Differentiation
Integration
Nullstellenbestimmung

http://www.library.cornell.edu/nr
http://lib-www.lanl.gov/numerical/index.html

a) Differentiation von Interpolationspolynomen (siehe VU vor Test)

- Vorteil: einfach, schnell (Verwendung der Polynom-Koeffizienten für mehrer Zwecke)
- Nachteil: Fehler vergrößert sich

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= P_N(x) + E(x) \\ f'(x) &= P_N'(x) + E'(x) \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad E(x) < E'(x)$$

b) Differentiation an gleichmäßig verteilten Datenpunkten:

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) \qquad \rightarrow \qquad f''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h)$$

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \qquad \rightarrow \qquad f''(x_0) = \frac{f_2 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4) \quad \rightarrow \quad \ldots$$

Integration von Funktionen an gleichmäßig verteilten Datenpunkten:

Ziel: Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b dx\ f(x) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots 2f_{n-1} + f_n) - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)$$

$$\int_a^b dx\ f(x) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \cdots 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) - \frac{b-a}{180}h^4 f^{IV}(\xi)$$

$$\int_a^b dx\ f(x) = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 \cdots 3f_{n-1} + f_n) - \frac{b-a}{80}h^4 f^{IV}(\xi)$$

Gauß Integration:

bisher: Summationen an äquidistanten Stützstellen
Regel: je mehr Stützstellen (je kleiner der Abstand zwischen Stützstellen), desto geringer der Fehler $R = O\left(\Delta x^n f^{(\tilde{n})}(\xi)\right)$

neuer Versuch: Verringerung der Anzahl an Stützstellen, dafür Freigabe ihrer Position → mehr Freiheitsgrade in Berechnung, evtl. Verbesserung der Konvergenz (für bestimmte Fälle exakte Berechnung), dafür sind x_i nicht mehr äquidistant und müssen extra berechnet werden (z.B. Neville-Algorithmus)

allgemein: $\int_a^b W(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + R_n$

Die Funktion $W(x)$ bestimmt die Polynome zur Bestimmung der Stützstellen, Form der Funktion $f(x)$ legt deren Anzahl nahe

$$\int_a^b W(x) p_n(x) p_{n'}(x) dx = \delta_{nn'}$$

Nullstellen der p_i sind Stützstellen der Integration
Gewichtsfunktionen:

$$w_i = \left(p_{n-1}(x_i) p_n'(x_i)\right)^{-1}$$

z.B.: $W(x) = 1 \rightarrow$ Nullstellen der Legendrepolynome $P_n(x)$, $x \in [-1,1]$

Gewichte:

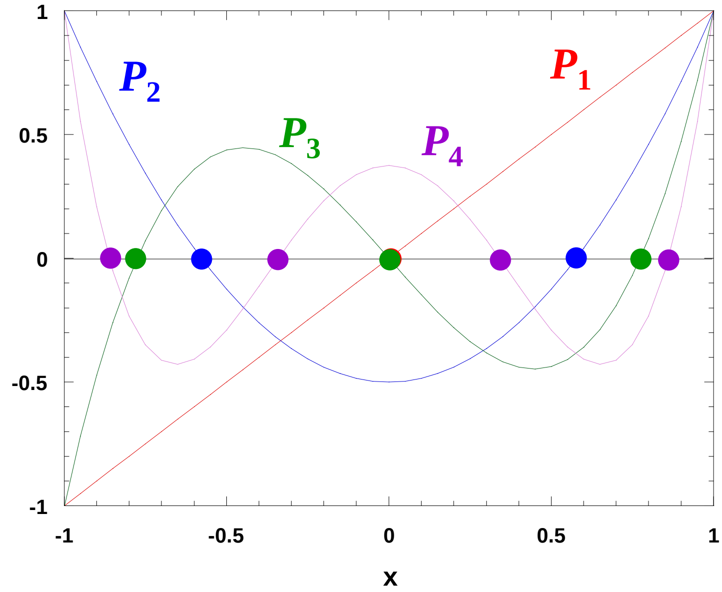
$$w_i = \frac{2}{1-x_i^2}\left(P_n'(x_i)\right)^{-2}$$

$$= \left(P_{n-1}(x_i)P_n'(x_i)\right)^{-1}$$

n Stützstellen ausreichend zur **EXAKTEN** Integration eines Polynoms bis zum Grad ($2n$-1)

$$y_i = \frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}$$

$$I[a,b] = \frac{b-a}{2}I[-1,1]$$



einige andere $W(x)$ mit bekannten Polynomen:

