

# DATENVERARBEITUNG FÜR TPH II

LVA Nr. 138.074

Methoden zur numerischen Lösung  
gewöhnlicher Differentialgleichungen

Teil 1

H. Leeb



Gegenstand dieser Vorlesung und den beiden zugehörigen Übungseinheiten sind die grundlegenden Verfahren zur numerischen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

- (1) Einschrittverfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung
- (2) Konsistenz und Konvergenz von Lösungsalgorithmen
- (3) Runge-Kutta-Verfahren
- (4) Rundungsfehler
- (5) Das Numerov-Verfahren
- (6) Mehrschrittverfahren (Korrektor- und Prediktorverfahren)
- (7) Extrapolationsverfahren

## Anwendungen:

- Das Pendel (Übung 1)
- Transmission und Reflexion am eindimensionalen Potentialwall
- Bindungszustände in einem Zentralpotential (Übung 2)
- Streulösungen der radialen Schrödingergleichung

Die Konstruktion von Einschrittverfahren zur Lösung von

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit} \quad y(x = a) = y_a$$

geht von der Differenzierbarkeit der Lösung aus. Es kann dann eine Reihenentwicklung in der Schrittweite angesetzt werden

$$y(x + h) = \sum_{k=0}^m \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(x + \vartheta h) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \vartheta \leq 1$$

Die Ableitungen lassen sich durch  $f(x, y)$  ausdrücken:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = f_{xx} + 2f_{xy} f + 2f_{yy} f^2 + f_y^2 f$$

Die numerische Lösung im Intervall  $[a,b]$  erfolgt auf einem Gitter von Stützpunkten  $x_i, i=0,1, \dots, N$  mit  $x_0=a, x_N=b$ , welche bei einem Einschrittverfahren nicht notwendigerweise äquidistant sein müssen. Die Schrittweite ist  $h$  bzw.  $h_i=x_{i+1}-x_i$

## Explizites Einschrittverfahren:

Aus der Kenntnis der Lösung  $y^h(x_i)$  läßt sich direkt der Wert an der nächsten Stützstelle  $y^h(x_{i+1})$  berechnen [ $x_i, x_{i+1}$  sind Stützstellen,  $h=x_{i+1}-x_i$  Schrittweite]

$$y^h(x_{i+1}) = y^h(x_i) + h \Phi(x_i, y^h(x_i); h) \text{ mit } y^h(x_0) = y_a$$

Die Funktion  $\Phi(x,y;h)$  ist charakteristisch für das verwendete Einschrittverfahren

Das Polygonzug- oder Euler-Verfahren ist das einfachste Einschrittverfahren, welches bei  $m=1$  abbricht, d.h.

$$y_{i+1}^h = y_i^h + hf(x_i, y_i^h) \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{d.h. } \Phi(x, y; h) = f(x, y)$$

Sei  $z(x)$  die exakte Lösung der Differentialgleichung  $y'=f(x,y)$ , dann gilt:

$$z(x+h) = z(x) + hz'(x) + \frac{h}{2} z''(x) + \dots$$

$$\Delta(x, y; h) = \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = z'(x) + \frac{h}{2} z''(x) + \dots = f(x, y) + \frac{h}{2} z''(x) + \dots$$

$$\tau(x, y; h) = \Delta(x, y; h) - \Phi(x, y; h) = \frac{h}{2} z''(x) + \dots = o(h)$$

Das Euler-Verfahren  
ist konsistent in  
1. Ordnung

Konsistenz eines Einschrittverfahrens: Ein Einschrittverfahren heißt konsistent in  $p$ . Ordnung, wenn  $\Phi(x, y; h)$  die folgende Eigenschaft erfüllt

$$\tau(x, y; h) = \Delta(x, y; h) - \Phi(x, y; h) = o(h^p) \quad h \rightarrow 0$$

Ein Einschrittverfahren heisst an der Stelle  $x \in [a,b]$  konvergent von Ordnung  $p > 0$  falls gilt

$$y_i^h - z(x_i) = o(h^p) \text{ für } h \rightarrow 0, \forall j = 0, 1, \dots, N$$

Konvergenz bezieht sich auf Lösung :

$$\tau(x, z; h) = y_i^h - z(x_i) = o(h^p)$$

Konsistenz bezieht sich auf Einschrittfunktion :

$$\Delta(x, y; h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y; h) = o(h^p)$$

Für eine Einzeldifferentialgleichung  $y' = f(x, y)$  sei ein Einschrittverfahren  $\Phi(x, y; h)$  definiert:

