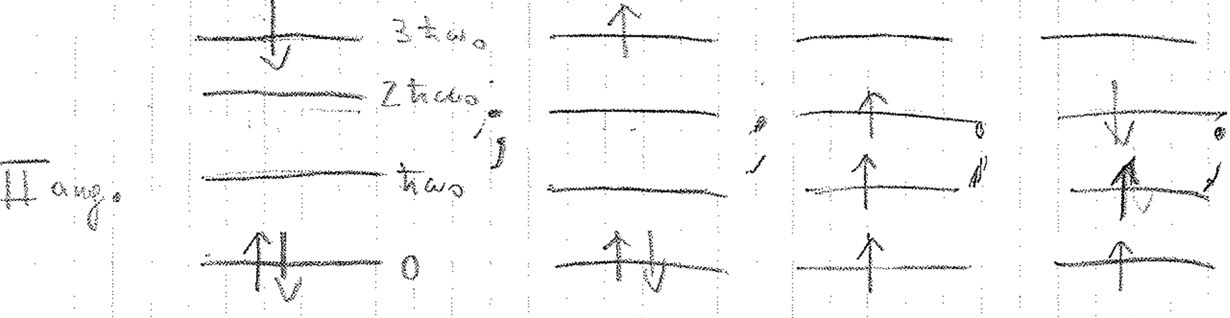
$E_{GS} = \hbar\omega_0$; 2x Entartet



$E_I = 2\hbar\omega_0$

4x entartet

$E_{II} = 3\hbar\omega_0$



10x entartet

• Eigenvektoren:

mit $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = 1$

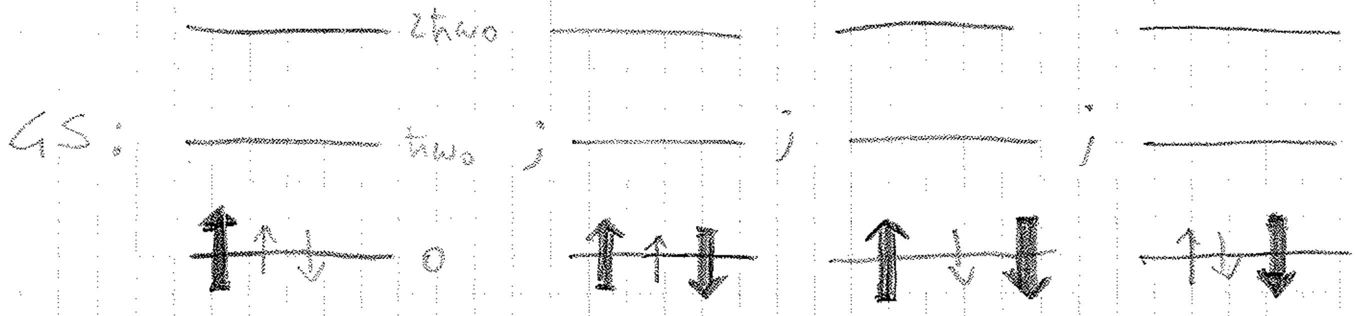
$$|\psi_{GS}\rangle = \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} |0,\uparrow\rangle_1 & |0,\uparrow\rangle_2 & |0,\uparrow\rangle_3 \\ |0,\downarrow\rangle_1 & |0,\downarrow\rangle_2 & |0,\downarrow\rangle_3 \\ |1,\uparrow\rangle_1 & |1,\uparrow\rangle_2 & |1,\uparrow\rangle_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} |0,\uparrow\rangle_1 & |0,\uparrow\rangle_2 & |0,\uparrow\rangle_3 \\ |0,\downarrow\rangle_1 & |0,\downarrow\rangle_2 & |0,\downarrow\rangle_3 \\ |1,\downarrow\rangle_1 & |1,\downarrow\rangle_2 & |1,\downarrow\rangle_3 \end{vmatrix}$$

