Elektrodynamik

18.03.2010

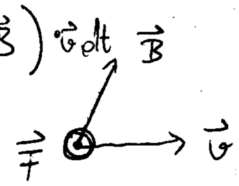
Energie- und Impulsbilanz

Energiesatz der Elektrodynamik

Pkt. Teilchen im äußeren Feld

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad d\vec{s} = \vec{v}\,dt$$

$$= q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}\,dt$$



Magnetfeld fällt raus!

$$= q\vec{E} \cdot \vec{v}\,dt$$

$$\frac{dA^{mech}_{(V)}}{dt} = \int_V \underbrace{d^3r\,\vec{j}}_{\delta q \cdot \vec{v}\,|_{\vec{r}}} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} \qquad \text{(2. Maxwell)}$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \qquad \text{(allgem. Kontinuitätsgleichung)}$$

totale Zeitableitung steht mit örtl. Ableitung in Beziehung

⟶ Erhaltungsgröße

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \underbrace{\frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{E}}_{\text{versuchen das als totale örtl. Abl. darzustellen}} - \frac{1}{4\pi}\underbrace{\left(\partial_t \vec{E}\right) \cdot \vec{E}}_{\frac{1}{2}\partial_t\left(\vec{E} \cdot \vec{E}\right)}$$

totale Zeitableitung ✓

$$\frac{c}{4\pi}\left(\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k\right) \cdot E_i = \frac{c}{4\pi}\left[\partial_j\left(\varepsilon_{ijk} B_k E_i\right) \underbrace{- \varepsilon_{ijk}}_{+\varepsilon_{jik}} B_k \partial_j E_i\right]$$

$$= \frac{c}{4\pi}\left[\partial_j(\varepsilon_{ijk} B_k E_i) + \varepsilon_{kji} B_k \partial_j E_i\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{B}$$

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{c}{4\pi}\underbrace{\left[\partial_j\left(\varepsilon_{ijk}B_k E_i\right)\right]}_{\vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S}} - \frac{1}{4\pi}\underbrace{B_k\partial_t B_k}_{\frac{1}{2}\partial_t(\vec{B}^2)} - \frac{1}{8\pi}\partial_t\left(\vec{E}^2\right)$$

totale örtl. Abl. $\qquad$ totale zeitl. Abl.

Poynting - Vektor

$$w_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$$ ... Energiedichte d. e.m. Feldes

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{d w_{mech}}{dt} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}w_{e.m}$$

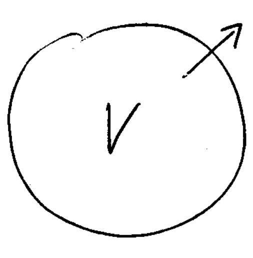
$$\partial_t \rho = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$\rho \quad \longleftrightarrow \quad w_{mech} + w_{e.m.}$

$\vec{j} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{S}$ ... Poynting Vektorfeld

$$\int_V d^3r : \quad \partial_t \rho = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$\frac{d}{dt}Q_V = -\oint_{\partial V} d^2\vec{f}\cdot\vec{j}$$



$\vec{S}$ ... Energie, die aus dem Volumen abfließt

$\Rightarrow$ Somit haben wir etwas wie Energieerhaltung gefunden.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(W_V^{mech} + W_V^{feld}\right) = -\oint_{\partial V} d^2\vec{f} \cdot \vec{S}}$$

Energieerhaltungssatz

Impulsbilanz

Lorentzkraftdichte $\vec{F}^{mech} = \frac{d}{dt}\vec{p}^{mech} = \int_V d^3r \left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times B\right)$

$$\partial_t \rho_a = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_a$$

2 Indizes (tensorielle Größe)

$\vec{p} \rightarrow$ Vektorindex

(für Impulserhaltung)

Herleitung analog zur Energieerhaltung

$\rightarrow$ kommt als Ankreuzbeispiel zu den UE

Ziel: totale Ableitung

Mittel: hom. Maxwellgleichungen als Umformhilfe

Ergebnis: $\frac{d}{dt}\vec{g}_{mech} = +\vec{\nabla}(\overleftrightarrow{T}) - \frac{d}{dt}\vec{g}_{feld} \quad \Big| \int_V d^3r$