- a) Die Einschrittfunktion  $\Phi(x, y; h)$  ist stetig bezüglich aller Veränderlicher  $x, y$  und  $h$
- b) Das Verfahren sei konsistent von Ordnung  $p > 0$
- c) Die Funktion  $\Phi(x, y; h)$  erfülle bezüglich  $y$  eine Lipschitzbedingung

so folgt: das Einschrittverfahren ist konvergent von der Ordnung  $p$

Beispiel: Konstruktion eines Verfahrens 2. Ordnung für die gewöhnliche Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$

$$\Phi(x, y; h) = a_1 f(x, y) + a_2 f(x + p_1 h, y + p_2 h f(x, y))$$

Entwicklung von  $\Phi$  nach  $h$  liefert:

$$\Phi(x, y; h) = \boxed{a_1 f(x, y) + a_2 f(x, y)} \quad f(x, y) \rightarrow a_1 + a_2 = 1$$

$$+ a_2 h \left[ p_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + p_2 \frac{dy}{dx} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right]$$

$$\boxed{y''/2} \rightarrow a_2 p_1 = a_2 p_2 = 1/2$$

## Einschrittverfahren zweiter Ordnung:

Verfahren von Heun:  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \quad p_1 = p_2 = 1$

$$\Phi(x, y; h) = \frac{1}{2} [f(x, y) + f(x + h, y + hf(x, y))]$$

Modifiziertes Euler Verfahren:  $a_1 = 0; \quad a_2 = 1; \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

$$\Phi(x, y; h) = f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hf(x, y)\right)$$

## Einschrittverfahren vierter Ordnung:

Runge-Kutta-Verfahren: mit fester Schrittweite  
mit Schrittweitenanpassung



Verfahren vierter Ordnung:  $m = 4$

$$y' = f(x, y) \rightarrow \Phi(x, y; h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5)$$

mit  $k_1 = f(x, y)$

$$k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x + h, y + hk_3)$$

Genauigkeit der Lösung sollte laufend kontrolliert werden

Einschrittverfahren: Genauigkeit lässt sich über Schrittweite kontrollieren.

bei starker Änderung der Lösung → kleine Schrittweite

bei geringer Änderung der Lösung → große Schrittweite

Effizienzsteigerung von 100 und mehr möglich

Information über Güte zur Festlegung der Schrittweite: Verdopplung der Schritte

$$y(x+2h) = y_1(x) + (2h)^5 \phi + O(h^6) + \dots$$

$y_1$  Num. Wert mit  $2h$

$$y(x+2h) = y_2(x) + 2(h)^5 \phi + O(h^6) + \dots$$

$y_2$  Num. Wert mit  $h$

Differenz der beiden Lösungen:  $\Delta = y_2 - y_1 = 30h^5 \phi + O(h^6)$

Bedingung für Schrittweitenanpassung:

$D > \text{acc}$  → Verkleinern der Schrittweite

$D > \text{acc}$  → ausreichende Genauigkeit erzielt

Eingebettete Runge-Kutta-Formeln von Fehlberg:

(a) Verfahren 5. Ordnung mit 6 Funktionsaufrufen

mit  $k_i = h f\left(x_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right) \quad j = 1, \dots, 6$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^6 c_i k_i + O(h^6)$$

(b) Verfahren 4. Ordnung mit gleichen Funktionsaufrufen  $\tilde{y}_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^6 \tilde{c}_i k_i + O(h^6)$

$i$	$a_i$	$b_{ij}$					$c_i$	$\tilde{c}_i$
1	0						$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$

Parameter von J.R. Cash und A.H. Karp,  
ACM Trans. Math. Software **16**, 201 (1990)

Bedingung für Schrittweitenanpassung:

$$\Delta = y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^6 (c_j - \tilde{c}_j) k_j = \begin{cases} < acc \\ > acc \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Genauigkeit ausreichend} \\ \text{verkleinern der Schrittweite} \end{array}$$

## Fehlerquellen:

- Unsicherheit der Eingabedaten
- Algorithmenfehler (Abbrechfehler)
- Rundungsfehler

Numerische Lösung:  $\tilde{\eta}_{i+1} = \tilde{\eta}_i + h\Phi(x_i, \tilde{\eta}_i; h) + \varepsilon_{i+1}$

