(K1) Übergangswahrscheinlichkeit $P_{a\to e} \propto |\langle a|V|e\rangle|^2$

$$P_{(1,0,0)\to(3,2,0)} \propto \left| \int d^3r \; \psi^*_{100}(\vec{r}) \cdot \alpha r \; \psi_{320}(\vec{r}) \right|$$

$$= \left| \alpha \int_0^\infty dr \; r^3 \, R^*_{100}(r) \, R_{320}(r) \right|^2 \times$$

$$\times \underbrace{\left| \int_{[4\pi]} d\Omega \; Y^*_{00}(\theta,\varphi) \, Y_{20}(\theta,\varphi) \right|^2}_{0\text{, wegen Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen}} = 0$$

(K2) a) $[H_S, T] = 0$, Begründung: Der Anteil auf den T wirkt ist die Zeitableitung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial(-t)} = (i)^* \hbar \frac{\partial}{\partial(-t)}$$

$[H_D, T] \neq 0 \Rightarrow$ Man benötigt eine zusätzliche Transformation $i\gamma_1\gamma_3$ der Spinorkomponenten

b) $[H_S, L] \neq 0$ (Schrödingergleichung ist nicht lorentzinvariant)

$[H_D, L] \neq 0$ (Transformation ~~der~~ im Spinraum fehlt)

c) $[H_S, L] = 0$ (bei $L_{i0} = 0 \Rightarrow$ Schrödingergleichung ist $SO(3)$-invariant)

$[H_D, L] \neq 0$ (wie in b))

K3 "Ritz sches Variationsverfahren"

a) Versuchswellenfunktion $\phi_0(x) = \begin{cases} (a^2-x^2) & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Erster Schritt : Normierung

$$N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_0(x)|^2 dx = 1 \quad \Rightarrow \quad 2N^2 \int_0^a (a^2-x^2)^2 dx = 2N^2 \left[a^5 - \frac{2a^5}{3} + \frac{a^5}{5} \right]$$

$$\Rightarrow 1 = 2N a^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{16}{15} a^5 N^2 \quad \Rightarrow \quad N^2 = \frac{15}{16a^5} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\sqrt{15}}{4a^2\sqrt{a}}$$

Zweiter Schritt :

Mit der normierten Welle Funktion $\phi_0(x)$, können wir den a-abhängigen Erwartungwert der Energie rechnen :

$$E_0(a) = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \phi_0^*(x) \; H \; \phi_0(x) = 2N^2 \int_0^a dx \; (a^2-x^2) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right] (a^2-x^2)$$

$$= 2N^2 \int_0^a dx \; (a^2-x^2) \left[\frac{\hbar^2}{m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 (a^2-x^2) \right] =$$

$$= 2N^2 \left[\frac{\hbar^2}{m} \frac{2}{3} a^3 + \frac{4}{105} m\omega^2 a^7 \right] = \frac{5}{4a^5} \left[\frac{\hbar^2}{m} a^3 + \frac{2}{35} m\omega^2 a^7 \right]$$

$$= \frac{5}{4} \left[\frac{\hbar^2}{ma^2} + \frac{2}{35} m\omega^2 a^2 \right] = \frac{5\hbar^2}{4ma^2} + \frac{1}{14} m\omega^2 a^2$$

Dritter Schritt : Minimierung

$$\frac{\partial E_0(a)}{\partial a} = -\frac{5}{2}\frac{\hbar^2}{m a^3} + \frac{1}{7} m\omega^2 a = 0 \qquad (a > 0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\hbar^2}{m a^3} = \frac{2}{35} m\omega^2 a \quad \Rightarrow \quad a^4 = \frac{35}{2}\frac{\hbar^2}{m^2\omega^2}$$

$$a^* = \sqrt[4]{\frac{35}{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Bemerke dass $\frac{\partial E_0(a)}{\partial a} < 0$ für $a < a^*$; $\frac{\partial E_0(a)}{\partial a} > 0$ für $a > a^*$

Deswegen $E_0(a^*) = \min_a E_0(a)$

$$E_0(a^*) = \frac{5}{4}\frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2}{35}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right) + \frac{1}{14} m\omega^2 \sqrt{\frac{35}{2}}\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{14}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{14}}\right) = \sqrt{\frac{5}{14}}\hbar\omega \simeq 0.6\,\hbar\omega > \frac{1}{2}\hbar\omega$$

b) Die Versuchswellenfunktion für den ersten angeregten Zustand muss ortogonal zu $\phi_0(x)$ (Versuchsfunktion für den Grundzustand) sein.