Impulsdichte

(aufintegriert $\rightarrow$ Impuls)

$\overleftrightarrow{T}$ ... Impulsstromdichte (Impulsabfluss), Maxwellscher Spannungstensor

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{mech} + \vec{P}_{feld}\right)_j^{(V)} = \int_{\partial V} d^2 f_i \cdot T_{ij}$$

Kapitel 3 | Elektrostatik

Statische (zeitunabhängige) Probleme (Quellen festgehalten)

- $\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \emptyset \Longrightarrow$

Elektrostatik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\emptyset}$$

Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \emptyset$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})$$

entkoppelt → getrennt lösbar

$$\downarrow$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})}$$ Poisson-Gleichung

(Partikulär-) Lösung d. PGL

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\left.\begin{array}{l}\text{alle Quellen explizit gegeben} \\ \text{Vakuum liegt vor}\end{array}\right\}$ natürliche RB

$$D_{ret} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) \Theta(t-t')$$

retardierte Greenfunktion

liefert automatisch Greenfunktion für PGL, wenn die Zeit rausfällt

$$\Delta \phi = -4\pi \rho \qquad \Delta G(\vec{r}-\vec{r}') = -4\pi \delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\longrightarrow G(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{(nat. RB)}$$

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \, G(\vec{r}-\vec{r}\,') \, \rho(\vec{r}\,')$$

Spezielle Randwertprobleme

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \underbrace{\left[G(\vec{r}-\vec{r}\,') + G_{hom}(\vec{r},\vec{r}\,')\right]}_{G_{speziell}(\vec{r},\vec{r}\,')} \rho(\vec{r}\,')$$

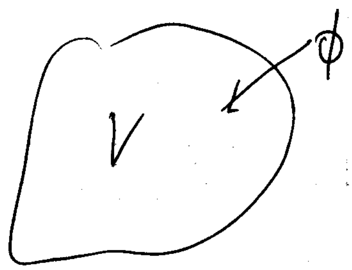
$$\Delta G_{hom}(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 \,, \quad \phi_{hom}(\vec{r}) = 0$$

RB auf geschlossenen Flächen $F = \partial V$

- Dirichlet RB : $\phi(\vec{r})$ auf ∂V gegeben ← häufig
- Neumann RB : $\frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi$ auf ∂V gegeben $(\vec{n} \parallel d^2\vec{f})$ ↖ selten

Behauptung : 1 solche RB ⇒ PGL eindeutig lösbar

(bis auf eine Konstante für Neumann RB)



Beweis:

$\exists \, \phi_1, \phi_2 \Rightarrow \chi = \phi_1 - \phi_2$ mit

$$\Delta \chi(\vec{r}) = 0 \text{ mit RB } \chi\big|_{\partial V} = 0 \text{ oder } \frac{\partial \chi}{\partial n}\Big|_{\partial V} = 0 \text{ auf } \partial V$$

Gauß $\quad \int_V \operatorname{div} \vec{X} \, d^3r = \int_{\partial V} d^2\vec{f} \cdot \vec{X} \qquad \vec{X} = \chi \vec{\nabla} \chi$

$$\underbrace{d^2\vec{f} \cdot \vec{\nabla}}_{|d^2\vec{f}|\,\partial_n} \leftarrow \text{Normalabl.}$$

$$\int_V d^3r \left[\underbrace{(\vec{\nabla}\chi)^2}_{\text{positiv}} + \chi \underbrace{\Delta \chi}_{=0} \right] = \oint_F \underbrace{d^2\vec{f} \cdot \chi \vec{\nabla} \chi}_{=0 \text{ auf } \partial V}$$

$$\vec{\nabla}(\chi \cdot \vec{\nabla}\chi)$$

$$\vec{\nabla}\chi = 0 \Rightarrow \chi \text{ const} \Rightarrow \chi \equiv 0 \text{ für Dirichlet}$$