$$W(x) = x^k \quad \rightarrow \quad \sqrt{k+2n+1} \cdot P_n^{(k,0)} \quad \text{Jakobipolynome}$$

$$W(x) = 1/\sqrt{1-x} \quad \rightarrow \quad P_{2n}(\sqrt{1-x})$$

$$W(x) = \sqrt{1-x} \quad \rightarrow \quad P_{2n+1}(\sqrt{1-x})/\sqrt{1-x}$$

$$W(x) = 1/\sqrt{1-x^2} \quad \rightarrow \quad T_n \quad \text{Tschebytscheffpolynome}$$

$$W(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \rightarrow \quad U_n \quad \text{Tschebytscheffpolynome 2. Art}$$

$$W(x) = e^{-x} \quad \rightarrow \quad L_n \quad \text{Laguerrepolynome}$$

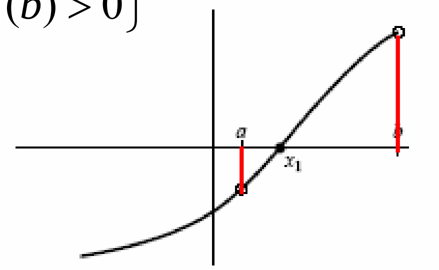
$$W(x) = e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad H_n \quad \text{Hermitepolynome}$$

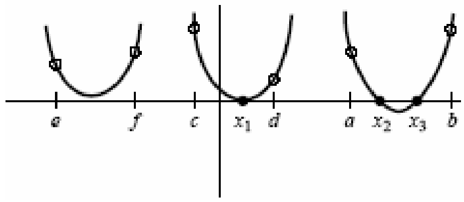
meistens notwendig: **Nullstellenbestimmung**

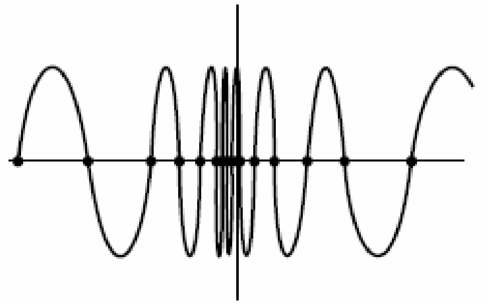
$$\left.\begin{array}{l} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{array}\right\} \rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$$

