Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi, Dr. P. Hansmann

2. Übung zur Quantenmechanik II

Wintersemester 2010/2011

ABGABE: zu Dritt (ausnahmsweise zu 1,2 oder 4 Personen), **Freitag**, **05.11.2010**, zu Beginn der Übungstunde (Tutorium)

NOTE: $\frac{2}{3}$ Klausur, $\frac{1}{3}$ Übungen

4. Messung des Drehimpuls (Wdh. QM1) *1+1+2=4 Pkt.*

Der Zustand eines Teilchens sei durch folgende Linearkombination der Drehimpulseigenzustände $|l, m\rangle$ mit $l > 1$ gegeben:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{9}} \left(2|l, l\rangle - 2|l, l-1\rangle + i|l, l-2\rangle\right)$$

a) Welche möglichen Messwerte haben $\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ und L_z?

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \mathbf{L}^2 \rangle$ und $\langle L_z \rangle$.

c) Wie groß sind die Unschärfen (Standardabweichungen) $\Delta\mathbf{L^2}$ und ΔL_z?

5. Relativistische Korrektur der kinetischen Energie *1+4+1=6 Pkt.*

Betrachten Sie ein Elektron mit Masse m, welches sich in einer Dimension in dem harmonischen Potential

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

bewegt.

a) Motivieren Sie physikalisch die Form der ersten relativistischen Korrektur (H_1) zur kinetischen Energie des Elektrons.

b) Betrachten Sie H_1 als kleine Störung des nicht-relativistischen Hamilton-Operators H_0 des Elektrons. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Korrekturen für die Energie-Eigenwerte von H_0.

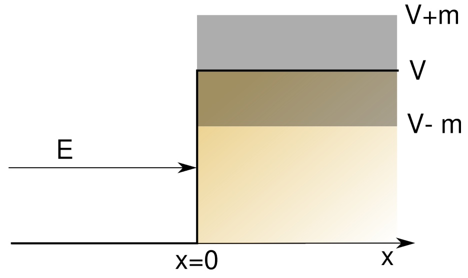
Erinnerung: Der Impuls-Operator P in der Eigenbasis $\{|n\rangle\}$ von H_0 lässt sich schreiben als $P = \frac{i}{\sqrt{2\alpha}}(a^\dagger - a)$, wobei a, $a^\dagger$ der Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperator ist, und $\alpha = (\hbar\omega m)^{-1}$.

c) Welche Eigenzustände von H_0 erscheinen in den Korrekturen des Grundzustands in erster Ordnung Störungstheorie in H_1?

6. Kleinsches Paradoxon

3+2+1=6 Pkt.

Beachte, dass bei dieser Aufgabe $\hbar \equiv 1$ und $c \equiv 1$.
Gegeben sei das folgende eindimensionale Potential:



mit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Nehmen Sie nun an, dass ein Elektron mit Spin $\uparrow$ und einer Energie $E > m$ aus $x = -\infty$ auf die Stufe trifft mit $k = \sqrt{E^2 - m^2}$ und $k, k' > 0$:

$$\psi_{\text{in}}(x) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \end{pmatrix} e^{ikx}$$

Für die reflektierte bzw. transmittierte Welle konstruiert man nun einen Ebenen-Wellen-Ansatz aus Superpositionen von $\uparrow$ und $\downarrow$

$$\psi_{\text{r}}(x) = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-k}{E+m} \end{pmatrix} e^{-ikx} + r' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}$$

$$\psi_{\text{t}}(x) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k'}{E-V+m} \end{pmatrix} e^{ik'x} + t' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{k'}{E-V+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik'x}$$

a) Zeigen Sie, dass der Spin bei der Streuung erhalten bleibt, d.h. $t' = r' = 0$ und bestimmen sie die Reflektions- bzw. Transmissionskoeffizienten

$$R = \left(\frac{r}{a}\right)^2 ; \qquad T = 1 - R$$

b) Diskutieren sie nun die Fälle i) $E > V + m$, ii) $V + m > E > V - m$ und iii) $V - m > E$.

c) Warum ist Graphen transparent (für den Elektronentransport)?