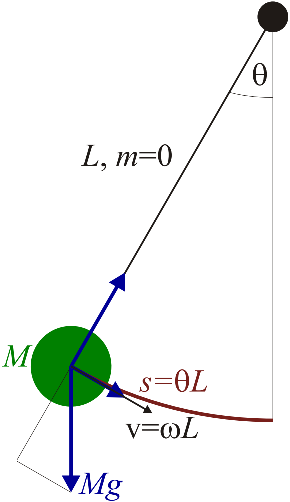
EDV2: Pendel - autonome Systeme

10. Juni 2008

Inhalt

Pendel – Bewegungsgleichung



- masseloser Stab, Länge L
- punktförmige Pendelmasse M
- ideale Aufhängung (keine Reibung)
- nur zwei wirkende Kräfte:
  Schwerkraft
  Kraft, die vom Stab ausgeübt wird
  (Stab kompensiert einen Teil der Schwerkraft)

Bogenlänge	$s = \theta L$
Geschwindigkeit	$v = \dot{\theta} L = \omega L$
Beschleunigung	$a = \ddot{\theta} L = \dot{\omega} L$

Newtonsche Bewegungsgleichung

$$F = Ma = ML\ddot{\theta} = -Mg \sin\theta$$

Linearisierung der Bewegungsgleichung

$F = Ma = ML\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta = -\frac{g}{L}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{g}{L}\cdot\theta \equiv -\omega_0^2\cdot\theta$$

Lösung: $\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Gilt nur für kleine Auslenkungen!

θ	ω_0/ω
0°	1
10°	1.0019
20°	1.0077
45°	1.0396
60°	1.0719

Alternative Herleitung über Energieerhaltung

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + E_{pot} = const. \\ &= \tfrac{1}{2}Mv^2 + Mgh \\ &= \tfrac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + MgL(1-\cos\theta) \\ &\approx \tfrac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}MgL\theta^2 \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_0\sqrt{\frac{2E}{MgL} - \theta^2}$$

Umkehrpunkte: $E = \frac{1}{2}MgL\theta_0^2 \rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_0\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}$

$$\int_{\theta_1=\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}} = \arcsin\left(\frac{\theta(t)}{\theta_0}\right) - \arcsin\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) = \int_0^t \omega_0 \mathrm{d}t = \omega_0 t$$

$\rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad \varphi = \arcsin\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_0}\right)$

Der Phasenraum

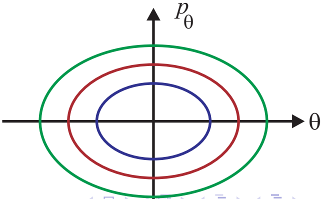
Darstellung der Energie als Funktion von verallgemeinerten Orts- und Impulskoordinaten.
Dynamik des Systems durch Hamilton-Gleichungen beschrieben

$$H(q,p) = E\,, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}\,, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Phasenraum der linearisierten Pendelbewegung

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2ML^2} + \frac{1}{2}M\omega_0^2 L^2 \theta^2 = E\,, \quad q = \theta\,, \quad p_\theta = ML^2\dot{\theta}$$

Ellipsen mit $a = \theta^{max} = \sqrt{\frac{2E}{M\omega_0^2 L^2}}$
und $b = p_\theta^{max} = \sqrt{2ML^2 E}$
Ellipsen mit $E_1 < E_2 < E_3 = const.$



Das gedämpfte Pendel

linearisierte Bewegungsgleichung: $ML\ddot{\theta} + \gamma L\dot{\theta} + Mg\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{\tau_\gamma}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0\,, \quad \tau_\gamma = \frac{M}{\gamma}$$

Ansatz: $\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Lösung: $\beta = \dfrac{1}{2\tau_\gamma}\,, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2\tau_\gamma\omega_0}\right)^2}$

schwache Dämpfung $(\omega_0\tau_\gamma \gg 1)$: $\theta(t) \approx \theta_0 \cdot e^{-t/2\tau_\gamma} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Güte: $Q = \dfrac{2\pi \times \textit{gespeicherte Energie}}{\textit{Energieverlust in einer Periode}}$