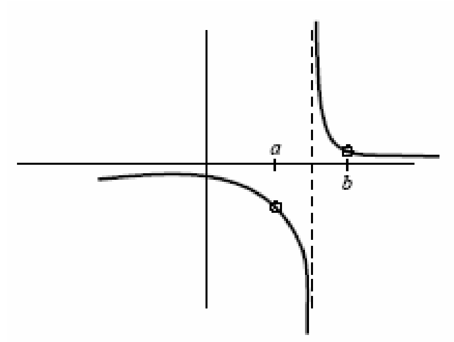
$$f(x) = x^2 +$$

1 0 -1



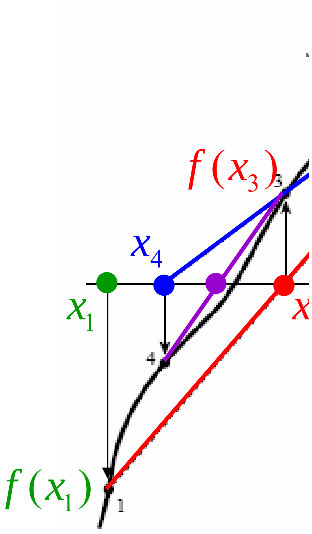


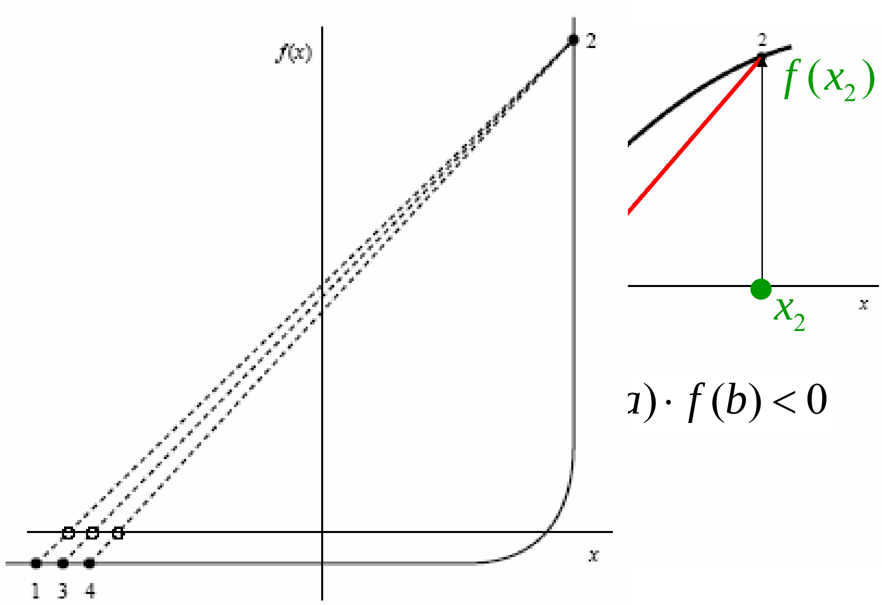




Sekantenverfahren $\propto \varepsilon^{1.618}$

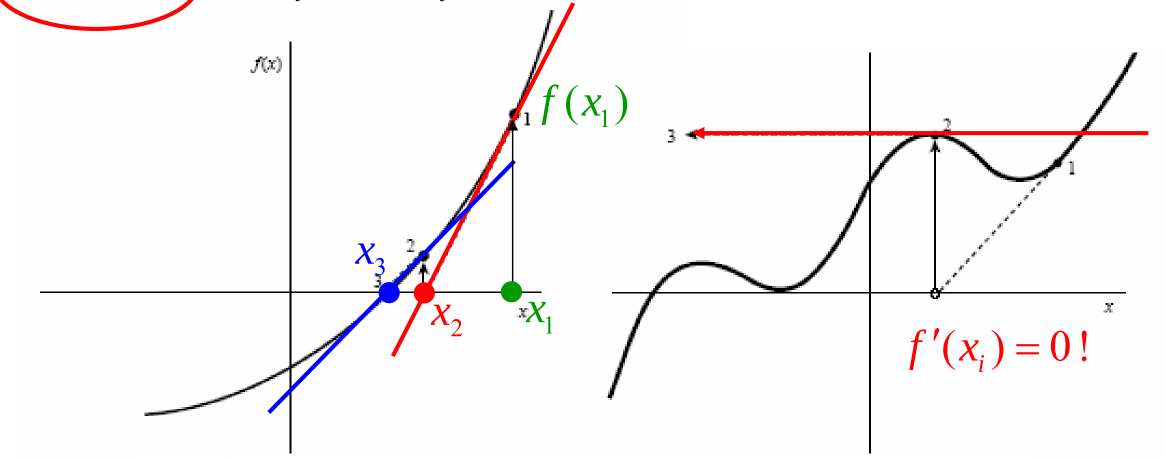
regula falsi $\propto \varepsilon^{>1}$





Newton-Raphson-Verfahren $\propto \varepsilon^2$

$$f(x+\Delta x) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + O(\Delta x^2)$$



$\propto \varepsilon^2$ nur dann, wenn $f\,'(x)$ analytisch bekannt ist!

Nullstellen von Polynomen: Division durch (x-a)

Vorgangsweise:
1. Suche einer Nullstelle
2. Abdividieren der Nullstelle (num. Fehlerquelle!)
3. Verfeinerung der Nullstellen

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} c(i) x^{i-1}$$

$$P_{n-2}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(x-a)}$$

$P_{n-1}(x)$

$\downarrow$

$ZS1 = c(n)$

$c(n) = 0$

j=n-1, ... , 1

$ZS2 = c(j)$

$c(j) = ZS1$

$ZS1 = ZS2 + ZS1 \cdot a$

$\downarrow$

$P_{n-2}(x)$

Nullstellen von Polynomen: Eigenwerte einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a_m}{a_{m+1}} & -\frac{a_{m-1}}{a_{m+1}} & \cdots & -\frac{a_2}{a_{m+1}} & -\frac{a_1}{a_{m+1}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \det(A - x\delta_{ij}) = P_n(x)$$

Aufgaben

- Schreiben Sie ein Programm, das die Funktion $5x^4+3x^3-2x^2-7$ von a=-3 bis b=3 integriert
  - mithilfe einer der Summenformeln (Skriptum)
  - mithilfe einer Bibliotheksfunktion (Gauss-Int.)
- Zeichnen Sie die Funktion samt ihrer (numerisch berechneten) Ableitung
- Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion