Technische Universität
Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi, Dr. P. Hansmann

6. Übung zur Quantenmechanik II

Wintersemester 2010/2011

ABGABE: **Freitag**, **14.01.2011**, zu Beginn der Übungstunde(Tutorium).

13. Symmetrisierende/Antisymmetrisierende Projektoren

1+1=2 Pkt.

Die symmetrisierenden und antisymmetrisierenden Operatoren für ein System N identischer Teilchen sind definiert als

$$\mathcal{S} = \frac{1}{N!}\sum_n P_n, \quad \mathcal{A} = \frac{1}{N!}\sum_n \epsilon_n P_n,$$

wobei die Summe über alle möglichen Permutationen (definiert durch den Pemutationsoperator P_n) geht, und $\epsilon_n = \pm 1$ für gerade/ungerade Permutationen.

a) Zeigen Sie, dass diese Operatoren Projektoren sind, d.h. $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$ und $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

b) Zeigen Sie, dass die zwei Operatoren "orthogonal" sind, d.h. $\mathcal{S}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{S} = 0$.

14. Drei identische fermionische Teilchen

3+2+3=8 Pkt.

Sei h_0 der Hamilton-Operator eines fermionischen Teilchens mit Spin $\frac{1}{2}$. Dieser Hamilton-Operator wirkt nur im Ortsraum mit Eigenenergien $\epsilon_0 = 0$, $\epsilon_1 = \hbar\omega_0$ und $\epsilon_2 = 2\hbar\omega_0$ usw. und (den entsprechenden) Eigenvektoren $|\varphi_0, \sigma\rangle$, $|\varphi_1, \sigma\rangle$, $|\varphi_2, \sigma\rangle$ mit $\sigma = \uparrow, \downarrow$, die im Ortsraum nur Spin-entartet sind.

a) Betrachten Sie ein System mit drei unabhängingen Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$ (z.B. Elektronen), dessen Hamilton-Operator

$$H = h_0(1) + h_0(2) + h_0(3)$$

ist. Finden Sie die Eigenbasis dieses Systems, und berechnen Sie die Eigenenergie und die korrespondierende Entartungen für den Grundzustand und die ersten zwei angeregten Zustände. Berechnen Sie auch alle Eigenvektoren für den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand.

b) Wie werden sich die Ergebnisse von **a)** für den Grundzustand ändern, falls die Fermionen einen Spin $\frac{3}{2}$ anstatt $\frac{1}{2}$ haben?

c) Wie werden sich die Ergebnisse von **a)** für den Grundzustand ändern, wenn auch der zusätzliche Beitrag einer Spin-Spin Wechselwirkung und Kopplung mit einem magnetischen Feld $H_{JB} = -J[\vec{S}(1) \cdot \vec{S}(2) + \vec{S}(2) \cdot \vec{S}(3) + \vec{S}(1) \cdot \vec{S}(3)] - B \sum_i S_z^i$ mit $J, B > 0$ und $J \gg B,\ \hbar\omega_0$ im Hamilton-Operator H berücksichtigt wird? Kann man den Grundzustand als eine einzige Slater-Determinante schreiben? Falls ja, kann man erwarten, dass dies für alle Eigenvektoren möglich ist?

15. Operatoren in zweiter Quantisierung *1+2+3=6 Pkt.*

a) Schreiben Sie den Hamilton-Operator aus Bsp. **14 a)** in zweiter Quantisierung.

b) Stellen Sie den Impuls-Operator $\hat{p}$ in der Ortsraumbasis und den Orts-Operator $\hat{r}$ in der Impulsraum-Basis in zweiter Quantisierung dar.

c) Stellen Sie nun den Zweiteilchen-Operator der Coulombwechselwirkung

$$V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j|}$$

in zweiter Quantisierung dar. Schreiben Sie den Coulomb-Operator sowohl in der Orts- als auch der Impuls-Basis.