Das ist genau der Fall hier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1^*(x)\,\phi_0(x)\,dx = 0 \qquad \begin{array}{ll} \phi_1(x) = -\phi_1(-x) & \text{ungerade} \\ \phi_0(x) = \phi_0(-x) & \text{gerade} \end{array}$$

Jetzt können wir alle Schritte wie vorher wiederholen ...

Normierung

- $$2N^2\int_0^a x^2(a^2-x^2)^2\,dx = 2N^2\frac{8a^7}{105} = \frac{16a^7}{105}N^2 = 1 \qquad N^2 = \frac{105}{16a^7}$$

- $$E_1(a) = N^2\int_{-a}^{a} dx\; x(a^2-x^2)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]x(a^2-x^2)$$

$$= N^2\int_{-a}^{a} dx\; x(a^2-x^2)\left[\frac{\hbar^2}{2m}\times \cancel{6}\overset{3}{}x + \frac{1}{2}m\omega^2x^3(a^2-x^2)\right]$$

$$= N^2\int_{-a}^{a} dx\left[\frac{3\hbar^2}{m}x^2(a^2-x^2) + \frac{1}{2}m\omega^2x^4(a^2-x^2)^2\right]$$

$$= N^2\left[\frac{4}{5}\frac{a^5\hbar^2}{m} + \frac{8}{315}a^9m\omega^2\right]$$

$$= \frac{21\hbar^2}{4a^2m} + \frac{1}{6}a^2m\omega^2$$

- $$\frac{\partial E_1(a)}{\partial a} = -\frac{21\hbar^2}{2a^3m} + \frac{1}{3}am\omega^2 = 0 \Rightarrow \qquad a^{*4} = \frac{63}{2}\frac{\hbar^2}{m^2\omega^2}$$

$$a^* = \sqrt[4]{\frac{63}{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$ und auch in diesem Fall

$$\frac{\partial E_1(a)}{\partial a} = \begin{cases} < 0 & \forall\, a < a^* \\ > 0 & \forall\, a > a^* \end{cases}$$

$E_1(a^*)$ ist ein Minimum!

Endlich $$E_1(a^*) = +\frac{21}{4}\frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{2}{63}}\frac{m\omega}{\hbar} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{63}{2}}\frac{\hbar}{m\omega}m\omega^2 =$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right) = \hbar\omega\sqrt{\frac{7}{2}} \approx 1.87\,\hbar\omega > \frac{3}{2}\hbar\omega$$

K4)

a) Die Streuamplitude in der Bornschen Nährung ist definiert wie

$$f(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \underbrace{\int d^3r\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})}_{V(\vec{q})} \quad , \text{wobei } \vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$$

In Elastischer Streuung hat man auch $k = k'$ $\quad q = 2k\sin\theta/2$

von $(\vec{k}-\vec{k}')^2 = \vec{q}^{\,2}$

Im unserem Fall $V(\vec{r}) = V_0\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$

$$f(\theta,\phi) = -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\, e^{i\vec{q}\vec{r}}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_0}$$

Der differentielle Streuquerschnitt ist nun berechbar wie

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\phi)|^2 = \frac{m^2V_0^2}{4\pi^2\hbar^4} \qquad \text{radialsymmetrisch.}$$

und deswegen ist die totale Streuquerschnitt

$$\sigma_{TOT} = \int \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \frac{d\sigma}{d\Omega} = \cancel{4\pi}\,\frac{m^2V_0^2}{\cancel{4}\pi^{\cancel{2}}\hbar^4} = \frac{m^2V_0^2}{\pi\hbar^4}$$

b) Der totale Streuquerschnitt als Funkton der Phasenverschiebung läßt sich schreiben wie

$$\sigma_{TOT} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

In unserem Fall $l = 0, 1$

$$\sigma_{TOT} = \frac{4\pi}{k^2} \left(\sin^2 \delta_0 + 3 \sin^2 \delta_1 \right)$$

