LVA-Nr: 138.074 Datenverarbeitung für TPH 2 SS2011 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

ÜBUNG 1: Das Pendel

Hintergrund: - Die Untersuchung der Eigenschaften des Pendels zeigt viele Phänomene, die Grundlagen unseres physikalischen Verständnisses sind. In dieser konkreten Übung soll eine Reihe von Eigenschaften eines mathematischen Pendels durch die numerische Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichung gezeigt/verifiziert werden. Man betrachte dabei ein Pendel mit folgenden Parametern:

Länge L=5 mm Masse M=1µg Erdbeschleunigung g=9,80665 m/s^2

Problemstellung: – Lösen Sie die Bewegungsgleichung für ein getriebenes und gedämpftes mathematisches Pendel

$$\ddot{\Theta} + 2\eta\,\dot{\Theta} + \omega_0^2 \sin(\Theta) = f\sin(\Omega t) \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen $\Theta = \Theta_0$ und $\dot{\Theta} = 0$. Außerdem soll für t<0 keine Auslenkung gegeben sein, d.h. $\Theta = 0$ sein. Die Auslenkung des Pendels kann beliebig groß werden, d.h. es können Auslenkungen $|\Theta| > 2\pi$ werden.

Aufgaben: - Folgende Aufgaben sind zu lösen

(1) Schreiben Sie die Differentialgleichung in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung um.

(2) Schreiben Sie ein Programm auf der Basis des Runge-Kutta-Algorithmus zur Lösung der Differentialgleichung (1). Das Programm sollte M, L, Θ_0 sowie η, f, Ω einlesen. Testen Sie das Programm auf seine Richtigkeit durch Vergleich mit bekannten Lösungen.

(3) Berechnen Sie das Spektrum der Pendelschwingung (Frequenzanalyse) für
(a) freies Pendel mit verschiedenen Auslenkungen Θ_0 zwischen 0 und π.
(b) gedämpftes Pendel mit Θ_0=1.0 und verschiedenen η-Werten zwischen 0.5 und 50 s^{-1}.
(c) getriebenes und gedämpftes Pendel mit Θ_0=1.0, η=0, Ω=20 und verschiedenen f-Werten.
Stellen Sie die Zustände im Phasenraum und das Frequenzspektrum mittels gnuplot dar.

(4) Verifizieren Sie die Weylsche Regel für das nicht gedämpfte freie linearisierte Pendel. Wählen Sie die Anfangswerte $\theta(t=0)$ und $\dot{\theta}(t=0)$ derart, sodass die Energie $E=h\omega_0/(4\pi)$ entspricht. Berechnen Sie den entsprechenden numerischen Wert für das Phasenraumvolumen. Aufgrund der Unschärferelation sollte dies dem Wert $h/2$ entsprechen.

Hinweise:

Das Programm in (2) soll die Integration für beliebige (vorgegebene) Zeitspannen [0,T] erlauben.

Für die notwendigen Integrationen in (3) und (4) kann die Trapezregel verwendet werden.

Erforderliche universellen Konstanten: h=6.626076 10^{-34} Js = 4,135669 10^{-15} eVs