Fourieranalyse

Ziel: Zerlegung einer beliebigen Funktion in Summe von sin- und cos-Funktionen

Methode: $e^{i\omega t}$ bilden ein vollständiges, orthonormales Basisystem → Zerlegung in Basisfunktionen eines Vektorraumes

$$b_n \circ b_m = \int_0^T \overline{b_n}(t) \cdot b_m(t)\, dt = \int_0^T e^{-in\omega t} e^{im\omega t}\, dt = \int_0^T e^{i(m-n)\omega t}\, dt = \begin{cases} T & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_n c_n b_n \qquad c_n = b_n \circ f = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-in\omega t}\, dt$$

Fourieranalyse

→ Zerlegung für periodische Signale (Periode *T*):

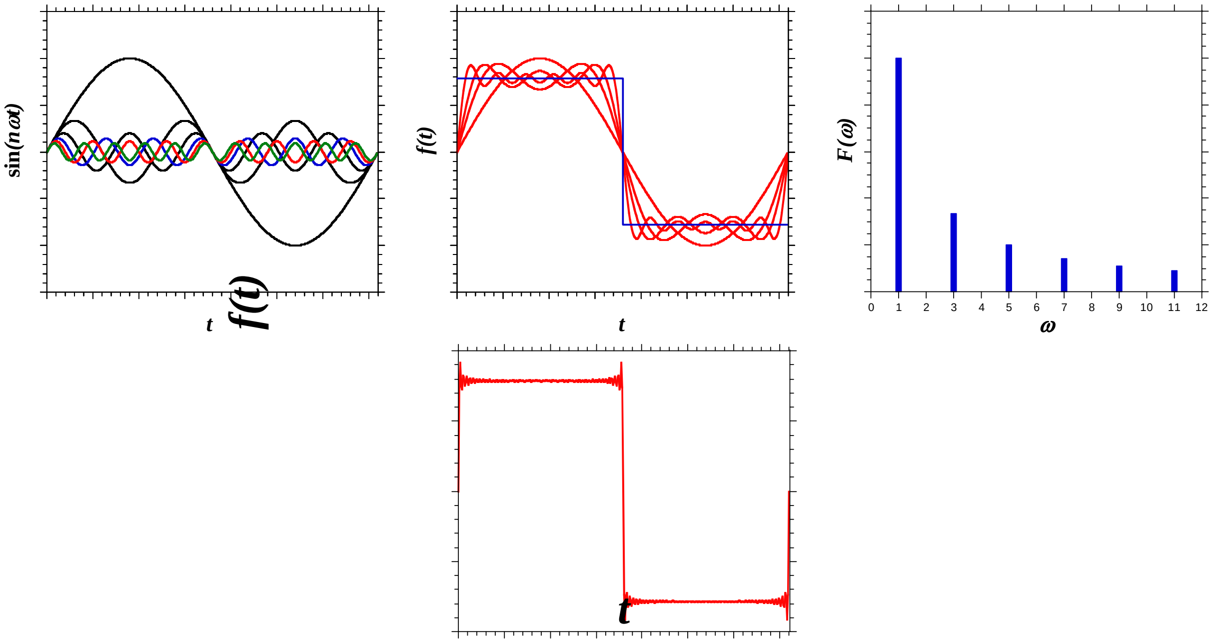
$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{c_n}{\sqrt{T}} e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{e^{in\omega t}}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-in\omega t}\, dt}$$

Zerlegung für aperiodische Signale (Fouriertransformation):

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t}\, d\omega \\ F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt \end{aligned}}$$

Beispiel: Rechtecksignal

$$f(t) = \begin{cases} U & 0 \le t \le T/2 \\ -U & T/2 \le t \le T \end{cases} = \frac{4U}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right)$$



Programm:

1. Schleife für ω, Abschätzung für passendes $\Delta\omega$:
   - Zeitabstand zwischen zwei Datenpunkten Δt
   - Anzahl der Datenpunkte N
   - $\Delta\omega = 2\pi/N\Delta t$
2. Integration über t bei festgehaltenem ω
3. Abschätzung für oberes Ende des Frequenzbereichs:
   - „Dauer“ des steilsten Anstiegs → $\Delta\tau$
   - $\omega_{\max} \approx 2\pi/\Delta\tau$

allgemein: Zerlegung in Basisfunktionen

- jedes System vollständiger, orthonormierbarer Basisfunktionen $F(x)$ geeignet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n F_n(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\int w(x) f(x) F_n(x) dx \right) F_n(x)$$

$$\int w(x) F_m(x) F_n(x) dx = \delta_{mn}$$

χ^2-Anpassung

http://www.library.cornell.edu/nr
http://lib-www.lanl.gov/numerical/index.html

Worum es bei einer χ^2-Anpassung NICHT geht:

