EDV2: Numerische Lösung von Differentialgleichungen

03. Juni 2008

Inhalt

Physikalische Probleme

Viele physikalische Probleme erfordern die Lösung einer gewönlichen Differentialgleichung

dabei haben wir es sehr häufig mit Differentialgleichungen 2. Ordnung zu tun

Beispiel: Newtonsche Bewegungsgleichung

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

allgemein: $y''(x) + q(x)y'(x) + p(x)y(x) = r(x)$

Lösungsmethoden für DG 1. Ordnung $\Rightarrow$ Reduktion der Ordnung durch Einführung von Hilfsfunktionen

$$y'(x) = z(x) \rightarrow z'(x) + q(x)z(x) + p(x)y(x) = r(x)$$

$\Rightarrow$ Konstruktion autonomer Systeme (nächste Woche)

Allgemeine Vorgangsweise zur Lösung der DG

Wir betrachten hier Anfangswertprobleme

gegeben: $y_0 = y(x_0)$ und $y'(x) = f(x, y(x))$

gesucht: $y(x) = y(x_0 + n \cdot dx) = F(x, y_0)$

1. Schritt: Erweiterung auf endliche Schrittweite

$$dx \rightarrow \Delta x$$

2. Schritt: Suche nach einer geeigneten Funktion F

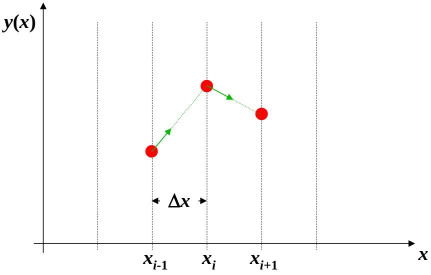
Euler- oder Polygonzugverfahren

gegeben: $y'(x) = f(x, y(x))$

Entwicklung in eine Taylorreihe

$$y(x_i + \Delta x) = y(x_i) + \Delta x \cdot y'(x_i) + \left\lfloor \frac{\Delta x^2}{2} y''(x_i) + \dots \right.$$

Vergleiche dazu die Trapezmethode bei der numerischen Integration



Genauigkeit und Verbesserungen

Genauigkeit des Euler-Verfahrens

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x \cdot y'(x) + O(\Delta x^2)$$

Verbesserungen:

Suche nach Funktionen anstelle von $y'(x)$, sodass die Genauigkeit von der Ordnung $O(\Delta x^n)$, $n > 2$ wird

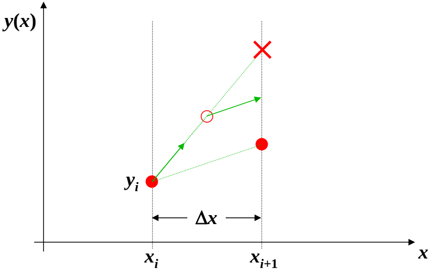
Rückblick: numerische Berechnung der 1. Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}f(x_i)}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$
$$\frac{\mathrm{d}f(x_i)}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$\Rightarrow$ Verwendung der Ableitung an Zwischenwerten

Modifiziertes Euler-Verfahren

bisher: $y_{i+1} = y(x_i + \Delta x) = y(x_i) + \Delta x \cdot y'(x_i, y(x_i)) = y_i + \Delta x\, y'_i$



$$
\begin{aligned}
k_1 &= y'_i \\
k_2 &= y'(x_i + \Delta x/2, y_i + \Delta x\, k_1/2) \\
y_{i+1} &= y_i + \Delta x\, k_2 + O(\Delta x^3)
\end{aligned}
$$

Runge-Kutta-Verfahren

Allgemeine Lösung

$$y_{i+1} = y_i + h_{i+1} \cdot \Phi(x_i, y_i; h_{i+1})$$

h_{i+1} ersetzt Δx, kann veränderlich sein; Φ ersetzt y_i'

