Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi, Dr. P. Hansmann

1. Übung zur Quantenmechanik II

Wintersemester 2010/2011

ABGABE: zu Dritt (ausnahmsweise zu 1,2 oder 4 Personen), **Freitag**, **22.10.2010**, zu Beginn der Übungstunde (Tutorium)

NOTE: $\frac{2}{3}$ Klausur, $\frac{1}{3}$ Übungen

1. Wdh. Heisenbergbild *2 Punkte*

Gegeben sei ein Spin in einem Magnetfeld in z-Richtung, d.h. folgender Hamiltonian im Schrödingerbild:

$$H = -g\frac{e}{2mc}S_z B \tag{1}$$

Berechnen Sie den Spin-Operator für die x- oder y-Richtung im Heisenbergbild und interpretieren Sie das Ergebnis.

2. Wdh. Dichte-Operator für ein Spin-$\frac{1}{2}$-System *1+1+1=3 Punkte*

Ein Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen sei in dem Anfangszustand $|s_x = 1/2\rangle$

a) Schreiben Sie den Dichteoperator für dieses Teilchen in der S_z basis.

Anschließend fliegt das Teilchen durch einen Stern-Gerlach Apparat, welcher den Spin in z-Richtung mißt mit dem Ergebnis $+\frac{\hbar}{2}$.

b) Schreiben Sie den Dichteoperator für das Teilchen nach dem Messprozess in der S_z-Basis.

c) Zeigen Sie, dass sich das Teilchen in beiden oben beschriebenen Fällen in einem *reinen* Zustand befindet.

3. Nobelpreisaufgabe (leider nur mit Punkten honoriert) *2+2+2=6 Punkte*

Die Dirac-Gleichung ohne Wechselwirkung mit Impuls $\mathbf{p}$ und Energie E in der Pauli-Dirac Schreibweise lautet:

$$i\gamma^0 \partial_t \Psi + i\gamma^j \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} - m\Psi = 0 \qquad \text{mit } \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \text{und } \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die folgenden ebenen Wellen mit 4-er Spinoren Lösungen dieser Dirac-Gleichung zum Impuls $\mathbf{p}$ sind.

$$\Psi_1(\mathbf{r},t) = e^{-iE_pt+i\mathbf{pr}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_p+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E_p+m} \end{pmatrix} \qquad \Psi_2(\mathbf{r},t) = e^{-iE_pt+i\mathbf{pr}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E_p+m} \\ \frac{-p_z}{E_p+m} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } E_p > 0$$

$$\Psi_3(\mathbf{r},t) = e^{-iE_pt+i\mathbf{pr}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E_p-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E_p-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Psi_4(\mathbf{r},t) = e^{-iE_pt+i\mathbf{pr}} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E_p-m} \\ \frac{-p_z}{E_p-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } E_p < 0$$

b) Die 4-er Spinoren kann man als Komposition von zwei 2-er Spinoren schreiben:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-iE_pt+i\mathbf{pr}}$$

Leiten Sie zwei DGL für $(\phi+\chi)$ und $(\phi-\chi)$ ab und zeigen sie, daß die Kopplung der beiden Gleichungen nur über den Masseterm erfolgt. Diese Darstellung nennt man die chirale Form (mehr dazu folgt im nächsten Kapitel zu Symmetrien).

c) Geben Sie die Lösung der chiralen Form der Dirac-Gleichung für masselose Teilchen (Weyl-Gleichung) an und zeigen Sie, dass die relativistische Energie-Impuls-Beziehung folgt. Zeichnen Sie die resultierende relativistische Energie-Impuls-Beziehung für den Fall masseloser Teilchen und vergleichen Sie mit der Energie-Impuls-Beziehung eines nicht-relativistischen freien Teilchen. Nenne Beispiele für Systeme die durch die Weyl-Gleichung beschrieben werden können.