Magnetfeld u. Ströme – Biot-Savart 4.3.2010

Distributionelle Ladungsverteilung: (Verallgem. Funktionen)

Pkt-Ladung bei $\vec{r}'$: $\rho(\vec{r}) = q\, \delta(x-x')\, \delta(y-y')\, \delta(z-z')$

unendl. dünner Leiter
z.B. in z-Richtung
$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{e}_z\, I\, \delta(x)\, \delta(y)$$

$$\partial_i r = \frac{x_i}{r} \qquad \partial_i \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\partial_i r$$

$$\vec{\nabla}|\vec{r}| = \vec{e}_r$$

(s. Folien)

$$\vec{B}(\vec{r}) = k_3 \int d^3r' \underbrace{\vec{j}(\vec{r}') \times \left(-\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)}$$

$$+ \left(\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{j}(\vec{r}')$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r}) = 0$ (Divergenz eines Rotorfeldes ist Null)

$$(\mathrm{div\,rot}\,\vec{A}) = \partial_j (\mathrm{rot}\,\vec{A})_j = \partial_j(\varepsilon_{jkl}\partial_k A_l)$$

$$= \partial_m(\varepsilon_{mnl}\partial_n A_l) = \partial_k \varepsilon_{kjl}\partial_j A_l = \underbrace{\varepsilon_{kjl}}_{-\varepsilon_{jkl}}\partial_k\partial_j A_l$$

$$\Rightarrow \mathrm{div\,rot}\,\vec{A} = 0$$

$$\mathrm{rot\,rot} = \mathrm{grad\,div} - \Delta$$

$$(\mathrm{rot\,rot}\,\vec{A})_j = (\mathrm{grad\,div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A})_j$$

$\partial_i\partial_i$ (kartesische Koord.!)

$$\varepsilon_{jkl}\,\partial_k\left(\varepsilon_{lmn}\,\partial_m A_n\right) =$$

$$\left[\ \varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ljk}\,\varepsilon_{lmn} = \delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km}\ \right]$$

$$\stackrel{\cdot}{=} \partial_j(\partial_k A_k) - \underbrace{\partial_k\partial_k}_{\Delta} A_j$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = k_3\int d^3r'\left\{\vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)} - \Delta\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right\}$$

(***)

$$\vec{j}(\vec{r}')\,\underbrace{\vec{\nabla}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}-\vec{r}'}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\vec{\nabla}_{(\vec{r}'-\vec{r})}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

habe Abl. bezgl. einer unbeteiligten Variable ($\vec{r}$) auf Abl. bezgl. Integrationsvariable umgewälzt

$$= -\vec{\nabla}_{\vec{r}'}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\vec{\nabla}'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

partielle Integration möglich:

$$\int d^3r'\,(X)\,\partial_i'(Y) = \overset{(*)}{\cancel{\int d^3r'\,\partial_i(XY)}} - \int d^3r'\,\underbrace{(\partial_i' X)}_{(**)}\,Y$$

Gauß'scher Satz: $\displaystyle\int_V d^3r\ \text{div}\,\vec{X} = \int_{\partial V} d^2\vec{f}\cdot\vec{X}$

allgemeiner: $\displaystyle\int_V d^3r\,\partial_i(\ldots) = \int_{\partial V}(d^2f)_i\,(\ldots)$

(*) verschwindet am Rand (unendl. Sphäre), Integrant fällt im unendl. ab (kein Strom mehr im ∞)

(**) $\longrightarrow \vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}')$ $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ (stationär)

$$\Delta \frac{1}{r} = \partial_j \underbrace{\partial_j \frac{1}{r}}_{-\frac{x_j}{r^3}} \qquad \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{x}}{r^3}\right)$$

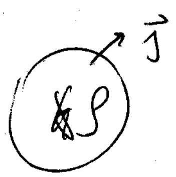
$$\oint_{\partial V} d^2\vec{f} \; \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = 4\pi \cdot \begin{cases} 1 \, , & \vec{x}' \in V \\ 0 \, , & \vec{x}' \notin V \end{cases}$$

$$= \int_V d^3r \; \vec{\nabla} \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = \int_V d^3r \, \Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$(***) = 4\pi \vec{j}(\vec{r}') \, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \vec{B}(\vec{r}) = k_3 4\pi \vec{j}(\vec{r})}$$

Satz v. Stokes: $\displaystyle \oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot (\mathrm{rot}\, \vec{X}) = \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{X}$

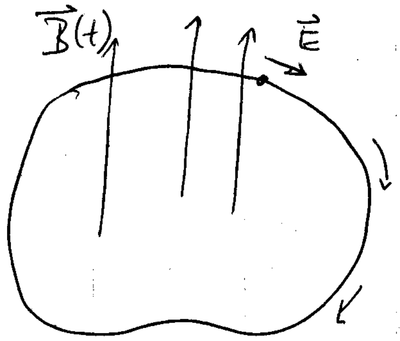


$$-\frac{dQ_V}{\partial t} = \int_{\partial V} d^2\vec{f} \cdot \vec{j} = \int_V d^3r \cdot (\vec{\nabla}\cdot\vec{j})$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_V d^3r \, \rho(r', t)$$

Berücksichtigung des dynamischen Falls ($\mathrm{div}\, j \neq 0$) führt über Einbeziehung v. $\frac{\partial E}{\partial t}$ auf die 3. Maxwellgleichung.
⇒ Folien! (Maxwell'scher Verschiebungsstrom)

Faraday'sches Induktionsgesetz – 4. Maxwellgleichung



$$\oint_{C=\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{E} = -k_4 \frac{d}{dt} \Phi_m = -k_4 \frac{d}{dt} \int_F d^2\vec{f} \cdot \vec{B}$$

$$\oint_{\partial F} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \int_F d^2\vec{f} \cdot (\text{rot } E) \qquad \forall F \qquad \text{(Stokes)}$$

$$\rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E}(\vec{r},t) = -k_4 \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r},t)} \quad \text{4. Maxwellgleichung}$$

Elektromagn. Wellen

aus Vakuum-Maxwellgleichungen $(\rho = 0, \vec{j} = 0)$