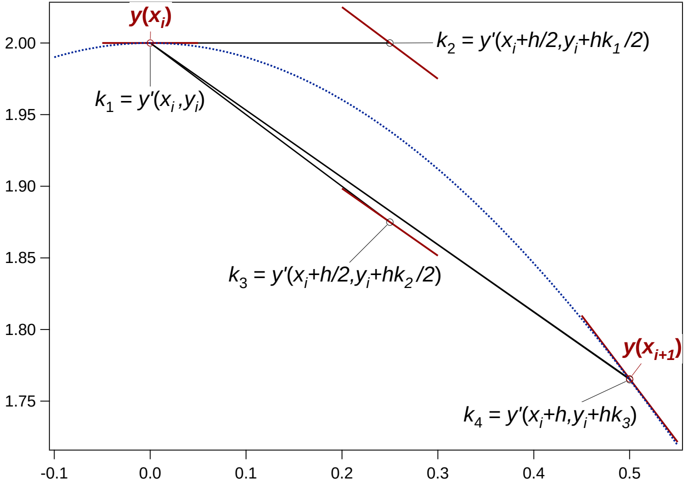
Ableitung an mehreren Zwischenpunkten $\Rightarrow$ höhere Ordnung

Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung:

$$y'(x) = f(x,y) \to \Phi(x,y;h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x,y) & k_2 &= f(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}k_2) & k_4 &= f(x+h, y+hk_3) \end{aligned}$$

Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung



Schrittweitenanpassung

jeden Schritt mit der einfachen und zusätzlich mit der halben Schrittweite rechnen

$$
\begin{aligned}
y(x+2h) &= y_1(x+2h) &+& (2h)^5 \cdot \phi &+& O(h^6) \\
y(x+2h) &= y_2(x+h+h) &+& 2h^5 \cdot \phi &+& O(h^6) \\
& & & \phi &=& O\left(\frac{y^{(5)}(x)}{5!}\right)
\end{aligned}
$$

Bedingung für Genauigkeit ε: $|y_2 - y_1| = |\Delta| < \varepsilon$
ist die Bedingung nicht erfüllt, wird die Schrittweite h verkleinert

mögliche Konstruktion eines Runge-Kutta-Verfahrens 5. Ordnung

$$y(x+2h) = y_2(x+2h) + \frac{\Delta}{15} + O(h^6)$$

Achtung: höhere Ordnung muss hier nicht zugleich höhere Genauigkeit bedeuten; wir verlieren gleichzeitig die Möglichkeit unseren Fehler abzuschätzen!

Aufgaben

1. Schreibe jeweils eine Funktion, die den Wert der ersten Ableitung $y'(x,y) = f(x,y)$ mit
$$f_1(x,y) = \frac{4}{x}(y-1) \quad \text{und} \quad f_2(x,y) = -2xy$$
an der Stelle (x,y) zurückgibt.
2. Schreibe eine Funktion, die einen Iterationsschritt nach dem Euler-Verfahren bei gegebener Position (x,y) und Schrittweite h durchführt und den Funktionswert an der Stelle $y(x+h)$ berechnet.
3. Teste diese Funktion mit den Differentialgleichungen aus Punkt 1: mit f_1 im Intervall $x = 1 \ldots 5$ mit der Anfangsbedingung $y_1(1) = 2$ und mit f_2 in $x = -3 \ldots 3$ mit $y_2(-3) = 1.2341 \times 10^{-4}$. Vergleiche das Ergebniss mit den korrekten Lösungen $y_1(x) = x^4 + 1$ und $y_2(x) = \exp(-x^2)$ mittels graphischer Darstellung sowie der relativen oder absoluten Abweichung.
4. Ersetze das Euler-Verfahren durch ein Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit gleichbleibender Schrittweite (wieder eine Funktion, die $y(x+h)$ berechnet) und teste wie in Punkt 3. Was lässt sich über die Ergebnisse bei gleicher Schrittweite, z.B. $h = 0.1$, sagen? Wie müsste die Schrittweite für das Euler-Verfahren verkleinert werden, um gleiche Resultate zu erhalten?