- Meßpunkte durch eine möglichst glatte Kurve verbinden (Interpolation)
- eine möglichst glatte Kurve durch Datenpunkte legen (graphische Aufbereitung)

beide Methoden erlauben keine Aussage über physikalischen Prozeß

Aus theoretischen Überlegungen folgt eine Fitfunktion zur Erklärung der gemessenen Datenpunkte (x_i, y_i):

$$y(x) = y(x; a_1, a_2, \ldots, a_3)$$

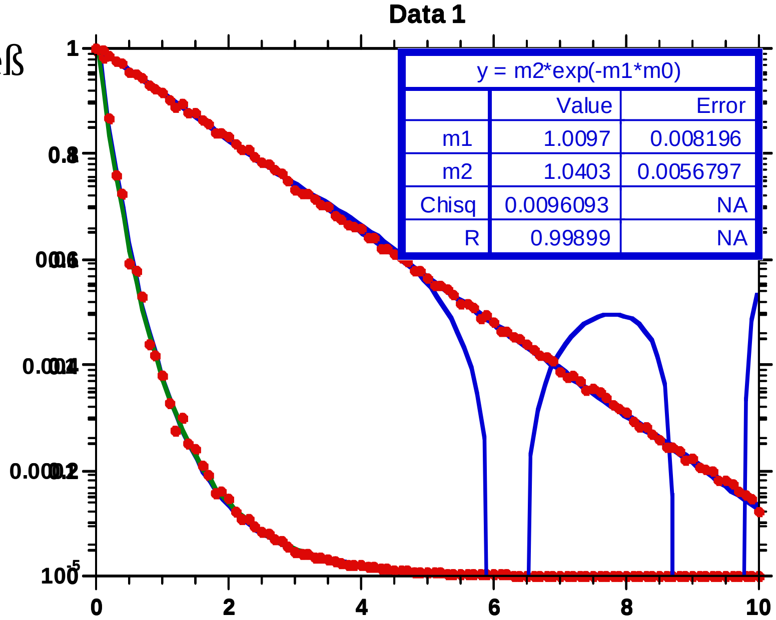
Was sollte eine χ^2-Anpassung liefern:

1. die Fitparameter a_i
2. eine Abschätzung des Fehlers für jeden Parameter
3. eine Abschätzung der Qualität der Fitfunktion

Beispiel: Zerfallsprozeß

1. Versuch:
   Polynomfit
2. Versuch:
   Exponentialfit

Entscheidung:
   Lin-Log-plot



Begriffsbestimmung:

- lineares Anpassungsproblem : Fitfunktion ist linear in den a_i

$$f(x) = \sum_i a_i X_i(x)$$

z.B.: $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$$f(t) = \sum_i a_i \sin(\omega_i t)$$

- nichtlineares Anpassungsproblem

$$f(x) = \sum_i a_i X_i(a_j x)$$

z.B.: $f(x) = a_1 \cdot \exp[-a_2 x] + a_3 \cdot \exp[-a_4 x]$

Umformulierung der Frage:
Wie wahrscheinlich treffe ich im vieldimensionalen Parameterraum auf eine „gute" Parameterkombination?

sehr viele Messungen ergeben immer leicht unterschiedliche Parameterkombinationen → Dichteverteilung $\rho(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Maximierung von ρ liefert gesuchte Parameter

Problem kann in lineares Gleichungssystem verwandelt werden.

Aufgaben

- Führen Sie eine Fourieranalyse des Datensatzes in der Datei `Daten1` durch, die Sie im Verzeichnis `/home/EDV2/Unterlagen` finden.
- Wiederholen Sie die Analyse mithilfe einer Bibliotheksfunktion.
- (Bonuspunkte) Die Daten in der Datei `Daten2` können durch die Funktion

$$f(x) = a_1 \cdot \exp(-a_2 x) + a_3 \cdot \exp(-a_4 x)$$

gefittet werden. Finden Sie die Koeffizienten a_i.