Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi, Dr. P. Hansmann

3. Übung zur Quantenmechanik II

Wintersemester 2010/2011

ABGABE: zu Dritt (ausnahmsweise zu 1,2 oder 4 Personen), **Freitag**, **19.11.2010**, zu Beginn der Übungstunde (Tutorium)

NOTE: $\frac{2}{3}$ Klausur, $\frac{1}{3}$ Übungen

7. Spin, Drehimpuls, Helizität und Chiralität *1+1+2+2+2+1+2=11 Pkt.*

a) Rekapitulieren Sie die Ergebnisse von Aufgabe 3 auf Übungsblatt 1 zur Weyl-Gleichung und schreiben Sie den Hamiltonoperator $H_{\mathrm{D}} = \hat{\alpha}\mathbf{p}$ für masselose Teilchen in der chiralen Darstellung (geben sie die explizite Form von $\hat{\alpha}$ an).

b) Schreiben Sie die 4er Spinoren, welche die Dirac Gleichung lösen für ein relativistisches Teilchen ($E > 0$), bzw. Antiteilchen ($E < 0$) mit $\mathbf{p} = (p_x, 0, 0)$ in der chiralen Darstellung. Betrachten Sie dann den Grenzfall $|\mathbf{p}| >> m$. Schreiben Sie die resultierenden 4er Spinoren in der (standard) Pauli-Dirac-Darstellung und diskutieren Sie für diese den Spin-Zustand S_z.

Betrachten sie den in der Vorlesung diskutierten Dirac Operator für ein freies Teilchen in der Pauli-Dirac-Darstellung:

$$H_{\mathrm{D}} = \hat{\alpha}\mathbf{p} + \hat{\beta}m$$

c) Berechnen Sie den Kommutator des Spin-Operators

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma} \end{pmatrix}$$

mit H_{D}. In welchem Fall ist der Spin eine Erhaltungsgröße des Systems?

d) Berechnen Sie den Kommutator des Drehimpuls-Operators $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ mit H_{D} und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil c): Was legt dieser Vergleich nahe?

e) Berechnen Sie den Kommutator des Helizität-Operators $\hat{\lambda} = \frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ mit H_{D}. Wann ist die Helizität eine Erhaltungsgröße?

f) Als Chiralitäts-Operator bezeichnet man $\gamma_5 = i\ \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Zeige, daß die Lösungen aus Aufgabe 3 auf Blatt 1 ($\chi \pm \phi$) Eigenfunktionen zu γ_5 sind und geben Sie die entsprechenden Eigenwerte. (*Anmerkung*: χ und ϕ waren die Bispinoren in der Pauli-Dirac-Darstellung.)

g) Berechnen Sie den Kommutator des Chiralität-Operators γ_5 mit H_D für $m = 0$ und $m \neq 0$ und zeigen Sie, daß im Falle $m = 0$ die Chiralität der Helizität entspricht. (*Hinweis*: Benutzen Sie den chiralitäts Projektor $\Lambda_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$)

8. Kontinuitätsgleichung

2+1+1=4 Pkt.

a) Sei $\phi(x)$ mit x=$(\vec{r}$,$t)$ eine Lösung der Klein-Gordon Gleichung, d.h. $\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\right)\phi(x) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi(x)$. Zeige, dass die Kontinuitätsgleichung, d.h. $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ erfüllt ist mit $\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)$, und $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\phi^*\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*\right)$.

b) Ist die so definierte Wahrscheinlichkeitsdichte ρ positiv-definit wie im Fall der Schödinger Gleichung?

c) Der $4-$er Spinor $\psi(x)$ sei eine Lösung der Dirac Gleichung, d.h. $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = (c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2)\psi(x)$. Zeige, dass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist mit $\rho = \psi^\dagger(x)\psi(x)$ und $\vec{j} = c\psi^\dagger(x)\vec{\alpha}\psi(x)$.