gesamter Rundungsfehler

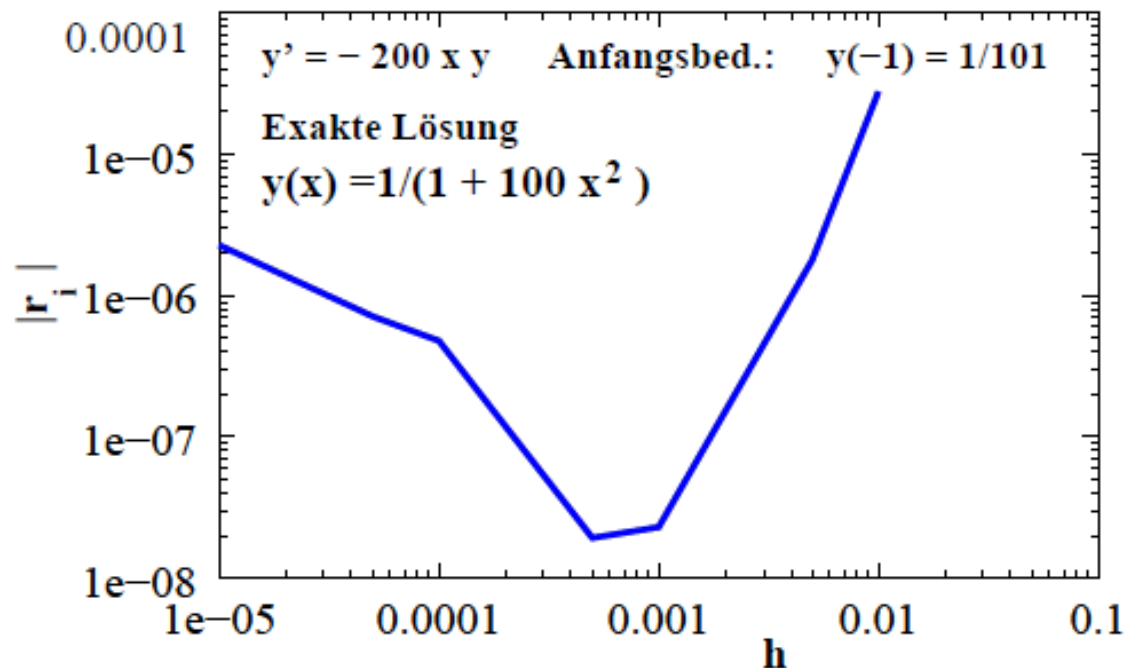
Exakte Lösung:  $z(x_{i+1}) = z(x_i) + h\Phi(x_i, z_i; h) + O(h^{p+1})$

Differenzbildung: 
$$r_{i+1} = \tilde{\eta}_{i+1} - z(x_{i+1})$$
$$= \underbrace{\tilde{\eta}_i - z(x_i)}_{r_i} + h[\Phi(x_i, \tilde{\eta}_i; h) - \Phi(x_i, z_i; h)] + \varepsilon_{i+1} + O(h^{p+1})$$

Unter der Annahme einer Lipschitzbedingung für  $\Phi$  erhält man die Abschätzung

$$|r_{i+1}| \leq |r_i| + hL|r_i| + |\varepsilon_{i+1}| + Mh^{p+1}$$

$$|r_i| \leq \left[ Mh^p + \frac{|\varepsilon_i|}{h} \right] \frac{e^{iM(x_e - x_a)} - 1}{L}$$



Typische Form des Gesamtfehlers bei der Lösung einer  
Gewöhnlichen Differentialgleichung

Im allgemeinen führt man Differentialgleichungen höherer Ordnung zuerst auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

Wir betrachten die allgemeine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$$

Definiert man nun:

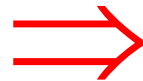
$$z_1(x) = y(x)$$

$$z_2(x) = y'(x)$$

$$z_3(x) = y''(x)$$

$$\vdots$$

$$z_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$



$$z_1'(x) = z_2(x)$$

$$z_2'(x) = z_3(x)$$

$$z_3'(x) = z_4(x)$$

$$\vdots$$

$$z_n'(x) = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) \quad \text{bzw. autonomes System} \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z})$$

Taylorreihenentwicklung:  $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$\mathbf{z}(x + h) = \sum_{k=0}^m \frac{h^k}{k!} \mathbf{z}^{(k)}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \mathbf{z}^{(m+1)}(x + \varepsilon h)$$

Ersetzen der Ableitungen durch Ausdrücke mit  $\mathbf{f}(t, \mathbf{z})$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) , \quad \ddot{\mathbf{z}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f} + \sum_i \frac{dz_i}{dt} \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{f} , \quad \dddot{\mathbf{z}} = \dots$$

Führt zu verschiedenen Verfahren: z.B.  $m=1$ , Eulerverfahren

allgemein:

$$\mathbf{z}(x+h) = \mathbf{z}(x) + h \Phi(x, \mathbf{z}(x); h)$$

Schrittweite  $h$  ist evtl. veränderlich

charakteristisch für Einschrittverfahren

m=1 Euler- oder Polygonzugverfahren

$$\Phi(x, \mathbf{z}(x); h) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z})$$

m=2 Verfahren nach Heun und modifiziertes Eulerverfahren

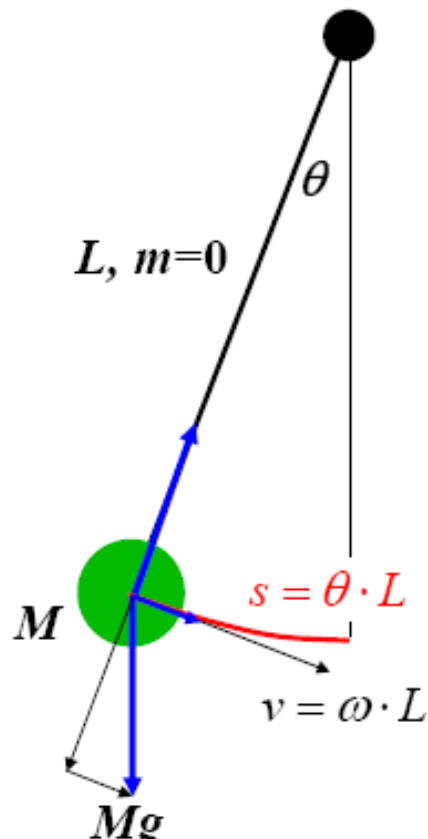
m=4 Verfahren nach Runge-Kutta

.....