$\omega_0\tau_\gamma \gg 1$: $\quad Q \approx \dfrac{2\pi E}{E\Delta t/\tau_\gamma} = \dfrac{E}{E/\omega\tau_\gamma} \approx \omega_0\tau_\gamma \quad (\,E(t) \propto \theta_0^2 \exp(-t/\tau_\gamma)\,)$

Getriebenes und gedämpftes Pendel („allgemeiner Fall“)

$$ML\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma L\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} + Mg\sin\theta(t) = a\sin(\Omega t + \phi)$$

oft: Transformation auf „Eigenzeit“ (t in Einheiten von $t_0 = 1/\omega_0$)

$$\tau = \frac{t}{t_0} = \omega_0 t = t\sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_0\frac{\mathrm{d}\theta(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}\theta(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + \sin\theta(\tau) = A\sin(\tau\tilde{\Omega} + \phi)$$

$$\Gamma = \frac{1}{\omega_0\tau_\gamma} = \frac{\gamma}{M}\sqrt{\frac{L}{g}}, \quad A = \frac{a}{Mg}, \quad \tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

Reduktion auf ein System von Dgl. 1. Ordnung

Gegeben: Differentialgleichung höherer Ordnung

$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)})$

Methode zur Reduktion der Differentialgleichung

Definition	System von Dgl. 1. Ordnung
$z_0 = x$	$z_0' = 1$
$z_1 = y$	$z_1' = z_2$
$z_2 = y'$	$z_2' = z_3$
$z_3 = y''$	$z_3' = z_4$
$\dots$	$\dots$
$z_m = y^{(m-1)}$	$z_m' = f(z_0, z_1, z_2, \dots, z_m)$

Autonomes System von Differentialgleichungen $\vec{z}' = \vec{F}(\vec{z})$

Beispiel - allgemeines Pendel

$$\ddot{\theta}(\tau) = A\sin(\tau\tilde{\Omega} + \phi) - \sin\theta(\tau) - \Gamma\dot{\theta}(\tau)$$

$$\vec{z}(\tau) = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \theta(\tau) \\ \dot{\theta}(\tau) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{z}}(\tau) = \vec{F}(\vec{z}) = \begin{pmatrix} F_0(\vec{z}) \\ F_1(\vec{z}) \\ F_2(\vec{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z_2 \\ A\sin(z_0\tilde{\Omega} + \phi) - \sin z_1 - \Gamma z_2 \end{pmatrix}$$

Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung

$$\vec{z}_{i+1} = \vec{z}_i + h_{i+1}\vec{\phi}(\vec{z}_i, h)$$

$$\vec{\phi}(\vec{z}, h) = \tfrac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)$$

$$\vec{k}_1 = \vec{F}(\vec{z}_i)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{F}(\vec{z}_i + \frac{h_{i+1}}{2}\vec{k}_1)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{F}(\vec{z}_i + \frac{h_{i+1}}{2}\vec{k}_2)$$

$$\vec{k}_4 = \vec{F}(\vec{z}_i + h_{i+1}\vec{k}_3)$$

Analyse durch Bestimmung des Frequenzspektrums

Fouriertransformation: $F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} \mathrm{d}t$

$f(t)$ reell $\rightarrow F(-\omega) = F^*(\omega)$

wenn Pendel für $t < 0$ in Ruhe: $F(\omega) \rightarrow \frac{1}{2} F(\omega) \quad (\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t} \mathrm{d}t)$

linearisiertes Pendel: $F(\omega) = \frac{i\pi}{2}\theta_0 [e^{-i\varphi}\delta(\omega - \omega_0) - e^{i\varphi}\delta(\omega + \omega_0)]$

gedämpftes Pendel: Verbreiterung, Verschiebung

$$F(\omega) = \frac{\theta_0}{2}\left[\frac{\exp(i\varphi)}{\omega + \omega_0 + i\gamma} - \frac{\exp(-i\varphi)}{\omega - \omega_0 + i\gamma}\right]$$