Die einzelnen l-Kanäle tragen unabhängig voneinander bei - Jeder Beitrag wird für sich maximiert

Das Maximum ist bei $\sin^2 \delta_l = 1$ und wird erreicht für

$$\delta_0, \delta_1 = (2n+1) \frac{\pi}{2} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Es wird

$$\sigma_{TOT} = \frac{4\pi}{k^2} \times 4 = \frac{16\pi}{k^2}$$

K5) "Zwei und drei identische Teilchen"

a) Zwei Elektronen

Spin = 1/2 $\Rightarrow$ Im Spinraum $|S_z = \pm 1/2\rangle = |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$

Mögliche Eigenwerte : (Einzelteilchen Eigenwerte $e_0 = \hbar\omega$, $e_1 = \hbar\omega$, $e_2 = 2\hbar\omega$

	Teilchen 1	Teilchen 2	
Grundzustand	0	0	$\Rightarrow E_0 = 0$
I Anregung	$\hbar\omega$	0	$\Rightarrow E_1 = \hbar\omega$
	0	$\hbar\omega$	
II Anregung	$\hbar\omega$	$\hbar\omega$	$\Rightarrow E_2 = 2\hbar\omega$
	$2\hbar\omega$	0	
	0	$2\hbar\omega$	
III Anregung	$\hbar\omega$	$2\hbar\omega$	$\Rightarrow E_3 = 3\hbar\omega$
	$2\hbar\omega$	$\hbar\omega$	
	$2\hbar\omega$	$2\hbar\omega$	$\Rightarrow E_4 = 4\hbar\omega$

Eigenvektoren :

Für ein fermionisches/bosonisches System sind nur antisimmetrisierte/symmetrisierte Eigenvektoren

Man kann diese Kombinationen mit der Hilfe der A und S Projektoren bezeichnen :

- Zwei Elektronen System

Die Anwendung von $\mathcal{A}$ ist formell äquivalent zu der Berechnung einer Determinante ("Slater Determinante"):

- E_0 $= e_0 + e_0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} |e_0\uparrow\rangle_1 & |e_0\uparrow\rangle_2 \\ |e_0\downarrow\rangle_1 & |e_0\downarrow\rangle_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_0\uparrow\rangle_1 |e_0\downarrow\rangle_2 - |e_0\downarrow\rangle_1 |e_0\uparrow\rangle_2 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle_1 |e_0\rangle_2 \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right)$$

$\Downarrow$ Die Wurzel kommt von der Normierung

<u>Nicht Entartet</u>

- E_1 $= e_1 + e_0$ $(e_0 + e_1)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} |e_1\uparrow\rangle_1 & |e_1\uparrow\rangle_2 \\ |e_0\uparrow\rangle_1 & |e_0\uparrow\rangle_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\rangle_1 |e_0\rangle_2 - |e_0\rangle |e_1\rangle \right) |\uparrow\uparrow\rangle$$

oder $$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} |e_1\downarrow\rangle_1 & |e_1\downarrow\rangle_2 \\ |e_0\downarrow\rangle_1 & |e_0\downarrow\rangle_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\rangle_1 |e_0\rangle_2 - |e_0\rangle_1 |e_1\rangle_2 \right) |\downarrow\downarrow\rangle$$

oder $$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} |e\uparrow\rangle_1 & |e_1\uparrow\rangle_2 \\ |e_0\downarrow\rangle_1 & |e_0\downarrow\rangle_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\uparrow\rangle_1 |e_0\downarrow\rangle_2 - |e_0\downarrow\rangle_1 |e_1\uparrow\rangle_2 \right)$$

oder $$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} |e_1\downarrow\rangle_1 & |e_1\downarrow\rangle_2 \\ |e_0\uparrow\rangle_1 & |e_0\uparrow\rangle_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\downarrow\rangle_1 |e_0\uparrow\rangle_2 - |e_0\uparrow\rangle_1 |e_1\downarrow\rangle_2 \right)$$

<u>Entartung</u>: 4.