Die Physik des mathematischen Pendels zeigt eine Vielfalt von Phänomene, die mit fundamentalen Konzepten der modernen Physik zusammenhängen. Die numerische Behandlung eröffnet die Möglichkeit auch komplexere Verhalten, z.B. den Übergang in chaotische Bewegung aufzuzeigen. Folgende Fragestellungen werden behandelt:

- Lösung der Bewegungsgleichung
- Darstellung im Phasenraum
- Phasenraumvolumen der Zustände
- Frequenzspektrum des freien, gedämpften und getriebenen Pendels



- masseloser Stab, Länge  $L$
- punktförmige Pendelmasse  $M$
- ideale Aufhängung (keine Reibung)

→ nur zwei Kräfte:

- Schwerkraft
- Kraft, die vom Stab ausgeübt wird  
(Stab kompensiert Teil der Schwerkraft)

Bogenlänge:  $s = \theta \cdot L$

Geschwindigkeit:  $v = \dot{\theta} \cdot L = \omega \cdot L$

Beschleunigung:  $a = \ddot{\theta} \cdot L = \dot{\omega} \cdot L$

→ **Newton'sche Bewegungsgleichung**

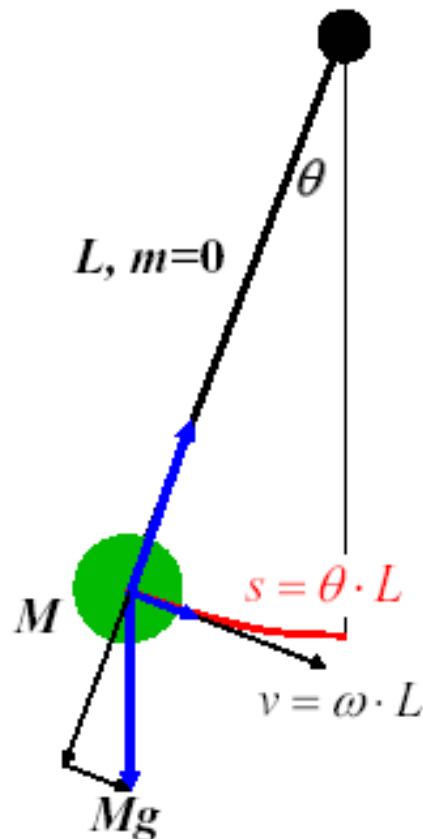
$$\rightarrow F = Ma = ML\ddot{\theta} = -Mg \sin(\theta)$$

# Bewegungsgleichung des Pendels

Bewegungsgleichung:

$$F = Ma = ML\ddot{\Theta} = -Mg \sin(\Theta)$$

$$\Rightarrow \ddot{\Theta} = -\omega_0^2 \sin(\Theta) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}$$



Definition eines  
Variablenvektors:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta(t) \\ \dot{\Theta}(t) \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\omega_0^2 \sin(z_1) \end{pmatrix}$$

„autonomes Systems“, da die Zeit (unabhängige Variable) nicht explizit in der rechten Seite auftritt

Einschränkung auf linearisierte Bewegungsgleichung: (für kleine Auslenkung  $\sin(\Theta) \approx \Theta$ )

$$ML\ddot{\Theta} + \gamma L\dot{\Theta} + Mg\Theta = 0 \Rightarrow \ddot{\Theta} + \frac{\gamma}{M}\dot{\Theta} + \frac{g}{L}\Theta = 0$$

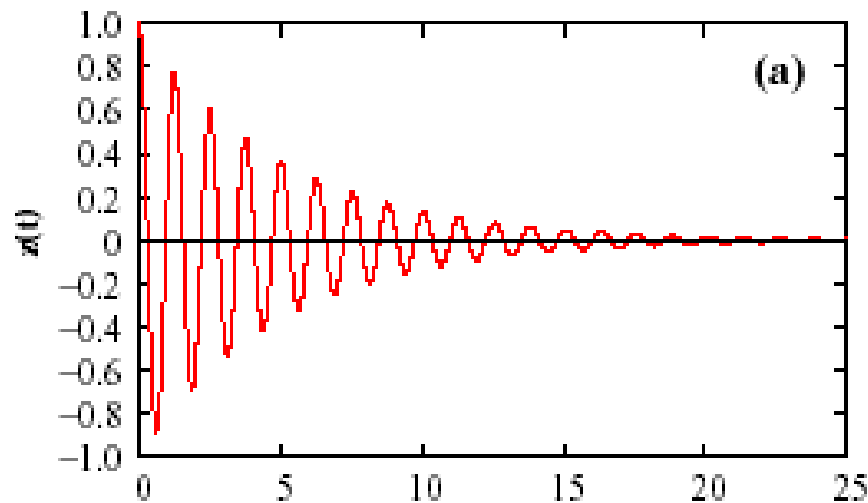
mit  $\tau \equiv \frac{M}{\gamma}$  und  $\omega_0^2 \equiv \frac{g}{L} \Rightarrow \ddot{\Theta} + \frac{1}{\tau}\dot{\Theta} + \omega_0^2\Theta = 0$

