Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi, Dr. P. Hansmann

5. Übung zur Quantenmechanik II

Wintersemester 2010/2011

ABGABE: zu Dritt (ausnahmsweise zu 1,2 oder 4 Personen), **Freitag**, **17.12.2010**, zu Beginn der Übungstunde (Tutorium)

NOTE: $\frac{2}{3}$ Klausur, $\frac{1}{3}$ Übungen

11. Bornsche Näherung

4+3+3=10 Pkt.

Die Bornsche Näherung ist anwendbar, wenn der V-lineare Term der Bornschen Reihe klein gegenüber der ungestörten ebenen Welle ist. Mathematisch bedeutet das

$$\left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \, \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r'}|}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} V(\vec{r'}) \, \varphi_k(\vec{r'}) \right| \ll |\varphi_k(\vec{r})| \;\text{ mit }\; \varphi_k(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Speziell für ein zentralsymmetrisches Potential, $V(\vec{r'}) = V(r')$, das seinen größten Wert bei $r = 0$ annimmt, fordern wir

$$\left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \, e^{i(kr' + \vec{k}\vec{r'})} \, \frac{V(r')}{r'} \right| \ll 1.$$

a) Führen Sie in der letzten Ungleichung die Winkelintegration aus und berechnen Sie den verbleibenden Ausdruck für das Gaußche Streupotential

$$V(r) = V_0 \, e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}.$$

Die Konstanten V_0 und $r_0 > 0$ bezeichnen die Stärke und die Reichweite des Streupotentials. Diskutieren Sie für diesen Fall die Anwendbarkeit der Bornschen Näherung als Funktion des dimensionslosen Maßes (d.h., $\frac{\hbar^2}{m r_0^2 V_0}$) für die Stärke und Reichweite des Streupotentials.

b) Berechnen Sie für das in **a)** genannte Potential den differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \phi)$ in erster Bornscher Näherung.

c) Verwenden Sie das Ergebnis von **b)** um den totalen Streuquerschnitt $\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$ zu berechnen. Vergleichen Sie dieses Resultat mit der (entsprechenden) Aussage des Optischen Theorems (wird noch in der Vorlesung besprochen), und diskutieren Sie den Vergleich.

12. Greenfunktionen

5 Pkt.

Die Schrödinger Gleichung $\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + E\right)\psi(\vec{x}) = U(\vec{x})\psi(\vec{x})$ kann mit der Greenfunktion-Methode gelöst werden. Hierbei ist die Greenfunktion $G_0(E, \vec{R})$ dann definiert als

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + E\right) G_0(E, \vec{R}) = \delta(\vec{R}),$$

wobei $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x'}$. Führen Sie die Fourier-Transformation der Definitionsgleichung für $G(E, \vec{R})$ (d.h., $G(E, \vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{e}^{i\vec{K}\vec{R}} \tilde{G}_0(E, \vec{K}) d^3K$) durch, wobei $\tilde{G}_0(E, \vec{K})$ die Fourier Transformation der Green Funktion ist. Berechne danach den expliziten Ausdruck für $G_0(E, \vec{R})$ aus der fouriertransformierten Gleichung.
Hinweis: Die Integrale über dK können am besten mit der Cauchy Integralformel berechnet werden. Beachten Sie, dass die Fouriertransformierte $\tilde{G}_0(E, \vec{K})$ Pole auf der reelen Achse hat. Deswegen muss man E um $\pm i\delta$ verschieben. Das impliziert die Existenz zweier verschiedener Lösungen, nämlich die retardierte ($+i\delta$) und die avancierte ($-i\delta$) Greenfunktion.