- E_2 Für den Fall $e_1 + e_1$ haben wir das Gleiche wie für $e_0 + e_0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle_1 |e_1\rangle_2 \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right)$$

Der Fall mit $e_2 + e_0$ $(e_0 + e_2)$ ist äquivalent zu $e_1 + e_0$, deswegen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1|e_0\rangle - |e_0\rangle|e_2\rangle\right)|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1|e_0\rangle_2 - |e_0\rangle_1|e_2\rangle_2\right)|\downarrow\downarrow\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\uparrow\rangle|e_0\downarrow\rangle - |e_0\downarrow\rangle|e_2\uparrow\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\downarrow\rangle|e_0\uparrow\rangle - |e_0\uparrow\rangle|e_2\downarrow\rangle\right)$$

Entartung : **5**

Sinngemäß bekommt man

- E_3

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1|e_1\rangle_2 - |e_1\rangle_1|e_2\rangle_2\right)|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1|e_1\rangle_2 - |e_2\rangle_2|e_1\rangle_1\right)|\downarrow\downarrow\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\uparrow\rangle|e_1\downarrow\rangle - |e_1\downarrow\rangle|e_2\uparrow\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\downarrow\rangle|e_1\uparrow\rangle - |e_1\uparrow\rangle|e_2\downarrow\rangle\right)$$

Entartung : 4

- E_4

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1|e_2\rangle\right)\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

- Nicht Entartet

• Zwei Spin = 0 Bosonen

In diesem Fall sind nur symmetrische Eigenvektoren möglich
Ausserdem Spin = 0 $\Rightarrow$ Keine Spin Struktur

Deswegen, mit dem Hilfe des S-Projektors

• $E_0 \Rightarrow |e_0\rangle_1 |e_0\rangle_2$ Nicht Entartet

• $E_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1\rangle_1 |e_0\rangle_2 + |e_0\rangle_1 |e_1\rangle_2\right)$ Nicht Entartet

• $E_2 \Rightarrow \begin{cases} |e_1\rangle_1 |e_1\rangle_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1 |e_0\rangle_2 + |e_0\rangle |e_2\rangle\right) \end{cases}$ Entartung: 2

• $E_3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_2\rangle_1 |e_1\rangle_2 + |e_1\rangle_1 |e_2\rangle_2\right)$ Nicht Entartet

• $E_4 \Rightarrow |e_2\rangle_1 |e_2\rangle_2$ Nicht entartet

b) Der zusätzliche Beitrag des Hamilton-Operators wirkt nicht in dem Fall der Spin=0 Bosonen, deswegen bleibt die Eigenbasis unverändert

Für die zwei Elektronen man hat

$$H = -J\,\vec{S}(1)\cdot\vec{S}(2) = -\frac{J}{2}\left[S_{TOT}^2 - S^2(1) - S^2(2)\right] = -\frac{J}{2} S_{TOT}^2 + \cancel{const}$$

, wobei $\vec{S}_{TOT}^{\,2} = \left(\vec{S}(1) + \vec{S}(2)\right)^2$

Wir müssen jetzt eine gemeinsame Basis für $H' = h(1) + h(2)$ und S_{TOT} suchen

Das ist relativ einfach, weil viele Eigenvektoren von H schon Eigenvektoren von S_{TOT} sind:

Alte Eigenwerte   Neue Eigenwerte

0 $\frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle |e_0\rangle \underbrace{\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)}_{|S_{TOT}=0\rangle}$ 0

$\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\rangle |e_0\rangle - |e_0\rangle |e_1\rangle\right) \underbrace{|\uparrow\uparrow\rangle}_{|S_{TOT}=1,\, S_z=1\rangle}$ $\hbar\omega - J\hbar^2$

$\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\rangle |e_0\rangle - |e_0\rangle |e_1\rangle\right) \underbrace{|\downarrow\downarrow\rangle}_{|S_{TOT}=1,\, S_z=-1\rangle}$ $\hbar\omega - J\hbar^2$

$\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\uparrow\rangle |e_0\downarrow\rangle - |e_0\downarrow\rangle |e_1\uparrow\rangle\right)$

$\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\downarrow\rangle |e_0\uparrow\rangle - |e_0\uparrow\rangle |e_1\downarrow\rangle\right)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(|e_1\rangle_1 |e_0\rangle_2 - |e_0\rangle_1 |e_1\rangle_2\right) \underbrace{\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)}_{|S_{TOT}=1,\, S_z=0\rangle} & \hbar\omega - J\hbar^2 \\ \frac{1}{2}\left(|e_1\rangle |e_0\rangle + |e_0\rangle |e_1\rangle\right) \underbrace{\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)}_{|S_{TOT}=0,\, S_z=0\rangle} & \hbar\omega \end{cases}$$