Lösung

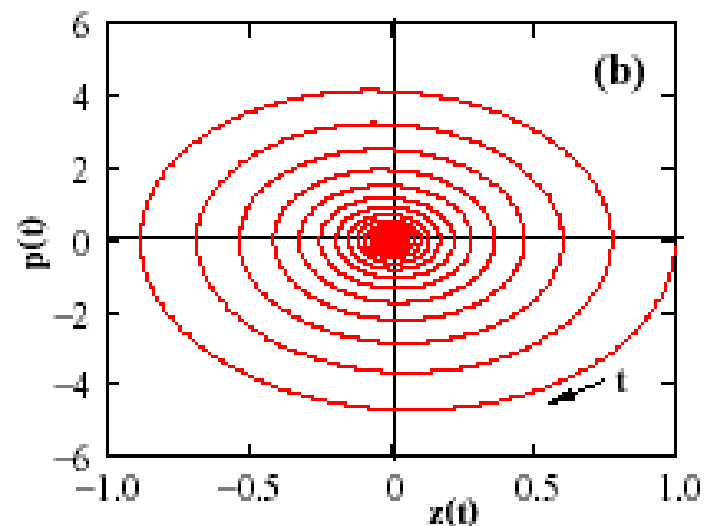
$$\Theta(t) = A e^{-\eta t} \sin(\omega t + \alpha)$$

mit  $\eta = \frac{1}{2\tau}$  und  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2}$

## Zeitliche Bewegung



## Phasenraum



Bei schwacher Dämpfung:

$$\omega_0 \tau \gg 1 \quad \Theta(t) \approx \Theta_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Darstellung der Energie als Funktion von verallgemeinerten Orts- und Impulskoordinaten

$$H(q_i, p_i) = T + V \rightarrow E; \quad i = 1, \dots, M$$

Dynamik des Systems beschrieben durch Hamilton-Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad i = 1, \dots, M$$

„konservatives System“: keine explizite Zeitabhängigkeit in  $H$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 &\rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t} = \dot{q}\dot{p} - \dot{p}\dot{q} = 0 \\ &\rightarrow H = \text{const} = E \Rightarrow \text{Energieerhaltung} \end{aligned}$$

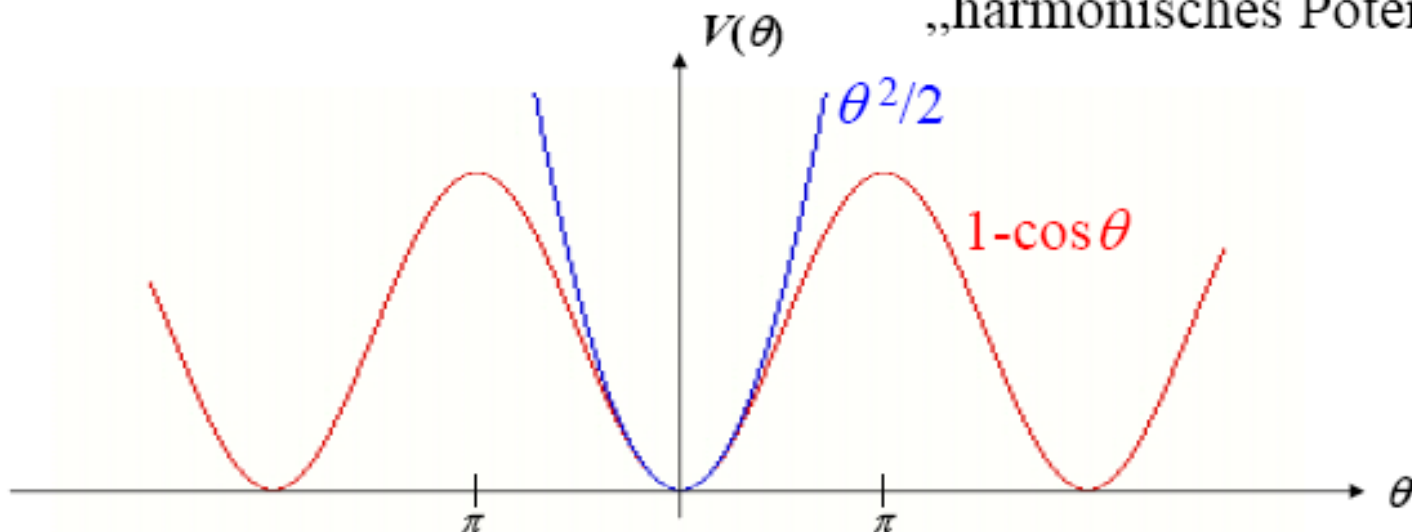
$H = T + V = E = \text{konstant} \leftarrow$  konservatives System

$$= \frac{Mv^2}{2} + Mgz = \frac{1}{2} M (L\dot{\Theta})^2 + MgL(1 - \cos \Theta)$$

$$= \frac{1}{2} ML^2 \dot{\Theta}^2 + 2MgL \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \approx \frac{1}{2} ML^2 \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} M\omega_0^2 L^2 \Theta^2$$