Verbreiterung: Maß für die Güte

anharmonisches Pendel: Auftreten von Spitzen in F bei $\omega,\ 3\omega,\ \ldots$

Frequenzanalyse Pendel

Annahme: Pendel für $t < 0$ in Ruhe:

$$F(\omega) = \int_0^\infty \theta(t) e^{i\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\infty \theta(\tau) \exp\left[i \frac{\omega\tau}{\omega_0} \right] \mathrm{d}\tau$$

für unsere Aufgaben: $F(\tilde{\omega}) = \omega_0 F(\omega) = \int_0^{\tau_{max}} \theta(\tau) e^{i\tilde{\omega}\tau} \mathrm{d}\tau$

Realteil: $\Re(F(\tilde{\omega})) = \int_0^{\tau_{max}} \theta(\tau) \cos \tilde{\omega}\tau \mathrm{d}\tau$ „Cosinus-Transformation“

Imaginärteil: $\Im(F(\tilde{\omega})) = \int_0^{\tau_{max}} \theta(\tau) \sin \tilde{\omega}\tau \mathrm{d}\tau$ „Sinus-Transformation“

Leistungsspektrum:
$P(\tilde{\omega}) = |F(\tilde{\omega})|^2 + |F(-\tilde{\omega})|^2 = 2|F(\tilde{\omega})|^2 = 2(\Re(F(\tilde{\omega}))^2 + \Im(F(\tilde{\omega}))^2)$

Abtastrate und Grenzfrequenz

Abtastintervall $\Delta\tau$: $\theta_n = \theta(n\Delta\tau)\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N$

Abtastrate: $1/\Delta\tau$

Nyquist-Frequenz: $\quad f_c \equiv \dfrac{1}{2\Delta t} \quad \tilde{\omega}_c = \dfrac{\pi}{\Delta\tau}$

Abtasttheorem: $F(\omega) = 0\,,\ \forall\omega \geq 2\pi f_c \rightarrow f(t)$ durch die gemessenen Werte $f(n\Delta t)$ vollständig bestimmt.

$F(\omega) \neq 0\,,\ \omega \geq 2\pi f_c \rightarrow$ „Aliasing“-Effekte

Untersuchung der Pendelschwingung in der Zeit

1. Schreibe eine Routine, die $\dot{\vec{z}}(\tau)$ für das autonome System unseres allgemeinen Pendelfalls berechnet.
2. Schreibe eine Routine, die einen Iterationsschritt nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung für das autonome System durchführt.
3. Stelle die Pendelbewegung als Funktion der Eigenzeit, $\theta(\tau)$, und im Phasenraum $(\theta(\tau), \dot{\theta}(\tau))$ dar.
   - 3.1 Für ein ungedämpftes, ungetriebenes Pendel mit $\theta_1 = 0.1$ und $\theta_1 = 3$, $\dot{\theta}_1 = 0$ dar. Verwende etwa $\tau \in [0, 40]$ und $\Delta\tau = h = 0.1$.
   - 3.2 Für ein ungetriebenes, gedämpftes Pendel mit den gleichen Anfangsbedingungen und $\Gamma = 0.05$ und $\Gamma = 0.3$
   - 3.3 Für ein getriebenes, ungedämpftes Pendel mit den gleichen Anfangsbedingungen, $\tilde{\Omega} = 2$, $\phi = 0$ und $A = 1$ bzw. $A = 7$. Erweitere den Bereich auf etwa $\tau \in [0, 100]$.
   - 3.4 Ein getriebenes, gedämpftes Pendel nach Wahl.

Frequenzanalyse der Pendelschwingung

Führe eine Frequenzanalyse für einige Pendelbewegungen aus Punkt 3 durch (vgl. Übungseinheit 8)

Verwende für die Integration eines der vorgestellten numerischen Verfahren, z.B. Newton-Côtes/Simpson-Regel.

Zur Erinnerung:

$$\Delta\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{N\Delta\tau}$$

$$\tilde{\omega}_{max} \approx \frac{2\pi}{\Delta\tau_{min}} \leq \tilde{\omega}_c$$

Verwende etwa $\tilde{\omega} \in [0, 5]$.