$2\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_1\rangle |e_1\rangle\right) \underbrace{\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)}_{|S_{TOT}=0,\, S_z=0\rangle}$ $2\hbar\omega$

$2\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_2\rangle |e_0\rangle - |e_0\rangle |e_2\rangle\right) \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \end{cases}$ Triplet $2\hbar\omega - \hbar^2 J$

$2\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e_2\rangle |e_0\rangle + |e_0\rangle |e_2\rangle\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$ Singulett $2\hbar\omega$

c) Mögliche Eigenwerte / Eigenvektoren: Entartung

$$e_0 \quad e_0 \quad e_0 \qquad 0 \qquad |e_0\rangle|e_0\rangle|e_0\rangle \qquad 1$$

$$\left.\begin{array}{ccc} e_1 & e_0 & e_0 \\ e_0 & e_1 & e_0 \\ e_0 & e_0 & e_1 \end{array}\right\} \quad \hbar\omega \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|e_1\rangle|e_0\rangle|e_0\rangle + |e_0\rangle|e_1\rangle|e_0\rangle + |e_0\rangle|e_0\rangle|e_1\rangle \qquad 1$$

$$\left.\begin{array}{ccc} e_2 & e_0 & e_0 \\ e_0 & e_2 & e_0 \\ e_0 & e_0 & e_2 \\ e_1 & e_1 & e_0 \\ e_1 & e_0 & e_1 \\ e_0 & e_1 & e_1 \end{array}\right\} \quad 2\hbar\omega \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|e_2\rangle|e_0\rangle|e_0\rangle + |e_0\rangle|e_0\rangle|e_2\rangle + |e_0\rangle|e_2\rangle|e_0\rangle \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|e_1\rangle|e_1\rangle|e_0\rangle + |e_1\rangle|e_0\rangle|e_1\rangle + |e_0\rangle|e_1\rangle|e_1\rangle \end{array}\right. \qquad 2$$

$$\left.\begin{array}{ccc} e_1 & e_1 & e_1 \\ e_2 & e_1 & e_0 \\ e_1 & e_2 & e_0 \\ e_1 & e_0 & e_2 \\ e_2 & e_0 & e_1 \\ e_0 & e_1 & e_2 \\ e_0 & e_2 & e_1 \end{array}\right\} \quad 3\hbar\omega \quad \left\{\begin{array}{l} |e_1\rangle|e_1\rangle|e_1\rangle \\ \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(|e_0\rangle|e_1\rangle|e_2\rangle + |e_0\rangle|e_2\rangle|e_1\rangle + \\ \quad + |e_1\rangle|e_0\rangle|e_2\rangle + |e_1\rangle|e_2\rangle|e_0\rangle + \\ \quad + |e_2\rangle|e_1\rangle|e_0\rangle + |e_2\rangle|e_0\rangle|e_1\rangle\Big) \end{array}\right. \qquad 2$$

$$\left.\begin{array}{ccc} e_2 & e_2 & e_0 \\ e_0 & e_2 & e_2 \\ e_2 & e_0 & e_2 \end{array}\right\} \quad 4\hbar\omega \quad \frac{1}{3}\Big(|e_2\rangle|e_2\rangle|e_0\rangle + |e_0\rangle|e_2\rangle|e_2\rangle + |e_2\rangle|e_0\rangle|e_2\rangle\Big) \qquad 1$$

$$\left.\begin{matrix} e_2 & e_2 & e_1 \\ e_1 & e_2 & e_2 \\ e_2 & e_1 & e_2 \end{matrix}\right\} \quad 5\hbar\omega \qquad \frac{1}{3}\Big(|e_1\rangle|e_2\rangle|e_2\rangle + |e_2\rangle|e_1\rangle|e_2\rangle + |e_2\rangle|e_2\rangle|e_1\rangle\Big) \qquad 1$$

$$e_2 \quad e_2 \quad e_2 \quad \Rightarrow \quad 6\hbar\omega \qquad |e_2\rangle|e_2\rangle|e_2\rangle \qquad 1$$