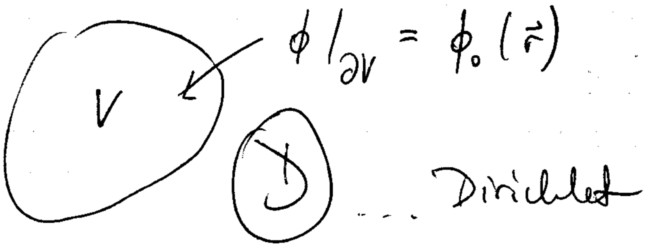
(Neumann: bis auf Konstante bestimmt)

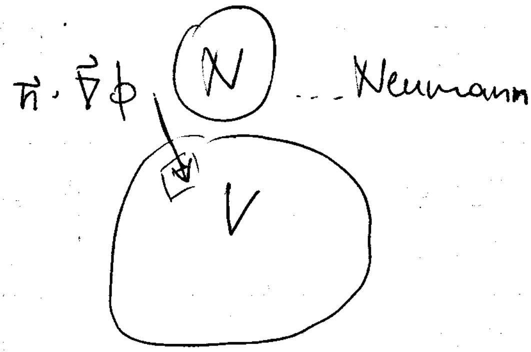
Dirichlet - Greenfunktion

(Greenfunktion, die zu jeweiligem Dirichlet RW-Problem gehört)

Annahme: Wir besitzen G

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -4\pi\,\delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')$$





$$\int_V \operatorname{div}\vec{X}\, d^3r' = \int_{\partial V} d^2\vec{f}\,' \cdot \vec{X}(\vec{r}\,')$$

$$\vec{X}(\vec{r}\,', \ldots) = G(\vec{r}, \vec{r}\,')\,\vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,') - \phi(\vec{r}\,')\,\vec{\nabla}'G(\vec{r}, \vec{r}\,')$$

konstruiere ein geeignetes Vektorfeld $\vec{X}$

$\operatorname{div}\vec{X}$ ... gemischte Terme fallen raus

speziell: Dirichlet - Greenfunktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')\big|_{r' \in \partial V} = 0$

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\, G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,') - \frac{1}{4\pi}\oint d^2\vec{f}\,\phi\,\vec{\nabla}' \cdot G_D$$

Problem: G_D finden. Existieren nur für sehr einfache Problemstellungen.

Bsp.: RB auf Kugel, Ebene, Zylinderfläche

→ exakte Lösung möglich

RB bei Anwesenheit von Leitern

Leiter: Frei bewegl. Ladungen, die den Leiter nicht verlassen

$$\text{Zeitunabh. Zustand} \Rightarrow \begin{cases} E(\vec{r}) \equiv 0 \\ \phi(\vec{r}) = \text{const} \end{cases} \quad \text{im Inneren des Leiters}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv 0 \quad \text{im Inneren}$$

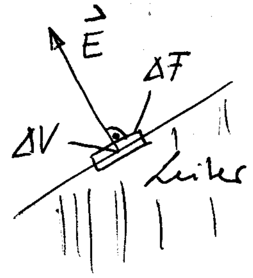
- elektr. Ladung eines Leiters konzentriert auf Oberfläche
- äußere Felder abgeschirmt durch entspr. verteilte Oberflächenladungsdichte

$$\phi(\vec{r})\Big|_F = \text{const} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \parallel d^2\vec{f} \Rightarrow \vec{E}_{tg}(\vec{r})\Big|_F = 0$$

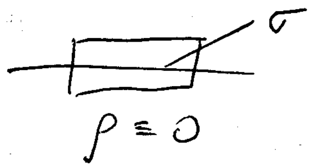
Äquipotentialflächen

$$\oint_{\partial\Delta V} d^2\vec{f} \cdot \vec{E} = \int_{\Delta F} d^2\vec{f} \cdot E = 4\pi \int_{\Delta V} d^3r\, \rho = 4\pi \Delta Q$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \longrightarrow \int_{\partial V} d^2\vec{f} \cdot \vec{E} = 4\pi Q_V$$



$$E_n(\vec{r})\Big|_F = 4\pi\sigma \equiv 4\pi \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F}$$



$$Q_{Leiter} = \int_F d^2f\, \sigma$$

σ ... Oberflächenladungsdichte