Technische Universität Wien

Prof. Dr. K. Held
Dr. A. Toschi, Dr. P. Hansmann

7. Übung zur Quantenmechanik II

Wintersemester 2010/2011

ABGABE: **Donnerstag**, **27.01.2011**, vor dem Beginn der Übungsbesprechung (Ort und Zeit: siehe TISS).

16. Attraktives Hubbard Modell in 2. Quantisierung *2+2+2+2=8 Punkte*

Betrachten Sie folgendes Modell-System für Elektronen auf vier Gitterplätzen mit periodischen Randbedingungen:

$$H = -t \sum_{i=1,2,3,4;\,\sigma} \left(c^\dagger_{i,\sigma} c_{\mathrm{mod}[i,4]+1,\sigma} + c^\dagger_{\mathrm{mod}[i,4]+1,\sigma} c_{i,\sigma} \right) - U \sum_{i=1,2,3,4} n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow}.$$

In dieser Formel sind die Dichte-Operatoren auf Platz $i = 1,2,3,4$ definiert als $n_{i,\sigma} = c^\dagger_{i,\sigma} c_{i,\sigma}$, wobei $c^\dagger_{i,\sigma}/c_{i,\sigma}$ mit $\sigma = \uparrow (\downarrow)$ die Erzeugungs/Vernichtungs-Operatoren eines Elektrons mit Spin $S_z = +(-)\frac{\hbar}{2}$ auf dem Platz i sind und "mod" die Modulofunktion bezeichnet.
Berechnen Sie die Energie und die Entartung des *Grundzustands* des Systems

a) im Fall, dass das System nur *ein* Elektron hat (mit $t, U > 0$),

b) im Fall, dass das System *vier* Elekronen hat, aber mit $U = 0, t > 0$ ("unkorreliertes System")

c) und im entgegengesetzten Fall, für ein System mit *vier* Elektronen, aber mit $t = 0, U > 0$ (sog. "bosonischer" oder "atomarer Limes"). Geben Sie hier auch die Eigenvektoren an.

d) Berechnen Sie in allen Fällen **a)**, **b)**, und **c)** den Erwartungswert des "Doppel-Besetzungs"-Operators $n_d = \frac{1}{4}\sum_{i=1,2,3,4} n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow}$ im Grundzustand.

17. Pfadintegral für ein freies Teilchen *2+2+3=7 Punkte*

Betrachten Sie die Bewegung eines freien Teilchens mit Masse m in einer Dimension, dessen Position $x_i = 0$ bei $t_i = 0$ und $x = x_f$ bei $t = t_f$ ist. Die klassische Trajektorie des Teilchens ist deswegen $x(t) = \frac{x_f}{t_f}\, t$. Betrachten Sie nun zusätzliche (Quanten)Pfade um die klassische Trajektorie in der Form $x_\epsilon(t) = x_f \left(\frac{t}{t_f}\right)^{(1+\epsilon)}$ ($\epsilon = 0$ entspricht dem klassischen Bewegungspfad).

a) Finden Sie den Ausdruck der (ϵ abhängigen) Wirkung S, die zu diesen Pfaden korrespondiert. Für welchen Pfad ist die Wirkung minimal?

b) Geben Sie eine Abschätzung wie viele (Quanten-)Pfade (d.h. welche ϵ) für ein klassisches Teilchen ($m = 1$g) bzw. ein quantenmechanisches Teilchen ($m = 10^{-27}$g) beitragen. <u>Hinweis:</u> Betrachten Sie die Entwickung von $\phi = \frac{S}{\hbar}$ um das Minimum, und schätzen Sie die möglichen Werte von ϵ in beiden Fälle ab.

c) Der Ausdruck für den gesamten Propagator $U(x_i, t_i, x_f, t_f)$ (wie in der Vorlesung abgeleitet) für ein freies Teilchen mit Masse m in einer Dimension ist folgender:

$$U(x_i, t_i, x_f, t_f) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}\right)^{\frac{(N-1)}{2}} \int dx_{N-1} \int dx_{N-2} \cdots \int dx_2 \; e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=2}^{N}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}\right)^2\right]\Delta t},$$

wobei $x_1 = x_i, t_1 = t_i, x_N = x_f, t_N = t_f$, und $\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N-1}$. Berechnen Sie den expliziten Ausdruck für den Limes $N \to \infty$ (<u>Hinweis</u> für die Berechnung der Integrale: Betrachten Sie zuerst den Fall $N = 3$, d.h. mit nur einem Teilungspunkt des gesamten Intervalls $x_f - x_i$. Teilen Sie im nächsten Schritt die beiden so entstandenen Intervalle wieder in jeweils zwei Teilintervalle ($N = 5$), usw. ...)