„harmonisches Potential“



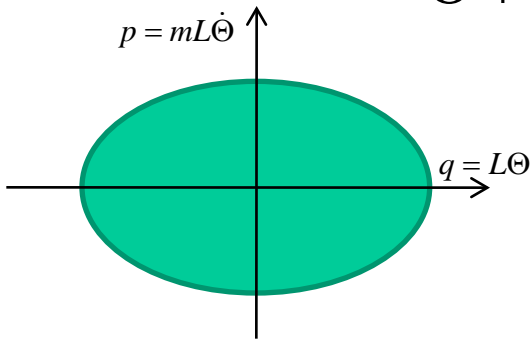
Ungedämpftes linearisiertes Pendel = Harmonischer Oszillator

$$\ddot{\Theta} + \omega_0^2 \Theta = 0 \Leftrightarrow H = \frac{1}{2} M (L\dot{\Theta})^2 + \frac{1}{2} M \omega_0^2 (L\Theta)^2$$

Energieeigenwerte des HO:  $E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right)$

Phasenraumfläche = Phasenraumvolumen in d=1

$$I(E) = \oint p(q, E) dq$$



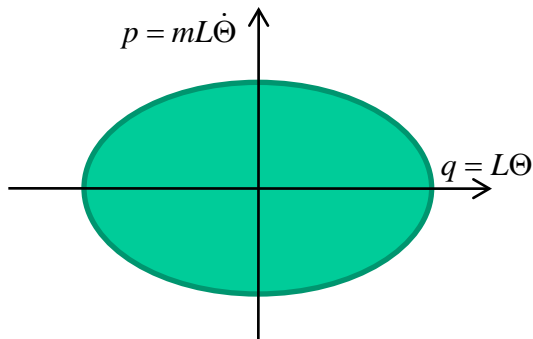
Fläche einer Ellipse:  $A = a b \pi$   
Halbachsen  $a, b$

Halbachsen des  
harmonischen  
Oszillators im  
Phasenraum

$$\left. \begin{aligned} p_{\max} &= ML\dot{\Theta}_{\max} = \sqrt{2ME} \\ q_{\max} &= L\Theta_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{M\omega_0^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = p_{\max} q_{\max} \pi = 2\pi \frac{E}{\omega_0}$$



$$\ddot{\Theta} + \omega_0^2 \Theta = 0 \Leftrightarrow H = \frac{1}{2} M (L\dot{\Theta})^2 + \frac{1}{2} M \omega_0^2 (L\Theta)^2$$



Quantenmechanik

Energieeigenwerte des HO:

$$E_n = \hbar \omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

Phasenraumfläche = Phasenraumvolumen in d=1

$$I(E_n) = \oint p(q, E_n) dq = 2\pi \frac{E_n}{\omega_0} = h \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

**Weylsche Regel:**

Für Quantenzustand mit Energie  $E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0$   $n = 0, 1, 2, \dots$

→ Phasenraumvolumen  $I(E_n) = \left( n + \frac{1}{2} \right) h$

Anzahl der Quantenzustände bis zur Energie  $E = \frac{I(E)}{h} + \frac{1}{2} \approx \frac{I(E)}{h}$  für  $E \gg E_0$

Analyse der Schwingung in Frequenzanteile ist meist von Interesse

Fouriertransformation:  $\tilde{\Theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \Theta(t) e^{i\omega t}$

Ungedämpftes Pendel:

$$\Theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \text{ für } t \in ]-\infty, +\infty[ \Rightarrow \tilde{\Theta}(\omega) = i\pi A [e^{-i\alpha} \delta(\omega - \omega_0) - e^{i\alpha} \delta(\omega + \omega_0)]$$

alternative Randbedingung

$$\Theta(t) = \begin{cases} A \sin(\omega_0 t + \alpha) & \text{für } t \in ]0, +\infty[ \\ 0 & \text{für } t \in ]-\infty, 0[ \end{cases} \Rightarrow \tilde{\Theta}(\omega) = i \frac{\pi}{2} A [e^{-i\alpha} \delta(\omega - \omega_0) - e^{i\alpha} \delta(\omega + \omega_0)]$$