$$|\psi_I\rangle = \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} |0\uparrow\rangle_1 & |0\uparrow\rangle_2 & |0\uparrow\rangle_3 \\ |1\uparrow\rangle_1 & |1\uparrow\rangle_2 & |1\uparrow\rangle_3 \\ |1\downarrow\rangle_1 & |1\downarrow\rangle_2 & |1\downarrow\rangle_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} |0\downarrow\rangle & |0\downarrow\rangle & |0\downarrow\rangle \\ |1\uparrow\rangle & |1\uparrow\rangle & |1\uparrow\rangle \\ |1\downarrow\rangle & |1\downarrow\rangle & |1\downarrow\rangle \end{vmatrix}$$

$$+ \alpha_3 \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} |0\uparrow\rangle & |0\uparrow\rangle & |0\uparrow\rangle \\ |0\downarrow\rangle & |0\downarrow\rangle & |0\downarrow\rangle \\ |2\uparrow\rangle & |2\uparrow\rangle & |2\uparrow\rangle \end{vmatrix} + \alpha_4 \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} |0\uparrow\rangle & |0\uparrow\rangle & |0\uparrow\rangle \\ |0\downarrow\rangle & |0\downarrow\rangle & |0\downarrow\rangle \\ |2\downarrow\rangle & |2\downarrow\rangle & |2\downarrow\rangle \end{vmatrix}$$

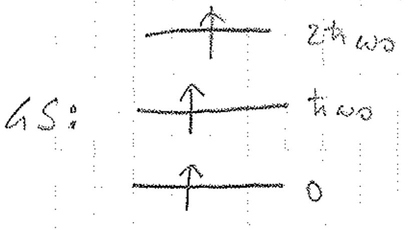
mit $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2} = 1$

b) Wenn $S = 3/2$ ist ; $S_z = \begin{cases} \frac{3}{2} & \Uparrow \\ \frac{1}{2} & \uparrow \\ -\frac{1}{2} & \downarrow \\ -\frac{3}{2} & \Downarrow \end{cases}$



d.h. $E_{GS} = 0$, $4\times$ entartet !

c) Da $J \gg \hbar\omega_0 B$ ist, ist die Energie minimiert wenn alle Spins die gleiche Richtung (// B) haben (Ferromagnetische Kopplung, $J > 0$)



Nicht Entartet !

$E_{GS} = ?$

$$H|\psi_{GS}\rangle = \left(-J\left[\vec{S}(1)\cdot\vec{S}(2) + \vec{S}(2)\cdot\vec{S}(3) + \vec{S}(3)\cdot\vec{S}(1)\right] - B\sum_{i=1}^{3} S_z^i + H^{1\text{Teilchen}}\right)|\psi_{GS}\rangle$$

$$H|\psi_{GS}\rangle = \left(-J\left[S_z(1)S_z(2) + S_z(2)S_z(3) + S_z(3)S_z(1)\right] - B\sum_i S_z^i + H^{1\text{-Teilchen}}\right)|\psi_{GS}\rangle$$

weil alle Beiträge in der Form $S^+(1)\,S^-(2)$ immer 0 liefern, wenn sie auf $|\psi_{GS}\rangle$ wirken.

$$H|\psi_{GS}\rangle = -3J\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 - 3B\frac{\hbar}{2} + 3\hbar\omega_0 = -3\hbar\left[\frac{J\hbar}{4} + \frac{B}{2} - \omega_0\right]$$

$|\psi_{GS}\rangle$ ist NOCH schreibar als Slater Determinante

$$|\psi_{GS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{vmatrix} |0\uparrow\rangle & |0\uparrow\rangle & |0\uparrow\rangle \\ |1\uparrow\rangle & |1\uparrow\rangle & |1\uparrow\rangle \\ |2\uparrow\rangle & |2\uparrow\rangle & |2\uparrow\rangle \end{vmatrix}$$

aber das ist natürlich eine Ausnahme

Da im Hamilton-Operator 2-Teilchen (WW) Beiträge auftreten, kann man NICHT erwarten, dass die volle Eigenbasis als Produktansatz schreibar ist.

z.B. ist das nicht mehr möglich für angeregte Zustände mit gemischten $\uparrow, \downarrow$ Spins, wo die Beiträge S^+S^- nicht 0 sind