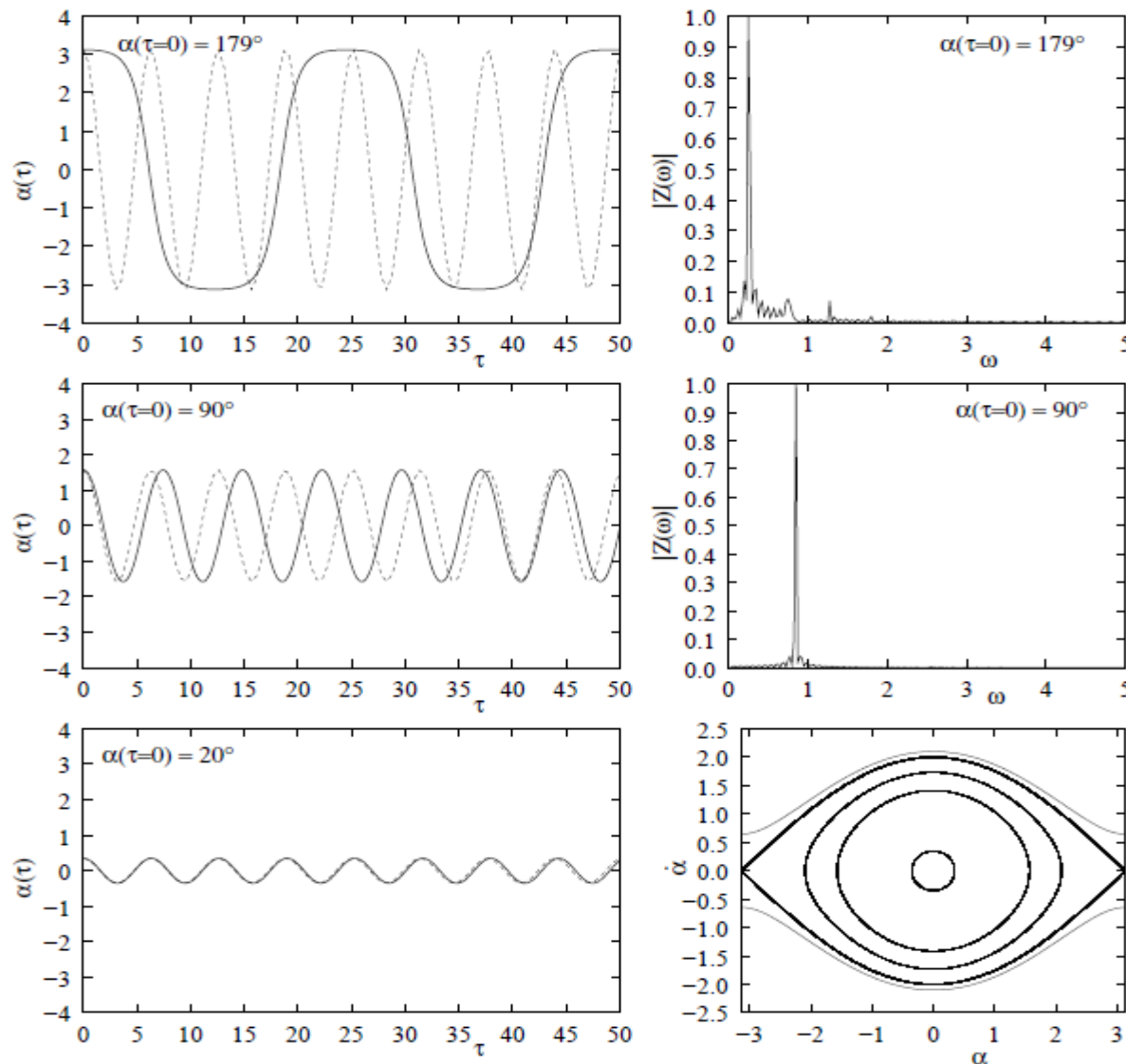
unter Verwendung von  $\int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}$

Gedämpftes Pendel ( $\Theta=0$  für  $t<0$ ) mit  $\eta = 1/2\tau$  und  $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \eta^2}$  :

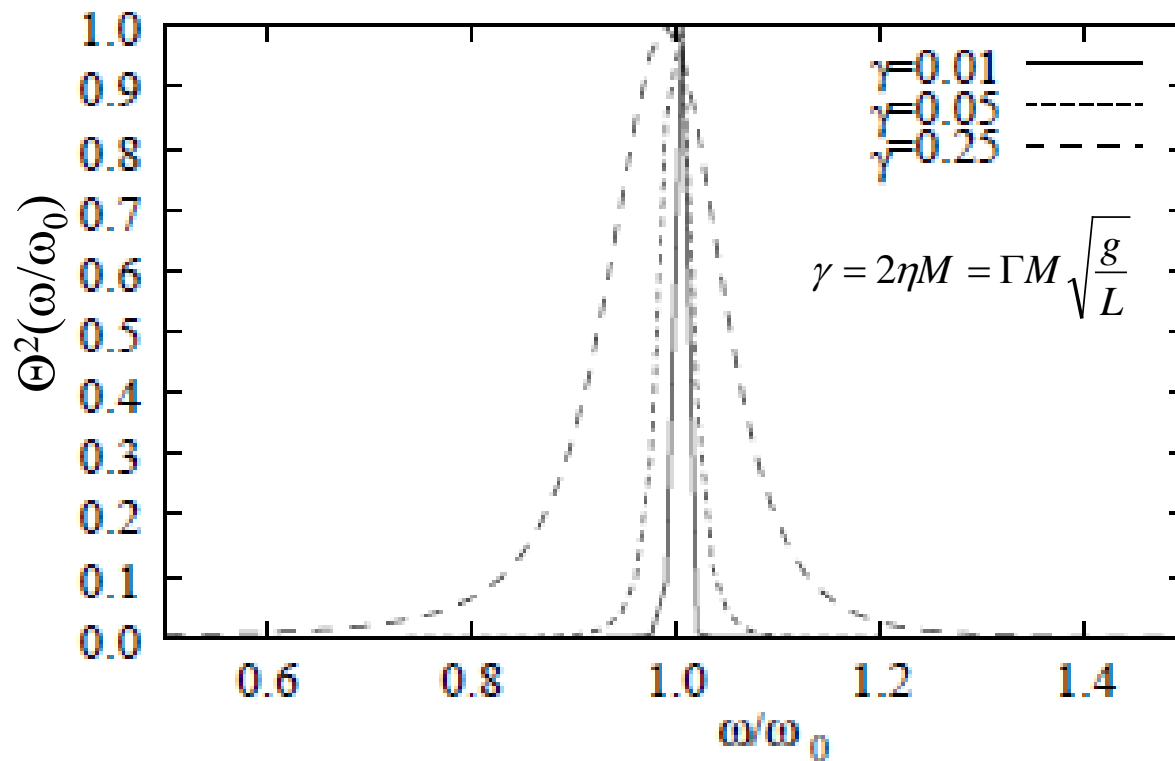
$$\Theta(t) = A e^{-\eta t} \sin(\bar{\omega} t + \alpha) \text{ für } t \in ]0, +\infty[ \Rightarrow \tilde{\Theta}(\omega) = \frac{A}{2} \left[ \frac{e^{i\alpha}}{(\omega + \bar{\omega}) + i\eta} - \frac{e^{-i\alpha}}{(\omega - \bar{\omega}) + i\eta} \right]$$

Fouriertransformation für reelwertige Funktionen  $\tilde{\Theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \Theta(t) \cos(\omega t)$

# Beispiel – freies ungedämpftes Pendel



Abhängigkeit von  
der Amplitude der  
Auslenkung  $\ominus$



Frequenzspektren des gedämpften Pendels für verschiedene Dämpfungsstärken  $\gamma=0.01, 0.05$  und  $0.025 \text{ N/ms}^{-1}$

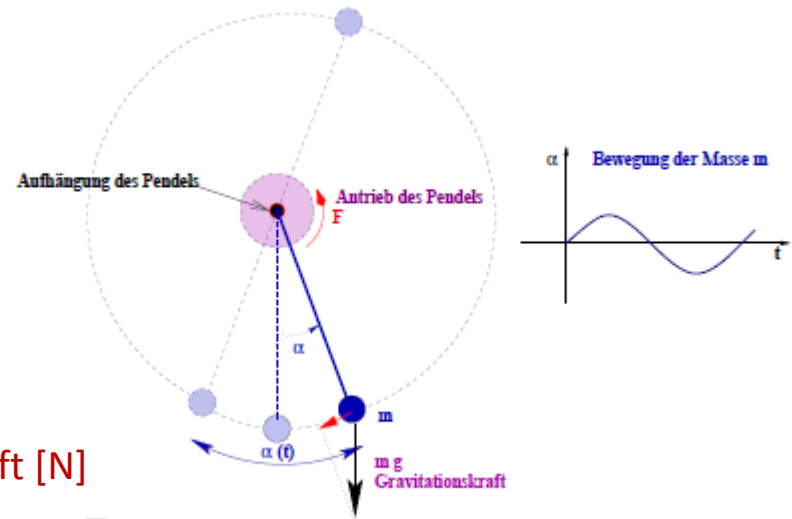
# Das getriebene Pendel

Annahme:  
Pendel kann beliebig durchdrehen  
(Schwingung über 180°)

## Bewegungsgleichung

$$ML\ddot{\alpha} + 2\eta ML\dot{\alpha} + Mg\alpha = F \sin(\Omega t + \beta) \quad \text{Dimension: Kraft [N]}$$

$$\ddot{\alpha} + 2\eta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = f \sin(\Omega t + \beta) \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L} \quad \text{und} \quad f = \frac{F}{ML} \quad \text{Dimension: Zeit}^{-2} [\text{s}^{-2}]$$



Transformation auf dimensionslose Parameter für Studien oft nützlich

$$t_0 = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad \sigma = \frac{t}{t_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\Theta}{d\sigma^2} + \Gamma \frac{d\Theta}{d\sigma} + \sin(\Theta) = d \sin\left(\frac{\Omega}{\omega_0} \sigma + \beta\right)$$

$$\text{mit } \Gamma = 2\frac{\eta}{\omega_0} = 2\eta\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{und} \quad d = \frac{f}{\omega_0^2} = f \frac{L}{g} = \frac{F}{Mg}$$

# Beispiel – getriebenes Pendel

Treiberfrequenz  $\Omega = 3.2$  Hz

Antriebskraft 2 und 7 N

